3

ALGUNAS DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

3.1 INTRODUCCIÓN

La estadística inferencial tiene como problema general establecer las propiedades de un fenómeno aleatorio estudiando una parte del mismo. Para esto es necesario conocer la distribución de probabilidad de la variable aleatoria que se está estudiando. Esto puede ser complicado si no existe otra alternativa que deducir teóricamente la función de probabilidad. Afortunadamente, existen numerosos modelos de probabilidad muchos de los cuales, aunque hayan sido generados con otros fines, pueden ser usados para describir el comportamiento de la mayoría de las variables aleatorias que son estudiadas en las ciencias naturales.
Los modelos de distribuciones de probabilidad se clasifican de acuerdo a la naturaleza de la variable aleatoria en modelos probabilísticos discretos y en modelos probabilísticos continuos. En éste capítulo se estudiarán algunas distribuciones de probabilidad importantes para la aplicación de los métodos de inferencia estadística, como son la distribuciones Binomial, de Poisson y Normal. Otras distribuciones valiosas como las de T, de F y χ^2 se estudiaran en el momento que se requiera su uso. En este punto es necesario enfatizar que el esfuerzo que se haga en entender las propiedades de estos modelos permitirá, por una parte, comprender mejor el funcionamiento de los métodos de inferencia estadística y por otro lado, contar con más y mejores criterios para elegir el modelo apropiado en la aplicación de algún método estadístico.

3.2 MODELOS PROBABILÍSTICOS DISCRETOS

3.2.1. Distribución de Bernoulli. Una gran cantidad de situaciones que se presentan en distintos campos de acción, tienen en común algunas cosas. Veamos algunos ejemplos:

a) Lanzar una moneda y determinar si sale cara en cada lanzamiento
b) Lanzar un dado y verificar cada vez si sale un número par.
c) Elegir aleatoriamente un individuo y determinar su sexo.
d) Determinar en una solución si el pH es básico.
e) Determinar si un individuo elegido al azar está enfermo.
f) Verificar para una sustancia su naturaleza orgánica.
g) Determinar si un elemento es metálico.
h) Verificar si un objeto o cosa es defectuoso.

Todos estos experimentos y otros similares reciben el nombre genérico de *Ensayos de Bernoulli*, por tener las características siguientes:

1) Cada vez que se repite el experimento se producen dos resultados mutuamente excluyentes: sale cara o sello, numero par o impar, individuos machos o hembras, Ph > 7 o Ph ≤ 7, individuos enfermos o sanos, sustancias orgánicas o inorgánicas, metales o no metales, objetos buenos o defectuosos. Estos resultados de dos clases se identifican de forma general como éxito y fracaso.

2) Cada vez que se repite el experimento la probabilidad de ocurrencia del éxito (p) o del fracaso (q = 1-p) no cambian. En los ejemplos citados se cumple esta condición: la probabilidad de encontrar una cara (p = 1/2) es la misma cada vez que se lanza la moneda, la probabilidad de obtener un número par no cambia en sucesivos lanzamientos del dado. Del experimento c en adelante, si el muestreo es con reposición y las condiciones del experimento no se alteran, la probabilidad de ocurrencia de los eventos estudiados se mantiene constante.

3) Los resultados son independientes. El hecho de que ocurra un fracaso o un éxito, no afecta la probabilidad de ocurrencia de un nuevo resultado al repetir el experimento.

El espacio muestral general para los distintos ensayos de Bernoulli está formado por dos resultados: el éxito (E) y el fracaso (F).

$$S = \{F, E\}$$

Conocido el espacio muestral, es posible definir una variable aleatoria que le asigne valores a estos dos resultados. Por ejemplo la variable **X** = número de éxitos, genera el rango espacial siguiente:

$$Rx = \{0, 1\}$$

Igualmente es posible encontrar una función que le asigne valores de probabilidad a éstos resultados. Para tal fin la probabilidad del éxito (p) y la probabilidad del fracaso (1-p), se pueden representar de la forma siguiente:

$P(\mathbf{X} = 0) = p^0(1-p)^1$

$P(\mathbf{X} = 1) = p^1(1-p)^0$

De lo cual se deduce que la expresión matemática de la función de probabilidad para la distribución de Bernoulli es la siguiente

$$P(\mathbf{X} = x_i) = p(x) = p^x (1-p)^{1-x}$$

El valor esperado y la varianza de esta distribución son: $E(x) = p$ y $\sigma^2 = pq$ respectivamente.

