CAPÍTULO 1

Repaso de álgebra

Una compañera nos sorprendió cuando en una clase necesitábamos calcular el área de un cuadrado de 75 cm por lado y ella de inmediato respondió que el área era de 5625 cm^2. El profesor intrigado le preguntó cómo había hecho la operación tan rápido, a lo que ella contestó que al siete le sumo uno, cuyo resultado es ocho, multiplicó éste (el ocho) por siete y obtuvo 56, y colocó el 56 adelante del número 25, obteniendo así la respuesta. Nuestra compañera agregó que este método sólo servía para números que terminaran en cinco. El profesor se quedó pensativo probando con varios números, y después de un rato nos explicó lo siguiente:

Para representar un número que termine en cinco, podemos indicar con d al número de decenas y así formar el número:

$$10d + 5.$$

Al elevar este número al cuadrado —recuerden la forma de elevar un binomio al cuadrado—, obtenemos:

$$(10d + 5)^2 = 100d^2 + 100d + 25.$$

Si factorizamos los primeros dos términos del lado derecho, cuyo factor común es $100d$, tenemos:

$$(10d + 5)^2 = 100d(d + 1) + 25.$$

Con esto podemos entender la "regla" para elevar rápidamente al cuadrado un número que termine en cinco. Hagámoslo con un ejemplo:

Elevemos $(65)^2$.

a) Nos fijamos en el número de decenas: seis.
b) Éste lo multiplicamos por el dígito que es uno mayor que él, siete.
c) Formamos el número que inicia con el resultado anterior, 42, y termina con 25, es decir, **4225**.

Al emplear esta regla, realicemos las operaciones siguientes:

i) 25^2. ii) 55^2.
iii) 95^2. iv) 115^2.
v) 7.5^2. vi) 105^2.

Objetivo del capítulo

Este capítulo revisa las técnicas fundamentales de álgebra. Está dirigido a los estudiantes que, por una u otra razón, lo necesiten para refrescar sus habilidades algebraicas básicas.

TEMARIO

■ 1-1 LOS NÚMEROS REALES

Empezaremos dando un breve esbozo de la estructura de los números reales. Los números 1, 2, 3, etc., se denominan **números naturales**. Si sumamos o multiplicamos dos números naturales cualesquiera, el resultado siempre es un número natural. Por ejemplo, $8 + 5 = 13$ y $8 \times 5 = 40$; la suma 13 y el producto 40 son números naturales. En cambio, si restamos o dividimos dos números naturales, el resultado *no* siempre es un número natural. Por ejemplo, $8 - 5 = 3$ y $8 \div 2 = 4$ son números naturales, pero $5 - 8$ y $2 \div 7$ no son números naturales. Así, dentro del sistema de números naturales, siempre podemos sumar y multiplicar pero no siempre podemos restar o dividir.

Con objeto de superar la limitación de la sustracción, extendemos el sistema de los números naturales al sistema de los **números enteros**. Los enteros incluyen los números naturales, los negativos de cada número natural y el número cero (0). De este modo podemos representar al sistema de los enteros mediante

$$\ldots, \quad -3, \quad -2, \quad -1, \quad 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \ldots$$

Es claro que los números naturales también son enteros. Si sumamos, multiplicamos o restamos dos enteros cualesquiera, el resultado también es un entero. Por ejemplo, $-3 + 8 = 5$, $(-3)(5) = -15$ y $3 - 8 = -5$ son enteros. Pero aún no podemos dividir un entero entre otro y obtener un entero como resultado. Por ejemplo, vemos que: $8 \div (-2) = -4$ es un entero, pero $-8 \div 3$ no lo es. Por tanto, dentro del sistema de los enteros, podemos sumar, multiplicar y restar pero no siempre podemos dividir.

Para superar la limitación de la división extendemos el sistema de los enteros al sistema de los **números racionales**. Este sistema consiste de todas las fracciones a/b, donde a y b son enteros con $b \neq 0$.

Un número es racional si podemos expresarlo como la razón de dos enteros con denominador distinto de cero. Así $\frac{8}{3}$, $-\frac{5}{7}$, $\frac{0}{3}$ y $6 = \frac{6}{1}$, son ejemplos de números racionales. Podemos sumar, multiplicar, restar y dividir cualesquiera dos números racionales (exceptuando la división entre cero)* y el resultado siempre es un número racional. De esta manera las cuatro operaciones fundamentales de la aritmética: adición, multiplicación, sustracción y división son posibles dentro del sistema de los números racionales.

Cuando un número racional se expresa como un decimal, los decimales terminan o presentan un patrón que se repite indefinidamente. Por ejemplo, $\frac{1}{4} = 0.25$ y $\frac{93}{80} = 1.1625$ corresponden a decimales que terminan, mientras que $\frac{1}{6} = 0.1666\ldots$ y $\frac{4}{7} = 0.5714285714285\ldots$ corresponden a decimales con patrones que se repiten.

También existen algunos números de uso común que no son racionales (es decir, que no pueden expresarse como la razón de dos enteros). Por ejemplo, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ y π no son números racionales. Tales números se denominan **números irracionales.** La diferencia esencial entre los números racionales y los irracionales se advierte en sus expresiones decimales. Cuando un número irracional se presenta por me-

*Véase el parágrafo final de esta sección.

☛ **1.** ¿Qué tipo de número es cada uno de los siguientes?:

(a) $\dfrac{-3}{2}$;

(b) $(-\sqrt{2})^2$;

(c) $\dfrac{\pi}{2}$.

dio de decimales, los decimales continúan indefinidamente sin presentar ningún patrón repetitivo. Por ejemplo, con diez cifras decimales $\sqrt{2} = 1.4142135623\ldots$ y $\pi = 3.1415926535\ldots$ No importa con cuántos decimales expresemos estos números, nunca presentarán un patrón repetitivo, en contraste con los patrones que ocurren en el caso de los números racionales.

