EJERCICIOS 11-4

(1-46) Derive las expresiones siguientes.

1. x^5

2. $x^{\sqrt{3}}$

3. $\dfrac{1}{t^3}$

4. $\dfrac{4}{u^4}$

5. $\dfrac{1}{5u^5}$

6. $\dfrac{x^7}{7}$

7. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

8. $2x - x^3$

9. $4x^3 - 3x^2 + 7$

10. $5 - 2x^2 + x^4$

11. $3x^4 - 7x^3 + 5x^2 + 8$

12. $4x^3 + 2 + \dfrac{1}{x}$

13. $3u^2 + \dfrac{3}{u^2}$

14. $\dfrac{x^6}{6} + \dfrac{6}{x^6}$

15. $x^{1.2} + \dfrac{1}{x^{0.6}}$

16. $x^{0.4} - x^{-0.4}$

17. $2\sqrt{x} + 2/\sqrt{x}$

18. $x^7 + \dfrac{1}{x^7} + 7x + \dfrac{7}{x} + 7$

19. $2\sqrt{x^3} + \dfrac{2}{\sqrt{x^3}}$

20. $2\sqrt{t} - \dfrac{3}{\sqrt[3]{t}}$

21. $2x^{3/2} + 4x^{5/4}$

22. $\sqrt[3]{x} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

23. $3x^4 + (2x - 1)^2$

24. $(y - 2)(2y - 3)$

25. $(x - 7)(2x - 9)$

26. $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2$

27. $(u + 1)(2u + 1)$

28. $\left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 - \left(\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$

29. $(t + 1)(3t - 1)^2$

30. $(u - 2)^3$

31. $(x + 2)^3$

32. $(x + 1)(x - 1)^2$

33. $\left(\dfrac{x + 1}{x}\right)^3$

34. $\left(\dfrac{2t - 1}{2t}\right)^3$

35. $\left(\dfrac{y + 2}{y}\right)^3 + \left(\dfrac{y - 2}{y}\right)^3$

36. $\dfrac{2y^2 + 3y - 7}{y}$

37. $\dfrac{(x + 1)^2}{x}$

38. $\dfrac{x^2 - 3x + 1}{\sqrt{x}}$

39. $\dfrac{t + 3/t}{\sqrt{t}}$

40. $\dfrac{(x + 1)^2 + (x - 1)^2}{x^2}$

41. $\dfrac{(2t + 3)^2 - (2t - 3)^2}{4t}$

42. $x^3 - \dfrac{x^{1.6}}{x^{2.3}}$

43. $\sqrt{2y} + (3y)^{-1}$

44. $(8y)^{2/3} + (8y)^{-2/3}$

45. $(16t)^{3/4} - (16t)^{-3/4}$

46. $\sqrt[3]{27t^2} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{27t^2}}$

47. Calcule dy/dx si $y = x^3 + 1/x^3$.

48. Determine du/dx si $u = x^2 - 7x + 5/x$.

49. Calcule dy/du si $y = u^3 - 5u^2 + \dfrac{7}{3u^2} + 6$.

50. Determine dx/dt si $x = (t^3 - 5t^2 + 7t - 1)/t^2$.

51. Si $y = \sqrt{x}$, pruebe que $2y(dy/dx) = 1$.

52. Si $u = 1/\sqrt{x}$, pruebe que $2u^{-3}\,(du/dx) + 1 = 0$.

(53-56) Determine la ecuación de la línea tangente a la gráfica de las funciones siguientes en los puntos indicados.

53. $f(x) = x^2 - 3x + 4$ en $(1, 2)$

54. $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ en $(-1, 2)$

55. $f(x) = \dfrac{2}{x}$ en $x = -2$

56. $f(x) = x^3 - \dfrac{1}{x^3}$ en $x = 1$

57. Encuentre todos los puntos en la gráfica de $y = x^2 - 3x + 7$ donde la recta tangente es paralela a la recta $x - y + 4 = 0$.

58. Encuentre todos los puntos en la gráfica de $f(x) = x^3 - 5x + 2$ donde la recta tangente es perpendicular a la recta $x + 7y + 4 = 0$.

59. *(Móvil)* La distancia recorrida por un móvil al tiempo t es igual a $2t^3 - t^{1/2}$. Calcule la velocidad instantánea:

a. Al tiempo t. **b.** En el instante $t = 4$.

60. *(Proyectiles)* Una partícula se lanza directamente hacia arriba con una velocidad inicial de 60 pies/segundo. Después de t segundos, su altura sobre el nivel del suelo está dada por $s = 60t - 16t^2$. Calcule su velocidad instantánea después de t segundos. ¿Qué tiene de especial el instante $t = \frac{15}{8}$?

61. *(Crecimiento del PNB)* En el ejercicio 22 de la sección 11-1, calcule las tasas de crecimiento instantáneas del PNB en:

a. 1970. **b.** 1980. **c.** 1990.