3.2.2. Distribución binomial. Un experimento binomial consta de varios ensayos de Bernoulli, algunos ejemplos son los siguientes:

a) Lanzar una moneda n veces y determinar si sale cara en cada lanzamiento
b) Lanzar un dado n veces y verificar cada vez si sale un número par.
c) Determinar el sexo de cada uno de n individuos.
d) Medir en cada una de n soluciones si el pH es básico.
e) Determinar en cada uno de n individuos si están sanos o enfermos.
f) Verificar para cada una de n sustancias su naturaleza orgánica.
g) Determinar si cada uno de n elementos son metales.
h) Verificar si cada uno de n objetos son defectuosos.

El examen de los ejemplos anteriores deja ver que en cada repetición del experimento se mantienen las propiedades de los ensayos de Bernoulli y que la variable aleatoria característica de los mismos es el número de veces que ocurre el éxito (o el fracaso) en n repeticiones del experimento. La función de probabilidad para este tipo de variable, la vamos a deducir a través del ejemplo siguiente:

Ejemplo 3.2.1. En una investigación de cierta parasitosis, pequeñas dosis de una vacuna experimental les son inyectadas a ratones de laboratorio. Los resultados encontrados demuestran que por lo general 4 de cada 20 ratones mueren a causa de la vacuna. Si se le aplica la misma dosis de la vacuna a cinco ratones ¿cuál es la probabilidad que mueran x de estos animales?

En primer lugar debemos verificar que se trata de un ensayo de Bernoulli:

- Tiene dos resultados posibles: ratón muere (éxito); ratón sobrevive (fracaso). El significado del éxito en éste caso tiene una connotación simplemente estadística, porque para el objetivo de la investigación y de la ética científica no puede ser un éxito el que muera un ratón.

- La probabilidad del éxito p = 1/5 y del fracaso q = 4/5, no cambian en cada aplicación de la dosis.

- El experimento se repitió cinco veces (n = 5).

La variable aleatoria y su rango espacial en éste ejemplo son los siguientes:

X = número de ratones que mueren

$$Rx = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

Se desea determinar la probabilidad de que la variable aleatoria asuma uno de los valores x del rango espacial. En realidad lo que se desea encontrar es la función de probabilidad de la variable aleatoria. Con éste propósito, consideremos que el éxito (morir) ocurre x veces en los n ensayos y no ocurre en los n-x restantes. Para facilitar la comprensión, supongamos que mueren tres ratones de modo que x = 3 y n-x = (5-3) = 2. Además supongamos que la muerte de los ratones ocurrió en el orden *mmmss*, siendo *m* el evento morir y *s* el evento sobrevivir.

Como se trata de ensayos independientes, la probabilidad de éste único resultado es el producto de las probabilidades particulares:

$$P(mmmss) = pppqq = p^3q^2 = p^xq^{n-x}$$

siendo p = probabilidad de morir = 1/5 y q = probabilidad de sobrevivir = 4/5

Ahora bien es necesario considerar que la muerte de tres ratones puede ocurrir en secuencias diferentes. Las diferentes maneras o secuencias como puede ocurrir la muerte de tres ratones son las siguientes:

mmmss; mmsms; msmms; smmms; mmssm; msmsm; smmsm; smsmm; ssmmm; mssmm

La probabilidad para cada uno de estos eventos siempre será la misma

$$\begin{aligned}
P(mmmss) &= pppqq = p^3q^2\\
P(mmsms) &= ppqpq = p^3q^2\\
P(msmms) &= pqppq = p^3q^2\\
P(smmms) &= qpppq = p^3q^2\\
P(mmssm) &= ppqqp = p^3q^2\\
P(msmsm) &= pqpqp = p^3q^2\\
P(smmsm) &= qppqp = p^3q^2\\
P(smsmm) &= qpqpp = p^3q^2\\
P(ssmmm) &= qqppp = p^3q^2\\
P(mssmm) &= pqqpp = p^3q^2
\end{aligned}$$

