EJERCICIOS 13-4

(1-12) Bosqueje las gráficas de las funciones siguientes.

1. $y = x^2 - 6x + 7$

2. $y = x^2 - 4x + 5$

3. $y = x^3 - 3x + 4$

4. $y = x^3 - 12x + 10$

5. $y = x^3 - 3x + 2$

6. $y = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 20$

7. $y = x^4 - 2x^2$

8. $y = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2$

9. $y = x^5 - 5x^4 + 1$

10. $y = x^7 - 7x^6$

11. $y = 5x^6 - 6x^5 + 1$

12. $y = \frac{1}{4}x^4 - 3x^2$

(13-14) Dibuje las gráficas de las dos funciones de costo de los ejercicios 23 y 24 de la sección 13-3 (sólo considere $x \geq 0$).

■ 13-5 APLICACIONES DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS

En la práctica surgen muchas situaciones en que deseamos maximizar o minimizar cierta cantidad. El ejemplo siguiente representa un caso común del asunto.

EJEMPLO 1 ***(Conservación óptima)*** Un ecólogo cultiva peces en un lago. Entre más peces introduzca, habrá más competencia por el alimento disponible y el pez ganará peso en forma más lenta. De hecho, se sabe por experimentos previos que cuando hay n peces por unidad de área del lago, la cantidad promedio en peso que cada pez gana durante una temporada está dada por $w = 600 - 30n$ gramos. ¿Qué valor de n conduce a la producción total máxima en el peso de los peces?

Solución La ganancia en peso de cada pez es $w = 600 - 30n$. Puesto que hay n peces por unidad de área, la producción total por unidad de área, P, es igual a nw. Por consiguiente,

$$P = n(600 - 30n) = 600n - 30n^2.$$

Con objeto de encontrar el valor de n para P máxima, derivamos y hacemos igual a cero la derivada dP/dn.

$$\frac{dP}{dn} = 600 - 60n$$

y $dP/dn = 0$ cuando $600 - 60n = 0$, esto es, si $n = 10$. Así que la densidad de 10 peces por unidad de área da la producción total máxima. El valor máximo de P es

$$\mathrm{P} = 600(10) - 30(10)^2 = 3000$$

es decir 3000 gramos por unidad de área. Podemos verificar que esto es un máximo local usando la regla de la segunda derivada:

$$\frac{d^2P}{dn^2} = -60$$

La segunda derivada es negativa (de hecho, para todos los valores de n) por lo que el valor crítico $n = 10$ corresponde a un máximo de P.

La gráfica de P contra n aparece en la figura 25. P es cero cuando n es cero ya que en ese momento no hay peces. A medida que n aumenta, P se incrementa hasta un valor máximo, luego decrece hasta cero otra vez cuando $n = 20$. Si n sigue creciendo, P decrece porque para valores grandes de n los peces ganarán muy poco peso y algunos de ellos morirán, de modo que la producción total será pequeña. ☛ **16**

☛ **16.** Vuelva a resolver el ejemplo 1, si el peso promedio que gana cada pez es $w = 800 - 25n$.

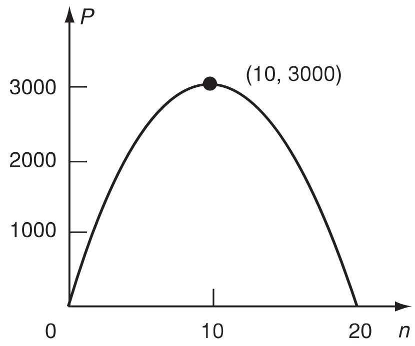

FIGURA 25

Respuesta $n = 16$.

Consideremos otro ejemplo de naturaleza puramente matemática.

EJEMPLO 2 Determine dos números cuya suma sea 16 de tal forma que su producto sea tan grande como sea posible.

Solución Sean los dos números x y y, de modo que $x + y = 16$. Si $P = xy$ denota su producto, entonces necesitamos determinar los valores de x y y que produzcan que P sea máximo.

No podemos derivar P de inmediato, puesto que es una función de dos variables, x y y. Sin embargo, estas dos variables no son independientes sino que están relacionadas por la condición $x + y = 16$. Debemos usar esta condición a fin de eliminar una de las variables de P, dejando a P como función de una sola variable. Tenemos que $y = 16 - x$, y así

$$P = xy = x(16 - x) = 16x - x^2.$$

Debemos encontrar el valor de x que haga a P máximo.

$$\frac{dP}{dx} = 16 - 2x$$

Así que, $dP/dx = 0$ cuando $16 - 2x = 0$, esto es, si $x = 8$. La segunda derivada $d^2P/dx^2 = -2 < 0$, y $x = 8$ corresponde a un máximo de P.

Cuando $x = 8$, también $y = 8$, de modo que el valor máximo de P es igual a 64. ☛ **17**

☛ **17.** Encuentre dos números cuyo producto sea 64 y su suma sea mínima.

Respuesta 8 y 8.

La solución de problemas de optimización del tipo anterior con frecuencia se encuentra que es una de las áreas más difíciles del cálculo diferencial. La principal dificultad surge cuando es necesario escribir el problema dado en palabras en ecuaciones. Una vez que las ecuaciones se han construido, por lo regular es rutinario completar la solución usando un poco de cálculo. Esta tarea de expresar problemas en palabras en términos de ecuaciones matemáticas ocurre a menudo en todas las ramas de las matemáticas aplicadas y es algo que el estudiante interesado en las aplicaciones deberá dominar en sus cursos de cálculo a fin de que sean de utilidad.

