$$f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^3 - 1}$$

en $x = 1.2, 1.1, 1.05, 1.01, 1.005$ y 1.001. Demuestre que el $\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{4}{3}$. ¿Se acercan sus valores calculados a este límite?

46. Use una calculadora para evaluar

$$f(x) = \frac{\sqrt{x + 3} - 2}{x - 1}$$

para $x = 0.9, 0.99, 0.999$ y 0.9999 y para $x = 1.1., 1.01, 1.001$ y 1.0001. Pruebe que $\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{1}{4}$. ¿Se acercan los valores calculados a este límite?

47. Use una calculadora para evaluar la función

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$$

para $x = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$ y 0.00001. ¿Están los valores calculados cada vez más cerca de algún número? ¿Cuánto cree que vale $\lim_{x \to 0} f(x)$?

48. Repita el ejercicio 45 con la función

$$f(x) = \frac{\ln x}{x - 1}.$$

¿A qué piensa que sea igual $\lim_{x \to 1} f(x)$?

■ 11-3 LA DERIVADA

En la sección 11-2, vimos cómo la definición de velocidad instantánea de un móvil nos conduce de manera natural a un proceso de límite. La velocidad promedio $\Delta s/\Delta t$ se calcula en primer término para un lapso de duración entre t y $t + \Delta t$, y luego se calcula su valor límite cuando $\Delta t \to 0$. Podríamos describir $\Delta s/\Delta t$ como la tasa de cambio promedio de la posición, s, con respecto al tiempo, y su límite es la tasa de cambio promedio de s con respecto a t.

Ahora bien, existen muchos ejemplos de procesos que se desarrollan en el tiempo y podemos dar definiciones correspondientes de la tasa de cambio instantánea de las variables asociadas.

EJEMPLO 1 ***(Crecimiento de la población)*** Durante el periodo de 10 años de 1970 a 1980, se encontró que la población de cierto país estaba dada por la fórmula

$$P(t) = 1 + 0.03t + 0.001t^2$$

donde P está en millones y t es el tiempo medido en años desde el inicio de 1970. Calcule la tasa de crecimiento instantánea al inicio de 1975.

Solución Queremos la tasa de crecimiento en $t = 5$. El incremento de P entre $t = 5$ y $t = 5 + \Delta t$ es

$$\begin{aligned}
\Delta P &= P(5 + \Delta t) - P(5) \\
&= [1 + 0.03(5 + \Delta t) + 0.001(5 + \Delta t)^2] - [1 + 0.3(5) + 0.001(5)^2] \\
&= 1 + 0.15 + 0.03\,\Delta t + 0.001(25 + 10\,\Delta t + (\Delta t)^2) \\
&\quad -[1 + 0.15 + 0.001(25)] \\
&= 0.04\,\Delta t + 0.001\,(\Delta t)^2.
\end{aligned}$$

EJERCICIOS 11-2

(1-30) Evalúe los límites siguientes.

1. $\lim_{x\to 2} (3x^2 + 7x - 1)$

2. $\lim_{x\to -1} (2x^2 + 3x + 1)$

3. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x+1}{x-2}$

4. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2+1}{x+3}$

5. $\lim_{x\to 5} \dfrac{x^2-25}{\sqrt{x^2+11}}$

6. $\lim_{x\to 4} \dfrac{x^2-16}{x-4}$

7. $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^2-4}{x^2+3x+2}$

8. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}$

9. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$

10. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-x-2}$

11. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2+3x+2}{x^2-1}$

12. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x^2-5x+6}$

13. $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^2+4x+4}{x^2-4}$

14. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2+4x+3}{x^2+3x+2}$

15. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}$

16. $\lim_{x\to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

17. $\lim_{x\to 9} \dfrac{9-x}{\sqrt{x}-3}$

18. $\lim_{x\to 9} \dfrac{\sqrt{x}-3}{x^2-81}$

19. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$

20. $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^3+8}{x^2-4}$

***21.** $\lim_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x^3-64}$

***22.** $\lim_{x\to 9} \dfrac{x^3-729}{\sqrt{x}-3}$

23. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x+1}{x-2}$

24. $\lim_{x\to 0} \dfrac{2x^2+5x+7}{x}$

25. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{4+x}-2}{x}$

26. $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$

27. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}$

28. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{9+x}-3}{x^2+2x}$

29. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{4+x}-2}$

30. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2-x}-1}{2-\sqrt{x+3}}$

(31-36) Calcule $\lim_{x\to c} f(x)$, en donde $f(x)$ y c se dan abajo.

31. $f(x) = \begin{cases} 3x-4 & \text{para } x \neq 2 \\ 5 & \text{para } x = 2 \end{cases}; \quad c = 2$

32. $f(x) = \begin{cases} x^2-3x+1 & \text{para } x \neq 1 \\ 7 & \text{para } x = 1 \end{cases}; \quad c = 1$

33. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{para } x \neq 2 \\ 3 & \text{para } x = 2 \end{cases}; \quad c = 2$

34. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x+3} & \text{para } x \neq -3 \\ -5 & \text{para } x = -3 \end{cases}; \quad c = -3$

35. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{para } x \neq 1 \\ 3 & \text{para } x = 1 \end{cases}; \quad c = 1$

36. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3} & \text{para } x \neq 9 \\ 7 & \text{para } x = 9 \end{cases}; \quad c = 9$

(37-41) Las funciones $f(x)$ y los valores de a están dados abajo. Evalúe.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

en cada caso.

37. $f(x) = 2x^2 + 3x + 1, \quad a = 1$

38. $f(x) = 3x^2 - 5x + 7, \quad a = 2$

39. $f(x) = x^2 - 1, \quad a = 0$

40. $f(x) = x^2 + x + 1, \quad a = x$

41. $f(x) = 2x^2 + 5x + 1, \quad a = x$

42. Una partícula cae del reposo bajo la acción de la gravedad. ¿Cuál es la velocidad instantánea después de $1\frac{1}{2}$ segundos?

43. Una pelota se arroja verticalmente hacia arriba con una velocidad de 40 pies/segundo. La distancia recorrida en pies después de t segundos está dada por la fórmula $s = 40t - 16t^2$. Determine la velocidad instantánea:

a. Después de 1 segundo. **b.** Después de 2 segundos.

44. En el ejercicio 43, calcule la velocidad instantánea después de t segundos. ¿Qué ocurre cuando $t = \frac{5}{4}$? ¿Cuál es la velocidad instantánea cuando $t = \frac{5}{2}$?

45. En este ejercicio, con su calculadora evalúe la función