El término **número real** se utiliza para indicar un número que es racional o irracional. El sistema de los números reales consta de todas las posibles expresiones decimales. Aquellos decimales que terminan o se repiten corresponden a los números racionales, mientras que los restantes corresponden a los números irracionales. ☛ **1**

Geométricamente, los números reales se pueden representar por los puntos sobre una línea recta denominada **recta numérica**. Con el fin de hacer esto, seleccionemos un punto arbitrario O sobre la línea que represente al número cero. Los números positivos se representan entonces por los puntos a la derecha de O y los negativos por los puntos a la izquierda de O. Si A_1 es un punto a la derecha de O tal que OA_1 tiene longitud unitaria, entonces A_1 representa al número 1. Los enteros 2, 3, . . . , n, . . . están representados por los puntos $A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots$, están a la derecha de O y son tales que

$$OA_2 = 2OA_1, \quad OA_3 = 3OA_1, \quad \ldots, \quad OA_n = nOA_1, \quad \ldots$$

De manera similar, si $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$, son los puntos a la izquierda de O tales que las distancias $OB_1, OB_2, OB_3, \ldots$, son iguales a las distancias $OA_1, OA_2, \ldots, OA_n, \ldots$, respectivamente, entonces los puntos $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n, \ldots$, representan a los números negativos $-1, -2, -3, \ldots, -n, \ldots$ En esta forma, todos los enteros pueden representarse mediante puntos sobre la recta numérica. (Véase la figura 1.)

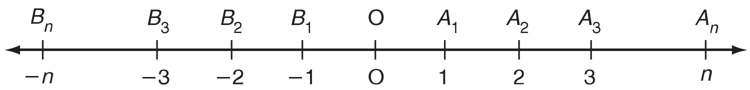

FIGURA 1

Los números racionales pueden representarse por puntos sobre la recta numérica que están situados un número apropiado de unidades fraccionarias a partir de O. Por ejemplo, el número $\frac{9}{2}$ está representado por el punto situado cuatro unidades y media a la derecha de O y $-\frac{7}{3}$ está representado por el punto que está situado dos unidades y un tercio a la izquierda de O. De manera similar, todo número racional puede representarse por un punto sobre la línea.

Se deduce que todo número *irracional* también puede representarse por un punto sobre la recta numérica. En consecuencia, todos los números reales, tantos los racionales como los irracionales, pueden representarse por tales puntos. Más aún, cada punto sobre la recta numérica corresponde a uno y sólo un número real. Debido a esto, es bastante común el uso de la palabra *punto* con el significado de *número real*.

Respuesta (a) racional, real;
(b) natural, entero, real;
(c) irracional, real.

Propiedades de los números reales

Cuando dos números reales se suman, el resultado siempre es un número real; de manera similar, cuando dos números reales se multiplican, también el resultado es un número real. Estas dos operaciones de adición y multiplicación son fundamentales en el sistema de los números reales y poseen ciertas propiedades que en breve enunciaremos. Estas propiedades por sí mismas parecen ser más bien elementales, quizás aun obvias, pero *son vitales para entender las diversas manipulaciones algebraicas que efectuaremos después*.

PROPIEDADES CONMUTATIVAS Si a y b son dos números reales cualesquiera, entonces

$$a + b = b + a \quad \text{y} \quad ab = ba.$$

Por ejemplo, $3 + 7 = 7 + 3$, $3 + (-7) = (-7) + 3$, $3 \cdot 7 = 7 \cdot 3$ y $(3)(-7) = (-7)(3)$. Estas propiedades establecen que no importa el orden en el cual dos números son sumados o multiplicados (obtenemos el mismo resultado con cualquier orden que sigamos). Se conocen como **propiedades conmutativas de la adición y de la multiplicación**, respectivamente.

PROPIEDADES ASOCIATIVAS Si a, b y c son tres números reales cualesquiera, entonces

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{y} \quad (ab)c = a(bc).$$

Por ejemplo, $(2 + 3) + 7 = 2 + (3 + 7) = 12$ y $(2 \cdot 3) \cdot 7 = 2 \cdot (3 \cdot 7) = 42$. Estas propiedades se conocen como **propiedades asociativas de la adición y de la multiplicación**, respectivamente. Establecen que, si tres números se suman (o se multiplican) a la vez, no importa cuáles dos de ellos se sumen (o se multipliquen) en primer término. Obtenemos la misma respuesta en ambos casos.

En virtud de estas propiedades, es innecesario escribir los paréntesis en las expresiones anteriores. Podemos escribir $a + b + c$ para indicar la suma de a, b y c y abc para su producto sin ninguna ambigüedad.

PROPIEDADES DISTRIBUTIVAS Si a, b y c son números reales cualesquiera, entonces

$$a(b + c) = ab + ac \quad \text{y} \quad (b + c)a = ba + ca.$$

Por ejemplo, $2(3 + 7) = 2(3) + 2(7) = 6 + 14 = 20$. Esto es sin duda cierto porque $2(3 + 7) = 2 \cdot 10 = 20$. Por otra parte, $(-2)[3 + (-7)] = (-2)(3) + (-2)(-7) = -6 + 14 = 8$. Podemos evaluar la expresión dada directamente, obteniendo la misma respuesta: $(-2)[3 + (-7)] = (-2)(-4) = 8$.

La segunda forma de la propiedad distributiva en realidad se sigue de la primera dado que, por la propiedad conmutativa

$$(b + c)a = a(b + c) \qquad \text{y también} \qquad ba + ca = ab + ac.$$

☛ **2.** ¿Cuáles propiedades de los números reales son utilizadas en cada una de las siguientes igualdades?
(a) $2 + 3 \cdot 4 = 2 + 4 \cdot 3$;
(b) $2 + 3 \cdot 4 = 3 \cdot 4 + 2$;
(c) $2 + (3 + 4) = (3 + 4) + 2$;
(d) $2 + (3 + 4) = 4 + (2 + 3)$;
(e) $3x + 3x = (3 + 3)x$;
(f) $3x + xy = x(3 + y)$.

Puesto que los segundos miembros son iguales uno a otro en virtud de la primera propiedad distributiva, los lados de la izquierda deben ser iguales.

Las propiedades distributivas son particularmente importantes en los cálculos algebraicos. Como veremos, éstas sustentan muchas operaciones incluidas en la simplificación de expresiones y, si se leen "hacia atrás", esto es, de derecha a izquierda, forman la base para los métodos de factorización. ☛ **2**

Los ejemplos siguientes ilustran algunos usos elementales de estas propiedades de los números reales al simplificar las expresiones algebraicas.