La probabilidad de que mueran tres ratones Serra igual a la suma de las probabilidades con la cual ocurre cada secuencia individual.

$$P(X = 3) = P(mmmss) + P(mmsms) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + P(ssmmm) + P(mssmm) = 10\ p^3q^2$$

$$P(X = 3) = 10\ (1/5)^2(4/5)^3 = 0.2084$$

Sin embargo la pregunta inicial era ¿cuál es la probabilidad que mueran x de estos animales?. Es decir que se deseaba conocer la probabilidad de que mueran 0, 1, 2, 3, 4 ó 5 al vacunar cinco ratones. En éste caso se puede hacer más general el cálculo de probabilidad, expresando la ecuación anterior en la forma siguiente:

$$P(X = x) = (\text{Número de maneras como ocurre cada tipo de resultado})\ p^xq^{n-x}$$

La fórmula anterior pierde todo sentido práctico si cada vez que se necesite calcular la probabilidad de que un evento ocurra x veces en n repeticiones se tienen que determinar las diferentes maneras como puede ocurrir un resultado particular. Si en el ejemplo de la vacuna se hubiesen vacunado 10 ratones en lugar de 5, el número de secuencias diferentes como se

pueden organizar los resultados se eleva de 10 a 120, esto por sí sólo ya es bastante complicado. Afortunadamente los denominados métodos de enumeración ofrecen una solución para calcular el número de ordenamiento que se puede originar, aunque no conozcamos individualmente cada resultado. El número de conjuntos con secuencias diferentes viene dado por la formulación siguiente:

$$ {}_{n}P_{x,n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} $$

La expresión que ${}_{n}P_{x,\, n-x}$, se lee como el número de permutaciones de n elementos diferentes, siendo x elementos de una clase (ratones que mueren) y n – x de otra clase (ratones que sobreviven). En consecuencia, la formulación general para calcular la probabilidad de tener x éxitos en n repeticiones es la siguiente:

$$ P(X = x) = {}_{n}P_{(x,\, n-x)} p^{x} q^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^{x} q^{n-x} $$

Puesto que, ${}_{n}P_{(x,\, n-x)} = {}_{n}C_{x}$, el número de permutaciones diferentes de n elementos, cuando x son de una clase y n-x de otra clase, es igual al número de combinaciones de n elementos diferentes tomados de x en x, la ecuación general anterior es comúnmente expresada en la forma siguiente:

$$ P(X = x) = {}_{n}C_{x}\, p^{x} q^{n-x} $$

Esta expresión no es otra cosa sino la función de probabilidad de la variable aleatoria X = número de éxitos en n repeticiones de un experimento. De modo que se puede usar esta función para calcular la probabilidad de que mueran x ratones cuando son vacunados cinco de ellos.