Por desgracia, no es posible dar rápidas y contundentes reglas por medio de las cuales cualquier problema verbal pueda reescribirse en ecuaciones. Sin embargo, existen algunos principios directores que conviene tener en mente.*

Paso 1 Identifique todas las variables involucradas en el problema y denote cada una de ellas mediante un símbolo.

En el ejemplo 1, las variables eran n, el número de peces por unidad de área; w, la ganancia promedio en peso por pez, y P, la producción total de peso de los peces por unidad de área. En el ejemplo 2, las variables eran los dos números x y y, y P, su producto.

Paso 2 Destaque la variable que ha de ser maximizada o minimizada y exprésela en términos de las otras variables del problema.

Volviendo al ejemplo 1, la producción total P se maximizó, y escribimos $P = nw$, que expresa a P en términos de n y w. En el ejemplo 2, el producto P de x y y se maximizó y por supuesto $P = xy$.

Paso 3 Determine todas las relaciones entre las variables. Exprese estas relaciones matemáticamente.

En el primer ejemplo, se daba la relación $w = 600 - 3n$. En el segundo, la relación entre x y y es que su suma debía ser igual a 16, de modo que escribimos la ecuación matemática $x + y = 16$.

Paso 4 Exprese la cantidad por maximizar o minimizar en términos de una sola de las variables. Con objeto de hacer esto, se utilizan las relaciones obtenidas en el paso 3 a fin de eliminar todas excepto una de las variables.

Recurriendo de nuevo al ejemplo 1, tenemos que $P = nw$ y $w = 600 - 3n$, de modo que, eliminando w, se obtiene P en términos de n: $P = n(600\ 3n)$. En el ejemplo 2, tenemos que $P = xy$ y $x + y = 16$, por lo que, eliminando y, obtenemos $P = x(16 - x)$.

Paso 5 Una vez que se ha expresado la cantidad requerida como una función de una variable, determine sus puntos críticos e investigue si son máximos o mínimos locales.

*Los pasos 1 y 3 no sólo se aplican a problemas de optimización sino a problemas verbales en general.

Seguiremos estos pasos en otro ejemplo.

EJEMPLO 3 ***(Costo mínimo)*** Se ha de construir un tanque con una base cuadrada horizontal y lados rectangulares verticales. No tendrá tapa. El tanque debe tener una capacidad de 4 metros cúbicos de agua. El material con que se construirá el tanque tiene un costo de \$10 por metro cuadrado. ¿Qué dimensiones del tanque minimizan el costo del material?

Solución

Paso 1 Las variables en el problema son las dimensiones del tanque y el costo de los materiales de construcción. El costo depende del área total de la base y de los lados los cuales determinan la cantidad de material usado en la construcción. Denotemos con x la longitud de un lado de la base y con y la altura del tanque. (Véase la figura 26.) La cantidad que debe minimizarse es el costo total de materiales, que denotamos con C.

Paso 2 C es igual al área del tanque multiplicada por \$10, que es el costo por unidad de área. La base es un cuadrado con lado x, de modo que tiene un área igual a x^2. Cada lado es un rectángulo con dimensiones x y y, y tiene un área xy. El área total de la base más los cuatro lados es por tanto $x^2 + 4xy$. En consecuencia, escribimos

$$C = 10(x^2 + 4xy).$$

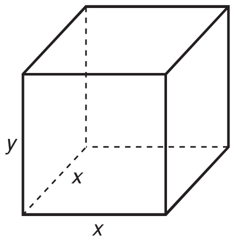

FIGURA 26

Paso 3 Observe que la cantidad por minimizar está expresada como una función de dos variables, de modo que necesitamos una relación entre x y y a fin de eliminar una de éstas. Esta relación se obtiene del requerimiento (establecido en el problema) de que el volumen del tanque debe ser de 4 metros cúbicos. El volumen es igual al área de la base por la altura, esto es, x^2y, y así tenemos la condición

$$x^2y = 4.$$

☛ **18.** Vuelva a resolver el ejemplo 3, si el tanque tiene una tapa que cuesta \$30 por metro cuadrado.

Paso 4 Por el paso 3, $y = 4/x^2$, y así

$$C = 10\left[x^2 + 4x\left(\frac{4}{x^2}\right)\right] = 10\left[x^2 + \frac{16}{x}\right].$$

Paso 5 Podemos derivar la última expresión y determinar los puntos críticos de C.

$$\frac{dC}{dx} = 10\left(2x - \frac{16}{x^2}\right) = 20\left(x - \frac{8}{x^2}\right) = 0.$$

Así, $x - 8/x^2 = 0$ y por tanto $x^3 = 8$; es decir, $x = 2$.

La base del tanque debería tener en consecuencia un lado de 2 metros de longitud. La altura del tanque ahora está dada por

$$y = \frac{4}{x^2} = 4/(2)^2 = 1.$$

Es fácil verificar que $d^2C/dx^2 > 0$ cuando $x = 2$, de modo que este valor de x representa un mínimo local de C. ☛ **18**

Respuesta $x = \sqrt[3]{2} \approx 1.26$, $y = \sqrt[3]{16} \approx 2.52$.