EJEMPLO 1

$$\begin{aligned}
&\text{(a)}\ \ x(y + 2) &&= xy + x(2) &&\text{(propiedad distributiva)}\\
& &&= xy + 2x &&\text{(propiedad conmutativa)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{(b)}\ \ 2x + 3x &&= (2 + 3)x &&\text{(propiedad distributiva)}\\
& &&= 5x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{(c)}\ \ 2(3x) &&= (2 \cdot 3)x &&\text{(propiedad asociativa)}\\
& &&= 6x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{(d)}\ \ (2x)(3x) &&= [(2x) \cdot 3]x &&\text{(propiedad asociativa)}\\
& &&= [3 \cdot (2x)]x &&\text{(propiedad conmutativa)}\\
& &&= [(3 \cdot 2)x]x &&\text{(propiedad asociativa)}\\
& &&= (6x)x\\
& &&= 6(x \cdot x) &&\text{(propiedad asociativa)}\\
& &&= 6x^2
\end{aligned}$$

donde x^2 denota $x \cdot x$.

Esta respuesta final pudo obtenerse agrupando los términos semejantes en el producto original: los números 2 y 3 multiplicados dan 6 y las dos x multiplicadas dan x^2. La parte siguiente ilustra este procedimiento.

(e) $[5(3ab)]\,(2a) = (5 \cdot 3 \cdot 2)(a \cdot a)b = 30a^2b$.

Esta respuesta puede justificarse mediante una sucesión de pasos que emplean las leyes asociativa y conmutativa, como en la parte (d).

$$\begin{aligned}
&\text{(f)}\ 2x + (3y + x) &&= 2x + (x + 3y) &&\text{(propiedad conmutativa)}\\
& &&= (2x + x) + 3y &&\text{(propiedad asociativa)}\\
& &&= (2x + 1x) + 3y\\
& &&= (2 + 1)x + 3y &&\text{(propiedad distributiva)}\\
& &&= 3x + 3y
\end{aligned}$$

Respuesta (a) conmutativa;
(b) conmutativa;
(c) conmutativa;
(d) ambas, conmutativa y asociativa;
(e) distributiva;
(f) ambas, distributiva y conmutativa.

(g) $2x(4y + 3x) = (2x)(4y) + (2x)(3x)$ (propiedad distributiva)

$= (2 \cdot 4)(x \cdot y) + (2 \cdot 3)(x \cdot x)$ (propiedades asociativa y conmutativa como en la parte (a))

$= 8xy + 6x^2.$

La propiedad distributiva puede usarse en el caso en que más de dos cantidades se sumen dentro de los paréntesis. Esto es,

$$a(b + c + d) = ab + ac + ad,$$

etcétera.

EJEMPLO 2

$$\begin{aligned} 4(x + 3y + 4z) &= 4x + 4(3y) + 4(4z) && \text{(propiedad distributiva)} \\ &= 4x + (4 \cdot 3)y + (4 \cdot 4)z && \text{(propiedad asociativa)} \\ &= 4x + 12y + 16z \end{aligned}$$

ELEMENTOS IDENTIDAD Si a es un número real cualquiera, entonces

$$a + 0 = a \quad \text{y} \quad a \cdot 1 = a.$$

Es decir, si 0 se suma a a, el resultado aún es a y si a se multiplica por 1, el resultado de nuevo es a. Por esta razón, los números 0 y 1 a menudo se conocen como **elementos identidad** para la adición y la multiplicación, respectivamente, porque no alteran número alguno bajo sus respectivas operaciones.

INVERSOS Si a es un número real arbitrario, entonces existe un único número real denominado el **negativo de *a*** (denotado por $-a$) tal que

$$a + (-a) = 0.$$

Si *a no es cero*, entonces también existe un único número real denominado el **recíproco de *a*** (denotado por a^{-1}) tal que

$$a \cdot a^{-1} = 1.$$

Obsérvese la similitud entre las dos definiciones: cuando $-a$ se suma a a, el resultado es el elemento identidad para la edición y cuando a^{-1} se multiplica por a, el resultado es el elemento identidad para la multiplicación. A menudo nos referiremos a $-a$ como el **inverso aditivo de *a*** y a a^{-1} como el **inverso multiplicativo de *a***. (Algunas veces a^{-1} se denomina simplemente **inverso de *a***.)

☛ **3.** ¿Cuáles propiedades de los números reales se utilizan en cada una de las igualdades siguientes?
(a) $x + 3x = 1x + 3x = (1 + 3)\,x = 4x$;
(b) $(2 + 1) + (-1) = 2 + [1 + (-1)] = 2 + 0 = 2$;
(c) $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$.

EJEMPLO 3

(a) El inverso aditivo de 3 es -3 dado que $3 + (-3) = 0$. El inverso aditivo de -3 es 3 puesto que $(-3) + 3 = 0$. Como el inverso aditivo de -3 se denota por $-(-3)$, se sigue que $-(-3) = 3$. En realidad, un resultado correspondiente vale para cualquier número real a:

$$-(-a) = a.$$

(b) El inverso multiplicativo de 3 es 3^{-1} dado que $3 \cdot 3^{-1} = 1$. El inverso multiplicativo de 3^{-1} sería denotado por $(3^{-1})^{-1}$ y estaría definido por el requerimiento de que $3^{-1} \cdot (3^{-1})^{-1} = 1$. Pero dado que $3^{-1} \cdot 3 = 1$, se sigue que $3(^{-1})^{-1}$ es igual a 3.

De nuevo este resultado puede generalizarse para cualquier número real a distinto de cero:

$$(a^{-1})^{-1} = a.$$

(*El inverso del inverso de* a *es igual a* a.)

Una vez que hemos definido los inversos aditivo y multiplicativo de a, podemos definir lo que entenderemos por las operaciones de *sustracción* y *división*. Definimos $a - b$ como el número $a + (-b)$, es decir, a más el negativo de b. De manera similar, definimos $a \div b$ como el número ab^{-1}, es decir, a multiplicado por el recíproco de b. La expresión $a \div b$ está definida sólo cuando $b \neq 0$. También se indica por la fracción a/b y tenemos que

Definición de $\frac{a}{b}$: $$\frac{a}{b} = ab^{-1}. \qquad (1)$$

Haciendo $a = 1$ en la ecuación (1), resulta que

$$\frac{1}{b} = 1 \cdot b^{-1} = b^{-1}.$$

De aquí, la fracción $1/b$ significa lo mismo que el inverso multiplicativo b^{-1}. Por ejemplo, $3^{-1} = \frac{1}{3}$. Por tanto, se sigue de la ecuación (1) que

$$\frac{a}{b} = a\left(\frac{1}{b}\right)$$

dado que $b^{-1} = 1/b$. ☛ **3**

Respuesta (a) propiedad del elemento idéntico multiplicativo y propiedad distributiva;
(b) propiedad asociativa, inverso aditivo y neutro aditivo;
(c) idéntico multiplicativo y definición de $\frac{1}{a}$.