$P(X = 0) = p(0) = {}_{5}C_{0}\, p^{0} q^{5-0} = [5!/0!(5-0)!](1/5)^{0}(4/5)^{5} = (1)(1)(0.3237) = 0.3277$
$P(X = 1) = p(1) = {}_{5}C_{1}\, p^{1} q^{5-1} = [5!/1!(5-1)!](1/5)^{1}(4/5)^{4} = (5)(0.20)(0.4096) = 0.4096$
$P(X = 2) = p(2) = {}_{5}C_{2}\, p^{2} q^{5-2} = [5!/2!(5-2)!](1/5)^{2}(4/5)^{3} = (10)(0.04)(0.5120) = 0.2084$
$P(X = 3) = p(3) = {}_{5}C_{3}\, p^{3} q^{5-3} = [5!/3!(5-3)!](1/5)^{3}(4/5)^{2} = (10)(0.008)(0.64) = 0.0512$
$P(X = 4) = p(4) = {}_{5}C_{4}\, p^{04} q^{5-4} = [5!/4!(5-4)!](1/5)^{4}(4/5)^{1} = (5)(0.0016)(0.8) = 0.0064$
$P(X = 5) = p(5) = {}_{5}C_{5}\, p^{5} q^{5-5} = [5!/5!(5-5)!](1/5)^{5}(4/5)^{0} = (1)(0.0003)(1) = 0.0003$

El conjunto de pares ordenados $[x_i;\ p(x_i)]$ generan la distribución binomial, el nombre de binomial nombre que se le da, porque los sucesivos términos de la distribución de probabilidad son semejantes a los obtenidos con la expansión del Binomio de Newton: $(p+q)^{n}$.

El hecho de que una variable aleatoria se distribuya binomialmente se puede indicar de la manera siguiente: **X**:b(n,p), lo cual indica que una variable aleatoria **X** se distribuye en forma binomial con parámetros n y p. La distribución binomial no tiene una sola forma. Para cada combinación de valores diferente de n y/o p existe una forma particular de la distribución binomial (Figura 3.1).

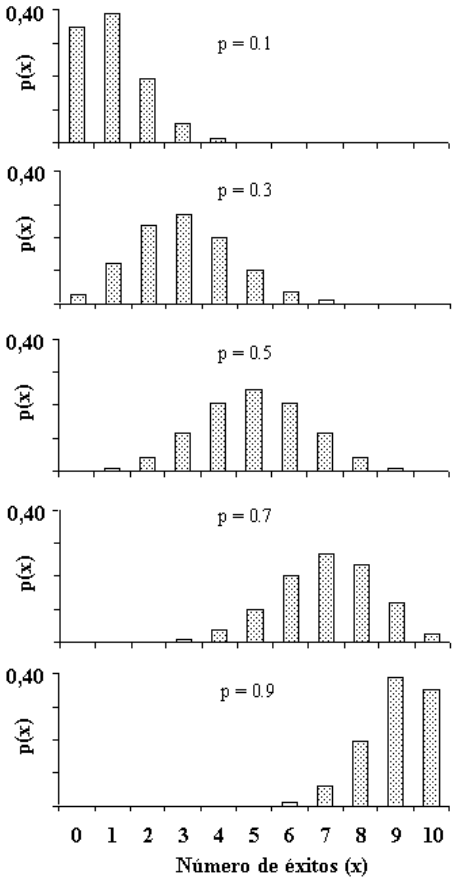


Figura 3.1. Función de probabilidades de la distribución binomial para n = 10 y varios valores de p.

Ejemplo 3.2.3. Para una pareja de individuos la probabilidad de tener un hijo con ojos azules es ¼ y la de tener hijos con ojos marrones es de ¾ . Si tienen cuatro hijos ¿Cuál es la distribución de probabilidades para la variable X = número de hijos con ojos azules?

Se trata de un ensayo binomial puesto que sólo hay dos resultados posibles, ojos azules o marrones, los eventos ojos azules y ojos marrones son independientes, puesto que el nacimiento de un hijo con un color de ojos no influye sobre el color de los ojos de cualquiera de los otros hijos. El espacio muestral es Rx = {0, 1, 2, 3, 4}, la probabilidad de éxito (ojos azules) es p = ¼ y la probabilidad del fracaso es q = ¾. Las probabilidades de X son las siguientes:

$P(X = 0) = {}_4C_0\, p^0 q^{4-0} = [4!/0!(4-0)!](1/4)^0(3/4)^4 = (1)(1)(0.3174) = 0.3164$
$P(X = 1) = {}_4C_1\, p^1 q^{4-1} = [4!/1!(4-1)!](1/4)^1(3/4)^3 = (4)(0.25)(0.4269) = 0.4269$
$P(X = 2) = {}_4C_2\, p^2 q^{4-2} = [4!/2!(4-2)!](1/4)^2(3/4)^2 = (6)(0.0625)(0.5625) = 0.2109$
$P(X = 3) = {}_4C_3\, p^3 q^{4-3} = [4!/3!(4-3)!](1/4)^3(3/4)^1 = (4)(0.0156)(0.75) = 0.0469$
$P(X = 4) = {}_4C_4\, p^4 q^{4-4} = [4!/4!(4-4)!](1/4)^4(3/4)^0 = (1)(0.0039)(1) = 0.0039$

Función de probabilidad acumulada. La función acumulada $F(x) = \sum p(x_i)$, facilita el cálculo de probabilidades del tipo siguiente:

$$P(\mathbf{X} \leq x_i);\ P(\mathbf{X} \geq x_i);\ P(x_1 \leq \mathbf{X} \leq x_2);\ \text{etc.}$$

Puesto que la distribución binomial es de gran aplicación, en la mayoría de los textos de estadística existen tablas con las probabilidades acumuladas (Ver Tabla 2 del anexo A). También muchos programas de utilidades para computadoras personales, como el Excel, proporcionan funciones que permitan calcular las probabilidades individuales o acumuladas. La Tabla 2, se construyó usando la función acumulada para la variable binomial que se encuentra en el Excel. Su uso es muy fácil, tiene tres entradas, el valor del parámetro p (probabilidad del éxito), el valor de n (número de repeticiones) y el valor de x (número de éxitos). En la Tabla 3.1 se muestra una parte de una tabla de probabilidades acumuladas de la función binomial.

Tabla 3.1. Algunas probabilidades acumuladas de la función de probabilidad $p(x) = {}_nC_x\, p^x q^{n-x}$

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} {}_nC_x\, p^x q^{n-x}$$

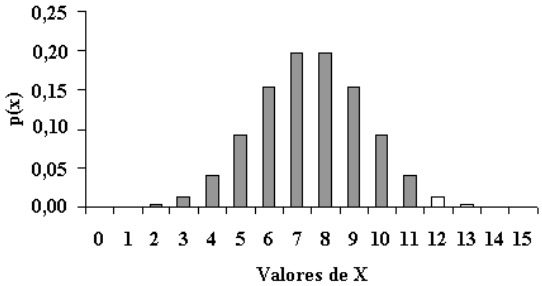
		p										
n	**X**	**0.1**	**0.15**	**0.2**	**0.25**	**0.3**	**0.35**	**0.4**	**0.45**	**0.5**	**0.55**	**0.6**
15	**0**	0.2059	0.0874	0.0352	0.0134	0.0047	0.0016	0.0005	0.0001	**0.0000**	0.0000	
15	**1**	0.5490	0.3186	0.1671	0.0802	0.0353	0.0142	0.0052	0.0017	**0.0005**	0.0001	0.0000
15	**2**	0.8159	0.6042	0.3980	0.2361	0.1268	0.0617	0.0271	0.0107	**0.0037**	0.0011	0.0003
15	**3**	0.9444	0.8227	0.6482	0.4613	0.2969	0.1727	0.0905	0.0424	**0.0176**	0.0063	0.0019
15	**4**	0.9873	0.9383	0.8358	0.6865	0.5155	0.3519	0.2173	0.1204	**0.0592**	0.0255	0.0093
15	**5**	0.9978	0.9832	0.9389	0.8516	0.7216	0.5643	0.4032	0.2608	**0.1509**	0.0769	0.0338
15	**6**	0.9997	0.9964	0.9819	0.9434	0.8689	0.7548	0.6098	0.4522	**0.3036**	0.1818	0.0950
15	**7**	1.0000	0.9994	0.9958	0.9827	0.9500	0.8868	0.7869	0.6535	**0.5000**	0.3465	0.2131
15	**8**		0.9999	0.9992	0.9958	0.9848	0.9578	0.9050	0.8182	**0.6964**	0.5478	0.3902
15	**9**		1.0000	0.9999	0.9992	0.9963	0.9876	0.9662	0.9231	**0.8491**	0.7392	0.5968
15	**10**			1.0000	0.9999	0.9993	0.9972	0.9907	0.9745	**0.9408**	0.8796	0.7827
15	**11**				1.0000	0.9999	0.9995	0.9981	0.9937	**0.9824**	0.9576	0.9095
15	**12**					1.0000	0.9999	0.9997	0.9989	**0.9963**	0.9893	0.9729
15	**13**						1.0000	1.0000	0.9999	**0.9995**	0.9983	0.9948
15	**14**								1.0000	**1.0000**	0.9999	0.9995
15	**15**										1.0000	1.0000