(La respuesta debe darse en miles de millones de dólares por año.)

62. *(Crecimiento de población)* Al principio de un experimento se encontró que en un cultivo de bacterias había 10,000 individuos. Se observó el crecimiento de la población y se encontró que en un tiempo posterior t (horas) después de empezado el experimento, el tamaño de la población $p(t)$ se podía expresar por la fórmula

$$p(t) = 2500\,(2 + t)^2.$$

Determine la fórmula de la razón de crecimiento de la población en cualquier tiempo t y en particular calcule la razón de crecimiento para $t = 15$ minutos y para $t = 2$ horas.

63. *(Botánica)* La proporción de semillas de una especie de árbol que disemina una distancia mayor que r, a partir de la base del árbol, está dada por

$$p(r) = \frac{3}{4}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{1/2} + \frac{1}{4}\left(\frac{r_0}{r}\right)$$

donde r, es una constante. Encuentre la razón de cambio de la proporción respecto a la distancia y calcule $p'(2r_0)$.

64. *(Física)* Durante cambios rápidos (adiabáticos) de presión, la presión ρ y la densidad ρ de un gas varía de acuerdo a la ley $p\rho^{-\gamma} = c$ donde γ y c son constantes. Calcule $dp/d\rho$.

65. *(Bioquímica)* Según la ley de Schütz-Borisoff, la cantidad y de sustrato transformada por una enzima en un intervalo de tiempo t está dada por $y = k\sqrt{cat}$, donde c es la concentración de la enzima, a es la concentración inicial de sustrato y k es una constante. ¿Cuál es la razón a la cual el sustrato está siendo transformado?

66. *(Proyectiles)* Una pelota es lanzada al aire a una velocidad de 40 pies por segundo con un ángulo de 45° con respecto a la horizontal. Si tomamos el eje x como horizontal y el eje y como vertical, el origen como el punto inicial del vuelo de la pelota, entonces la posición de la pelota en el tiempo t está dada por $x = 20\sqrt{2}\,t$, $y = 20\sqrt{2}\,t - 16t^2$. Calcule la pendiente de la trayectoria t segundos después de haberse lanzado la pelota. ¿Para cuál valor de t la pendiente es cero? (*Sugerencia*: Exprese y en términos de x para eliminar a t.)

67. *(Crecimiento de células)* La masa de un organismo unicelular crece con el tiempo t de acuerdo con la fórmula $m(t) = 2 + 6t + 3t^2$. Encuentre $m'(t)$ y evalúe $m(2)$ y $m'(2)$. Interprete estos valores.

68. *(Epidemias)* Una enfermedad infecciosa y debilitante se propaga lentamente en una población. El número de individuos infectados después de t meses está dado mediante la fórmula:

$$N(t) = 1000(t^{3/2} + t^2)$$

Encuentre $N'(t)$. Evalúe $N(9)$ y $N'(9)$ e interprete estos valores.

69. *(Fórmula Fay/Lehr)* Se ha observado que la forma de esparcimiento de un derrame de petróleo es aproximadamente una elipse con su eje mayor en la dirección del viento. El área de la elipse en metros cuadrados es $A = \pi ab$, donde:

$$a(t) = b(t) + c_1 t^{3/4}, \qquad b(t) = c_2 t^{1/4}.$$

Aquí t es tiempo en minutos, c_1 es una constante que depende de la velocidad del viento y c_2 es una constante que depende del volumen derramado. Si $c_1 = 0.2$ y $c_2 = 15$ calcule los valores de $A(t)$ y $A'(t)$ después de 15 minutos y después de 30 minutos.

■ 11-5 ANÁLISIS MARGINAL

La derivada tiene varias aplicaciones en la administración y la economía en la construcción de lo que denominamos *tasas marginales*. En este campo, la palabra "marginal" se utiliza para indicar una derivada, esto es, una tasa de cambio. Se dará una selección de ejemplos.

Costo marginal

Suponga que el fabricante de cierto artículo descubre que a fin de producir x de estos artículos a la semana, el costo total en dólares está dado por $C = 200 + 0.03x^2$. Por ejemplo, si se producen 100 artículos a la semana, el costo está dado por $C = 200 + 0.03(100)^2 = 500$. El costo promedio por artículo al producir 100 artículos es $\frac{500}{100} = \$5$.