EJEMPLO 4

(a) $\dfrac{7}{(\frac{1}{3})} = 7\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}$ (Ecuación (1), con $a = 7$ y $b = \frac{1}{3}$)

$= 7(3^{-1})^{-1} = 7(3) = 21$

Este resultado se extiende a cualesquiera pares de números reales a y b ($b \neq 0$):

$$\frac{a}{1/b} = ab.$$

(b) Para cualquier número real, $(-1)b = -b$. Esto se debe a que

$$\begin{aligned} b + (-1)b &= 1 \cdot b + (-1)b \\ &= [1 + (-1)]b && \text{(propiedad distributiva)} \\ &= 0 \cdot b = 0 \end{aligned}$$

Por tanto, $(-1)b$ debe ser el inverso aditivo de b, es decir $-b$.

$$\begin{aligned} \text{(c)}\quad a(-b) &= a[(-1)/b] && \text{(por la parte (b))} \\ &= (-1)(ab) && \text{(usando las propiedades asociativa y conmutativa)} \\ &= -(ab) \end{aligned}$$

Por ejemplo, $3(-7) = -(3 \cdot 7) = -21$.

$$\begin{aligned} \text{(d)}\quad 3(x - 2y) &= 3[x + (-2y)] && \text{(definición de sustracción)} \\ &= 3x + 3(-2y) && \text{(propiedad distributiva)} \\ &= 3x - [3(2y)] && \text{(de la parte (c))} \\ &= 3x - [(3 \cdot 2)y] && \text{(propiedad asociativa)} \\ &= 3x - 6y \end{aligned}$$

En general, la propiedad distributiva se extiende a expresiones con signos negativos. Por ejemplo,

$$a(b - c) = ab - ac.$$

De esa manera podemos resolver este ejemplo en forma directa.

$$3(x - 2y) = 3x - 3(2y) = 3x - 6y$$

Obsérvese que cuando una expresión dentro de paréntesis debe multiplicarse por una cantidad negativa, todo término dentro del paréntesis cambia de signo.

$$-(a + b) = (-1)(a + b) = (-1)a + (-1)b = -a - b$$

EJEMPLO 5

$$\begin{aligned} -2(x - 3y) &= (-2)x - (-2)(3y) \\ &= -2x + 6y \end{aligned}$$

Nótese que tanto x como $-3y$ que están dentro de los paréntesis cambian de signo, quedando como $-2x$ y $+6y$, respectivamente.

☛ **4.** ¿Están definidas las expresiones siguientes?

(a) $\dfrac{a}{b + (3b - 4b)}$;

(b) $\dfrac{b + (3b - 4b)}{a}$.

Respuesta (a) no; (b) sí, siempre y cuando $a \neq 0$.

Observación sobre la división entre cero. La afirmación $a/b = c$ es cierta si y sólo si la proposición inversa $a = b \cdot c$ es válida. Consideremos una fracción en la cual el denominador b es cero, tal como $\frac{3}{0}$. Ésta no puede ser igual a ningún número real c porque la afirmación inversa $3 = 0 \cdot c$ no puede ser válida para ningún real c. Por tanto $\frac{3}{0}$ no está bien definido. Asimismo, $\frac{0}{0}$ no es un número real bien definido porque la proposición inversa $0 = 0 \cdot c$ es válida para cada número real c. Así, concluimos que cualquier fracción con denominador cero no es un número real bien definido o, en forma equivalente, que **la división entre cero es una operación que carece de sentido**. Por ejemplo, $x/x = 1$ es cierto sólo si $x \neq 0$. ☛ **4**

EJERCICIOS 1-1

1. Establezca si cada una de las siguientes igualdades es válida o no. Reemplace cada proposición falsa por una que sea correcta.

a. $3x + 4x = 7x$ **b.** $(3x)(4x) = 7x$

c. $2(5 - 4y) = 10 - 4y$

d. $-(x + y) = -x + y$

e. $5x - (2 - 3x) = 2x - 2$

f. $5 - 2x = 3x$

g. $-3(x - 2y) = -3x - 6y$

h. $(-a)(-b)(-c) \div (-d) = -(abc \div d)$

i. $a \div (b \div c) = (ac) \div b$

j. $a - (b - c) = (a + c) - b$

k. $(-x)(-y) = -xy$

l. $\dfrac{-a}{-b} = \dfrac{a}{b}$

m. $\dfrac{0}{x} = 0$ para todos los números reales x

(2-60) Simplifique las expresiones siguientes.

2. $5 - (-3)$ **3.** $-7 - (-3)$

4. $5(-3)$ **5.** $(-3)(-7)$

6. $8 \div (-2)$ **7.** $(-9) \div (-3)$

8. $-(2 - 6)$ **9.** $-(-4 - 3)$

10. $(3)(-2)(-4)$ **11.** $(-5)(-3)(-2)$

12. $3(1 - 4)$ **13.** $2(-2 - 3)$

14. $-2(-4 - 2)$ **15.** $-4(3 - 6)$

16. $-6 - 2(-3 - 2)$ **17.** $3(x + 2y)$

18. $4(2x + z)$ **19.** $2(2x - y)$

20. $3(4z - 2x)$ **21.** $-(x - 6)$

22. $-(-x - 3)$ **23.** $3(x - 4)$

24. $2(-x - 3)$ **25.** $-2(-x - 2)$

26. $-4(x - 6)$ **27.** $-x(y - 6)$

28. $-x(-y - 6)$ **29.** $2(x - y) + 4x$

30. $3y + 4(x + 2y)$ **31.** $-2z - 3(x - 2z)$

32. $-4x - 2(3z - 2x)$ **33.** $(x + y) + 4(x - y)$

34. $3(y - 2x) - 2(2x - 2y)$ **35.** $5(7x - 2y) - 4(3y - 2x)$

36. $4(8z - 2t) - 3(-t - 4z)$ **37.** $x(-y)(-z)$

38. $(-x)(-y)(-z)$ **39.** $(-2)(-x)(x + 3)$

40. $(-x)(-y)(2 - 3z)$ **41.** $2(-a)(3 - a)$

42. $(-37\,p)(2q)(q - p)$ **43.** $x(-2)(-x - 4)$

44. $(-2x)(-3)(-y - 4)$ **45.** $-x(x - 2) + 2(x - 1)$

46. $-2(-3x)(-2y + 1) - (-y)(4 - 5x)$

47. $2x + 5 - 2(x + 2)$ **48.** $3x - t - 2(x - t)$

49. $2(x - y) - x$ **50.** $4x(x + y) - x^2$

51. $4[2(x + 1) - 3]$ **52.** $x[3(x - 2) - 2x + 1]$

53. $x[-3(-4 + 5) + 3]$

54. $4[x(2 - 5) - 2(1 - 2x)]$ **55.** $x^{-1}(x + 2)$

56. $x^{-1}(2x - 1)$ **57.** $(-2x)^{-1}(3x - 1)$

58. $(-3x)^{-1}(6 + 2x)$ **59.** $(xy)^{-1}(x + y)$

60. $(-xy)^{-1}(2x - 3y)$

■ 1-2 FRACCIONES

En la sección 1-1, vimos que la fracción a/b está definida como el producto de a y el inverso de b:

$$\frac{a}{b} = ab^{-1} \qquad (b \neq 0).$$

En particular,

$$\frac{1}{b} = b^{-1}.$$

Con base en la definición anterior es posible deducir todas las propiedades que se usan al manejar fracciones. En esta sección nos detendremos un poco a examinar este tipo de operaciones.*

Multiplicación de fracciones

El producto de dos fracciones se obtiene multiplicando en primer término los dos numeradores y luego los dos denominadores.

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ac}{bd}}$$

EJEMPLO 1

(a) $\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{5}{9}\right) = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 9} = \frac{10}{27}$

(b) $\left(\frac{2x}{3}\right)\left(\frac{4}{y}\right) = \frac{(2x)4}{3 \cdot y} = \frac{8x}{3y}$

(c) $3x\left(\frac{4}{5y}\right) = \left(\frac{3x}{1}\right)\left(\frac{4}{5y}\right) = \frac{(3x) \cdot 4}{1 \cdot (5y)} = \frac{12x}{5y}$ ☛ **5**

☛ **5.** Evalúe (a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{3}$; (b) $\frac{x}{2} \cdot \frac{7}{5}$.

Respuesta (a) $\frac{14}{9}$; (b) $\frac{7x}{10}$.

División de fracciones

Con el propósito de dividir una fracción entre otra, la segunda fracción se invierte y después se multiplica por la primera. En otras palabras,

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right) \div \left(\frac{c}{d}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{d}{c}\right) = \frac{ad}{bc}.}$$

*Las demostraciones de las propiedades que aparecen en recuadros se dan como una serie de teoremas al final de esta sección.

EJEMPLO 2

(a) $\left(\frac{3}{5}\right) \div \left(\frac{7}{9}\right) = \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{9}{7}\right) = \frac{27}{35}$

(b) $\left(\frac{3x}{2}\right) \div \left(\frac{4}{y}\right) = \left(\frac{3x}{2}\right)\left(\frac{y}{4}\right) = \frac{3xy}{8}$

(c) $5y \div \left(\frac{6}{5x}\right) = \left(\frac{5y}{1}\right)\left(\frac{5x}{6}\right) = \frac{25xy}{6}$

(d) $\left(\frac{3}{2x}\right) \div (2y) = \left(\frac{3}{2x}\right) \div \left(\frac{2y}{1}\right) = \left(\frac{3}{2x}\right)\left(\frac{1}{2y}\right) = \frac{3}{4xy}$

(e) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = 1 \div \left(\frac{a}{b}\right) = 1 \cdot \frac{b}{a} = \frac{b}{a}$

☛ **6.** Evalúe

(a) $\frac{2}{3} \div \frac{3}{2}$; (b) $\frac{x}{2} \div \frac{7}{5}$.

(Es decir, el recíproco de cualquier fracción se obtiene intercambiando el numerador y el denominador de la fracción.) ☛ **6.**

En vista de este último resultado, podemos reescribir la regla anterior para la división: *para dividir entre una fracción, debe multiplicar por su recíproco*.

Cancelación de factores comunes

El numerador y el denominador de cualquier fracción pueden multiplicarse o dividirse por un número real cualquiera *distinto de cero*, sin alterar el valor de la fracción.

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc} \quad (c \neq 0)$$

EJEMPLO 3

(a) $\frac{a}{b} = \frac{2a}{2b}$

(b) $\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{9}{15} = \frac{-12}{-20} = \cdots$

(c) $\frac{5x}{6} = \frac{10x2}{12x}$ (con tal que $x \neq 0$)

Esta propiedad de las fracciones puede usarse con el fin de reducir una fracción a su **mínima expresión**, lo que significa dividir al numerador y al denominador por todos los factores comunes. (Esto se llama también **simplificación de la fracción**.)

Respuesta (a) $\frac{4}{9}$; (b) $\frac{5x}{14}$.

EJEMPLO 4

$$\text{(a)}\ \frac{70}{84} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7} = \frac{\cancel{2} \cdot 5 \cdot \cancel{7}}{\cancel{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cancel{7}} = \frac{5}{2 \cdot 3} = \frac{5}{6}$$

Obsérvese que tanto el numerador como el denominador se escriben primero en términos de sus factores primos y luego el numerador y el denominador se dividen por aquellos factores que son comunes a ambos números, como el 2 y el 7. (Este proceso algunas veces se denomina *cancelación*.)

$$\text{(b)}\ \frac{6x^2y}{8xy^2} = \frac{2 \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot y}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot x \cdot y \cdot y} = \frac{\cancel{2} \cdot 3 \cdot \cancel{x} \cdot x \cdot \cancel{y}}{\cancel{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cancel{x} \cdot y \cdot \cancel{y}} = \frac{3x}{4y}$$

$$(xy \neq 0)$$

En este ejemplo, el numerador y el denominador fueron divididos entre $2xy$ en la simplificación.

$$\text{(c)}\ \frac{2x(x+1)}{4y(x+1)} = \frac{x}{2y} \qquad (x + 1 \neq 0)$$

☛ **7.** Evalúe
(a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{15}{4}$, (b) $\frac{x}{2} \div \frac{3x}{8y}$

Aquí el factor común $2(x + 1)$ fue cancelado del numerador y del denominador. ☛ **7**

Adición y sustracción de fracciones

Cuando dos fracciones tienen un común denominador, pueden sumarse simplemente sumando sus numeradores.