Si el fabricante considera cambiar la tasa de producción de 100 a $(100 + \Delta x)$ unidades por semana, en donde Δx representa el incremento en la producción semanal. El costo es

$$\begin{aligned} C + \Delta C &= 200 + 0.03(100 + \Delta x)^2 \\ &= 200 + 0.03[10{,}000 + 200\Delta x + (\Delta x)^2] \\ &= 500 + 6\Delta x + 0.03(\Delta x)^2. \end{aligned}$$

Por consiguiente, el costo extra determinado por la producción de los artículos adicionales es

$$\begin{aligned} \Delta C = (C + \Delta C) - C &= 500 + 6\Delta x + 0.03(\Delta x)^2 - 500 \\ &= 6\Delta x + 0.03(\Delta x)^2. \end{aligned}$$

En consecuencia, el costo promedio por artículo de las unidades extra es

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = 6 + 0.03\Delta x.$$

Por ejemplo, si la producción crece de 100 a 150 artículos por semana (de modo que $\Delta x = 50$), se sigue que el costo promedio de los 50 artículos adicionales es igual a $6 + 0.03(50) = \$7.50$ por cada uno. Si el incremento es de 100 a 110 (de modo que $\Delta x = 10$), el costo promedio extra de los 10 artículos es igual a \$6.30 por cada uno.

Definimos el costo marginal como el valor límite del costo promedio por artículo extra cuando este número de artículos extra tiende a cero. Así, podemos pensar del costo marginal como el costo promedio por artículo extra cuando se efectúa un cambio muy pequeño en la cantidad producida. En el ejemplo anterior,

$$\text{Costo marginal} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (6 + 0.03\Delta x) = 6.$$

En el caso de una función de costo general $C(x)$ que represente el costo de producir una cantidad de x de cierto artículo, el costo marginal se define en forma similar por

$$\text{Costo marginal} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C(x + \Delta x) - C(x)}{\Delta x}.$$

Es claro que el costo marginal no es otra cosa que la derivada de la función de costo con respecto a la cantidad producida.

$$\boxed{\text{Costo marginal} = \frac{dC}{dx}}$$

El costo marginal mide la tasa con que el costo se incrementa con respecto al incremento de la cantidad producida.

EJEMPLO 1 ***(Costo marginal)*** Para el caso de la función de costo

$$C(x) = 0.001x^3 - 0.3x^2 + 40x + 1000$$

determine el costo marginal como una función de x. Evalúe el costo marginal cuando la producción está dada por $x = 50$, $x = 100$ y $x = 150$.

Solución Deseamos evaluar $C'(x)$. La función dada $C(x)$ es una combinación de potencias de x y así puede derivarse por medio de la fórmula para las potencias que se presentó en la última sección. Obtenemos

$$\begin{aligned} C'(x) &= \frac{d}{dx}(0.001x^3 - 0.3x^2 + 40x + 1000) \\ &= 0.001(3x^2) - 0.3(2x) + 40(1) + 0 \\ &= 0.003x^2 - 0.6x + 40. \end{aligned}$$

Esta función, el costo marginal, da el costo promedio por artículo de crecimiento de la producción por una pequeña cantidad dado que ya se han producido x artículos. Cuando se han producido 50 unidades, el costo marginal de los artículos extra está dado por

$$C'(50) = (0.003)(50)^2 - (0.6)(50) + 40 = 7.5 - 30 + 40 = 17.5.$$

Si $x = 100$, el costo marginal es

$$C'(100) = (0.003)(100)^2 - (0.6)(100) + 40 = 30 - 60 + 40 = 10.$$

Cuando $x = 150$, el costo marginal está dado por

$$C'(150) = (0.003)(150)^2 - (0.6)(150) + 40 = 67.5 - 90 + 40 = 17.5.$$

Informalmente podemos decir que el costo de producir el artículo número 51 es de \$17.50, el artículo número 101 tiene un costo de \$10 y el artículo número 151 cuesta \$17.50. (Afirmaciones como ésta no son lo *bastante* precisas, dado que la derivada de la tasa de un incremento infinitesimalmente pequeño en la producción, no para un incremento unitario.) ☛ **19**

☛ **19.** Determine el costo marginal si $C(x) = 4 + 3x - 0.1x^2$. Evalúe $C'(5)$ y explique su significado.

Respuesta $C'(x) = 3 - 0.2x$, $C'(5) = 2$. Cuando se producen 5 unidades, el costo se eleva en 2 por unidad adicional cuando se aumenta el nivel de producción en un pequeño incremento infinitesimal.

En el ejemplo 1, observamos que el costo marginal decrece a medida que la producción se incrementa de 50 a 100 unidades y luego se incrementa de nuevo cuando la producción aumenta de 100 a 150. En la figura 8 aparece la gráfica de $C'(x)$ como una función de x.

Este tipo de comportamiento es bastante frecuente en el costo marginal. Cuando la producción x aumenta a partir de valores pequeños, el costo marginal decrece (esto es, baja el costo promedio del pequeño incremento siguiente en la producción). La razón de esto estriba en las economías de escala, que provocan que la fabricación de pequeñas cantidades de bienes sea relativamente más cara que la producción de grandes cantidades. Sin embargo, cuando x se hace muy grande, los costos empie-