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

Una regla similar se aplica a la sustracción:

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}.$$

EJEMPLO 5

$$\text{(a)}\ \frac{5}{12} + \frac{11}{12} = \frac{5+11}{12} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

$$\text{(b)}\ \frac{3}{2x} - \frac{5}{2x} = \frac{3-5}{2x} = \frac{-2}{2x} = -\frac{1}{x}$$

(Nótese la cancelación de factores comunes al llegar a las respuestas finales.)

Cuando dos fracciones con denominadores distintos deben sumarse o restarse, las fracciones deben en primer lugar reescribirse con el mismo denominador.

Respuesta (a) $\frac{5}{2}$; (b) $\frac{4y}{3}$.

☛ **8.** En cada caso, ¿cuál es mínimo común denominador?

(a) $\frac{2}{3}$ y $\frac{5}{6}$; (b) $\frac{1}{2xy}$ y $\frac{x}{8y}$.

Respuesta (a) 6. (b) $8xy$.

EJEMPLO 6 Simplique:

(a) $\frac{5}{6} + \frac{1}{2}$; (b) $\frac{5}{6} - \frac{3}{4}$.

Solución

(a) Podemos escribir $\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{3}{6}$. Entonces ambas fracciones tienen el mismo denominador, de modo que podemos sumarlas.

$$\frac{5}{6} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5+3}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

(b) En la parte (a), multiplicamos el numerador y el denominador de $\frac{1}{2}$ por 3 para obtener un denominador igual al de la otra fracción. En esta parte, ambas fracciones deben modificarse para que tengan un factor común. Escribimos

$$\frac{5}{6} = \frac{10}{12} \quad \text{y} \quad \frac{3}{4} = \frac{9}{12}.$$

Por tanto,

$$\frac{5}{6} - \frac{3}{4} = \frac{10}{12} - \frac{9}{12} = \frac{10-9}{12} = \frac{1}{12}.$$

En general, cuando sumamos o restamos fracciones con denominadores diferentes, primero reemplazamos cada fracción por una equivalente que tenga un denominador común. Con el propósito de mantener los números tan pequeños como sea posible, elegimos el más pequeño de tales denominadores comunes, denominado el **mínimo común denominador** (m.c.d.). Aún obtendríamos la respuesta correcta utilizando un denominador comun más grande, pero es preferible usar el mínimo denominador posible. Por ejemplo, en la parte (b) del ejemplo 6, pudimos emplear 24 como un denominador común:

$$\frac{5}{6} - \frac{3}{4} = \frac{20}{24} - \frac{18}{24} = \frac{20-18}{24} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}.$$

La respuesta final es la misma, pero habríamos tenido que trabajar con números más grandes.

Para calcular el m.c.d. de dos o más fracciones, los denominadores deben escribirse en términos de sus factores primos. El m.c.d. se forma entonces tomando todos los factores primos que aparezcan en cualquiera de los denominadores. Cada uno de tales denominadores debe incluirse tantas veces como ocurra en cualquiera de los denominadores. Por ejemplo, el m.c.d. de $\frac{5}{6}$ y $\frac{3}{4}$, se encuentra escribiendo los denominadores en la forma $6 = 2 \cdot$ y $4 = 2 \cdot 2$. Los factores primos que ocurren son 2 y 3, pero 2 aparece dos veces en un denominador. De modo que el m.c.d. es $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$.

Como un segundo ejemplo, consideremos el m.c.d. de $5/12x$ y $7/10x^2y$. Escribimos

$$12x = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x \quad \text{y} \quad 10x^2y = 2 \cdot 5 \cdot x \cdot x \cdot y.$$

Tomando cada factor el mayor número de veces que aparezca, tenemos que

$$\text{m.c.d.} = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x \cdot x \cdot y = 60x^2y.$$ ☛ **8**

EJEMPLO 7 Simplifique:

(a) $\frac{x}{6} + \frac{3y}{4}$; (b) $\frac{1}{9x} - \frac{1}{6}$; (c) $\frac{a}{c} + \frac{b}{d}$;

(d) $\dfrac{4a}{5b - \dfrac{b}{3}}$; (e) $3x \div \left(\frac{1}{3x^2} - \frac{3}{4xy}\right)$

Solución

(a) El m.c.d. es 12.

$$\frac{x}{6} = \frac{2x}{12} \quad \text{y} \quad \frac{3y}{4} = \frac{3(3y)}{12} = \frac{9y}{12}$$

Por tanto

$$\frac{x}{6} + \frac{3y}{4} = \frac{2x}{12} + \frac{9y}{12} = \frac{2x + 9y}{12}$$

(b) El m.c.d. en este caso es $18x$, de modo que

$$\frac{1}{9x} = \frac{2}{18x} \quad \text{y} \quad \frac{1}{6} = \frac{3x}{18x}.$$

Entonces

$$\frac{1}{9x} - \frac{1}{6} = \frac{2}{18x} - \frac{3x}{18x} = \frac{2 - 3x}{18x}.$$

(c) El m.c.d. es cd.

☛ **9.** Evalúe y simplifique

(a) $\frac{2}{3} + \frac{5}{4}$; (b) $\frac{x}{2y} - \frac{7x}{8y}$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad}{cd} + \frac{bc}{cd} = \frac{ad + bc}{cd}$$ ☛ **9**

(d) Aquí tenemos una fracción cuyo denominador a su vez incluye una fracción. Primero simplificamos el denominador:

$$5b - \frac{b}{3} = \frac{15b - b}{3} = \frac{14b}{3}.$$

Entonces la expresión dada es

$$\frac{4a}{14b/3} = 4a\left(\frac{14b}{3}\right)^{-1} = 4a\left(\frac{3}{14b}\right) = \frac{6a}{7b}.$$

(e) Primero simplificamos la expresión que se encuentra entre paréntesis. El mínimo común denominador es $12x^2y$.

$$\frac{1}{3x^2} - \frac{3}{4xy} = \frac{4y}{12x^2y} - \frac{9x}{12x^2y} = \frac{4y - 9x}{12x^2y}.$$

Respuesta (a) $\frac{23}{12}$; (b) $-\frac{3x}{8y}$.

Por tanto la expresión dada es igual a

$$3x \div \left(\frac{4y - 9x}{12x^2y}\right) = \frac{3x}{1} \cdot \frac{12x^2y}{4y - 9x} = \frac{36x^3y}{4y - 9x}$$

(en donde $x^3 = x \cdot x^2 = x \cdot x \cdot x$).

Demostraciones de los teoremas

Concluimos esta sección demostrando las propiedades básicas de las fracciones que hemos utilizado en los ejemplos anteriores.

TEOREMA 1

$$\left(\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{d}\right) = \frac{1}{bd}$$

DEMOSTRACIÓN Por definición, $\left(\frac{1}{b}\right) = b^{-1}$ y $\left(\frac{1}{d}\right) = d^{-1}$, de modo que

$$\left(\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{d}\right) = b^{-1}\, d^{-1}.$$

Como,

$$\begin{aligned}(b^{-1}\, d^{-1})\,(bd) &= (b^{-1}\, b) \cdot (d^{-1}\, d) \qquad \text{(usando las propiedades asociativa y conmutativa)}\\ &= 1 \cdot 1 = 1.\end{aligned}$$

Por tanto $b^{-1}\, d^{-1}$ debe ser el inverso multiplicativo de db, es decir,

$$b^{-1}\, d^{-1} = \frac{1}{bd}.$$

como se requería.

Observación Este resultado puede reescribirse en la forma $(bd)^{-1} = b^{-1}\, d^{-1}$.

TEOREMA 2

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ac}{bd}$$

DEMOSTRACIÓN

$$\frac{a}{b} = ab^{-1} = a\left(\frac{1}{b}\right)$$

y también

$$\frac{c}{d} = c\left(\frac{1}{d}\right).$$

Por tanto, usando las propiedades conmutativa y asociativa, podemos escribir

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) &= a\left(\frac{1}{b}\right)\cdot c\left(\frac{1}{d}\right) = ac\cdot\left(\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{d}\right)\\ &= ac\left(\frac{1}{bd}\right) \qquad \text{(por el teorema 1)}\\ &= \frac{ac}{bd}\end{aligned}$$

como se pedía.

TEOREMA 3

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$$

DEMOSTRACIÓN Por definición, $a/b = ab^{-1}$. Por tanto, por el teorema 1,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = (ab^{-1})^{-1} = a^{-1}(b^{-1})^{-1}.$$

Pero $(b^{-1})^{-1} = b$, de modo que

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = a^{-1}b = ba^{-1} = \frac{b}{a}$$

como se requería.

TEOREMA 4

$$\left(\frac{a}{b}\right) \div \left(\frac{c}{d}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{d}{c}\right)$$

DEMOSTRACIÓN Por definición, $x \div y = xy^{-1}$. Por tanto, tenemos las igualdades:

$$\left(\frac{a}{b}\right) \div \left(\frac{c}{d}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{c}{d}\right)^{-1} = \left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{d}{c}\right) \quad \text{(por el teorema 3)}$$

TEOREMA 5

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc} \qquad (c \neq 0)$$

DEMOSTRACIÓN Para cualquier $c \neq 0$, la fracción $c/c = 1$, puesto que, por definición $c/c = cc^{-1}$. Por tanto, por el teorema 2,

$$\frac{ac}{bc} = \left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{c}{c}\right) = \frac{a}{b}\cdot 1 = \frac{a}{b}$$

como se pedía.

TEOREMA 6

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c} \qquad (c \neq 0)$$

DEMOSTRACIÓN Por definición,

$$\frac{a}{c} = ac^{-1} \quad \text{y} \quad \frac{b}{c} = bc^{-1}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \frac{a}{c} + \frac{b}{c} &= ac^{-1} + bc^{-1} = (a + b)c^{-1} \qquad \text{(por la propiedad distributiva)} \\ &= \frac{a + b}{c} \end{aligned}$$

como se requería.

EJERCICIOS 1-2

1. Establezca si cada una de las igualdades siguientes es válida o no. Reemplace cada proposición falsa por una verdadera.

a. $\frac{3}{x} + \frac{4}{x} = \frac{7}{x}$

b. $\frac{x}{3} + \frac{x}{4} = \frac{x}{7}$

c. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a + c}{b + d}$

d. $\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right) = \frac{ace}{bdf}$

e. $\left(\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}\right) \div \frac{e}{f} = \frac{adf}{bce}$

f. $\frac{a}{b} \div \left(\frac{c}{d} \div \frac{e}{f}\right) = \frac{adf}{bce}$

g. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a + b}$

h. $\frac{\cancel{x}}{\cancel{x} + y} = \frac{1}{1 + y}$

i. $\frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} = \frac{6 \cdot 9 + 7 \cdot 8}{7 \cdot 9}$

j. $\frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5}{2 + 4 + 6 + 8 + 10} = \frac{1}{2}$

(2-58) Evalúe cada una de las expresiones siguientes. Escriba las respuestas en los términos más simples.

2. $\frac{2}{9} \cdot \frac{6}{5}$

3. $\left(\frac{8}{3}\right)\left(\frac{15}{4}\right)$

4. $\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{5} \cdot \frac{4}{9}$

5. $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{10}{7}$

6. $\left(\frac{3x}{25}\right)\left(\frac{25}{9x}\right)$

7. $\left(\frac{14x}{15y}\right)\left(\frac{25y}{24}\right)$

8. $7x^2\left(\frac{6y}{21x}\right)$

9. $\left(-\frac{2x}{3y}\right)(-5xy)$

10. $\left(\frac{18}{11}\right) \div \left(\frac{8}{33}\right)$

11. $\left(\frac{14}{3}\right) \div \left(\frac{6}{15}\right)$

12. $\frac{4}{9} \div \left(\frac{2}{3} \cdot 8\right)$

13. $\left(\frac{12}{25} \cdot \frac{15}{7}\right) \div \frac{20}{7}$

14. $\left(\frac{7x}{10}\right) \div \left(\frac{21x}{5}\right)$

15. $(2x) \div \left(\frac{3xy}{5}\right)$

16. $4 \div \left(\frac{8}{9x}\right)$

17. $\left(\frac{3}{8x}\right) \div \left(\frac{4x}{15}\right)$

18. $\left(\frac{3x^2}{20} \cdot 4y\right) \div \left(\frac{6xy}{25}\right)$

19. $\left(\frac{5x}{2} \cdot \frac{3y}{4}\right) \div \left(\frac{x^2y}{12}\right)$

20. $8xy \div \left(\frac{2x}{3} \cdot \frac{2x}{5y}\right)$

21. $6x^2 \div \left(\frac{4x}{y} \cdot \frac{3y^2}{2}\right)$

22. $\left(\frac{8}{9t} \div \frac{1}{3st}\right) \cdot \frac{s}{4}$

23. $\left(\frac{3}{4xy} \div \frac{x}{y}\right) \cdot \frac{2xy}{9}$

24. $\left(\frac{2}{x} \div \frac{z}{2}\right) \div \frac{4}{z}$

25. $\left(\frac{2xt}{3} \div \frac{x}{4t}\right) \div \frac{2t}{3}$

26. $\frac{2}{z} \div \left(\frac{z}{2} \div \frac{4}{z}\right)$

27. $\frac{2xt}{3} \div \left(\frac{x}{4t} \div \frac{2t}{3}\right)$

28. $\frac{1}{6} - \frac{1}{2}$

29. $\frac{1}{10} + \frac{1}{15}$

30. $\frac{4x}{5} - \frac{x}{10}$

31. $\frac{1}{x} + \frac{1}{2x}$

32. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3}$

33. $\frac{y}{2x} + \frac{1}{3x}$

34. $\frac{a}{6b} - \frac{a}{2b}$

35. $\frac{a}{6b} + \frac{2a}{9b}$

36. $\frac{7}{6x} + \frac{3}{4x^2}$

37. $\frac{3y}{10x^2} - \frac{1}{6x}$

38. $\frac{x}{p^2} + \frac{y}{pq}$

39. $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$

40. $\frac{x}{y} - \frac{y}{x}$

41. $\frac{x^2}{3y} + 4y$

42. $\frac{1}{6} + \left(\frac{2}{x} + \frac{x}{2}\right)$

43. $\frac{1}{6} - \left(\frac{2}{x} - \frac{x}{2}\right)$

44. $\frac{a}{3b} - 2\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{2a}\right)$

45. $\left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right) \div \left(\frac{6}{x}\right)$

46. $\left(\frac{x}{9y} + \frac{1}{6xy}\right) \div \left(\frac{1}{3xy}\right)$

47. $\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{5}\right) \div \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right)$

48. $\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{12}\right) \cdot \left(\frac{7}{10} + \frac{1}{4}\right)$

49. $\dfrac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{5}}$

50. $\dfrac{\frac{8}{5} + \frac{2}{3}}{2 + \frac{4}{7}}$

51. $\dfrac{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{5} - \frac{1}{6}}$

52. $\dfrac{2 - \frac{3}{4}}{3 + \frac{1}{8}}$

53. $\dfrac{7x - \dfrac{2x}{3}}{15y - \dfrac{y}{3}}$

54. $\dfrac{\dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{3x}}{\dfrac{1}{4y} - \dfrac{1}{5y}}$

55. $\dfrac{\left(\dfrac{2a}{3b}\right)\left(\dfrac{4b}{5}\right) + a}{2b + \dfrac{b}{15}}$

56. $\dfrac{\left(\dfrac{5p}{2q}\right)\left(\dfrac{p}{3}\right) + \dfrac{p^2}{8q}}{4p + \dfrac{p}{12}}$

57. $\left(\frac{a}{b} + \frac{2a}{3b}\right) \div \left[\left(\frac{3x}{8}\right) \div \left(\frac{x}{9}\right) + \frac{1}{4}\right]$

58. $\left(\frac{xy}{6}\right) \div \left[\left(\frac{2}{3}\right) \div \left(\frac{x}{6}\right) - \frac{3x}{4}\right]$

■ 1-3 EXPONENTES

Si m es un *entero positivo*, entonces a^m (léase a a la *potencia* m o la m*-ésima potencia de* a) se define como el producto de m factores a multiplicados a la vez. Por lo que

$$a^m = a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a.$$

En este producto, el factor a aparece m veces. Por ejemplo,

$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ (cuatro factores de 2)
$3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$ (cinco factores de 3).

En la expresión a^m, m se llama la **potencia** o **exponente** y a la **base**. Así en 2^4 (la cuarta potencia de 2), 2 es la base y 4 es la potencia o exponente; en 3^5, 3 es la base y 5 el exponente. Esta definición de a^m cuando el exponente es un entero positivo es válida para todos los valores reales de a.

Obsérvese el patrón en la tabla 1, en la cual se dan varias potencias de 5 en orden decreciente. Tratemos de completar la tabla. Notemos que cada vez que el exponente disminuye en 1, el número de la derecha se *divide* entre 5.

Esto sugiere que la tabla se completaría continuando la división entre 5 con cada reducción del exponente. De esta manera llegamos a las igualdades siguientes:

TABLA 1

5^4	625
5^3	125
5^2	25
5^1	5
5^0	?
5^{-1}	?
5^{-2}	?
5^{-3}	?
5^{-4}	?

$$5^1 = 5 \qquad 5^0 = 1 \qquad 5^{-1} = \frac{1}{5} = \frac{1}{5^1}$$

$$5^{-2} = \frac{1}{25} = \frac{1}{5^2} \qquad 5^{-3} = \frac{1}{125} = \frac{1}{5^3} \qquad 5^{-4} = \frac{1}{625} = \frac{1}{5^4}$$

Este patrón en forma natural nos conduce a la definición siguiente de a^m en el caso de que el exponente m sea cero o un número negativo.

DEFINICIÓN Si $a \neq 0$, entonces $a^0 = 1$ y si m es un entero *positivo* cualquiera (de modo que $-m$ es un entero *negativo*),

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}.$$

Por ejemplo, $4^0 = 1$, $\left(\frac{3}{7}\right)^0 = 1$, $(-5)^0 = 1$, etc. Asimismo,

☛ **10.** Evalúe

(a) $(-\frac{1}{5})^0$; (b) $(-\frac{1}{2})^{-3}$

$$3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81} \quad \text{y} \quad (2)^{-5} = \frac{1}{(-2)^5} = \frac{1}{-32} = -\frac{1}{32}.$$ ☛ **10**

De estas definiciones, es posible establecer una serie de propiedades denominadas las **leyes de los exponentes**, las cuales se enuncian a continuación.

Propiedad 1

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Esto es, *cuando dos potencias de una base común se multiplican, el resultado es igual a la base elevada a la suma de los dos exponentes*. Este resultado vale para cualquier número real a, excepto en el caso de que m o n sea negativo, requerimos que $a \neq 0$.

EJEMPLO 1

(a) $5^2 \cdot 5^3 = 5^{2+3} = 5^5$

Podemos verificar que esto sea correcto desarrollando las dos potencias del producto.

Respuesta (a) 1; (b) $-2^3 = -8$.

$$5^2 \cdot 5^3 = (5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5) = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^5$$