Ejemplo 3.2.3. Si se tiene una variable aleatoria que se distribuye binomialmente con n = 15 y p = 0.5, encuentre las probabilidades siguientes:

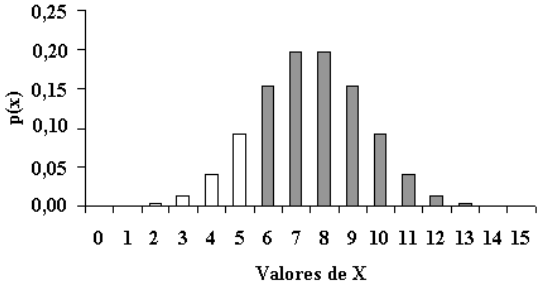
$$P(X \leq 3);\quad P(X > 5);\quad P(X < 8);\quad P(X \geq 9);\quad P(X = 6);\quad P(10 < X \leq 14)$$

Para encontrar estas probabilidades, primero ubicamos en la tabla los parámetros de la distribución n = 15 y p = 0.5. Luego encontramos la probabilidad acumulada para el valor de x correspondiente. Así tenemos que,

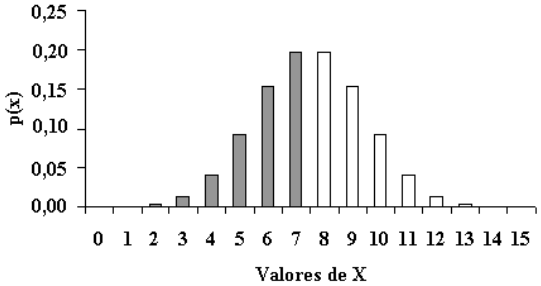
$P(X \leq 11) = 0.9824$



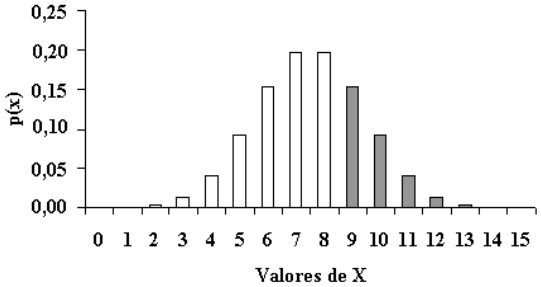
$P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - 0.1509 = 0.8491$



$P(X < 8) = P(X \leq 7) = 0.500$

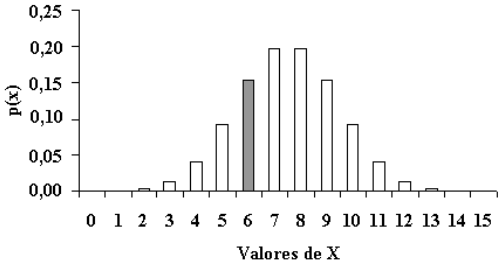


$P(X \geq 9) = 1 - P(X \leq 8) = 1 - 0.6964 = 0.3036$



$P(X = 6) = P(X \leq 6) - P(X \leq 5) =$

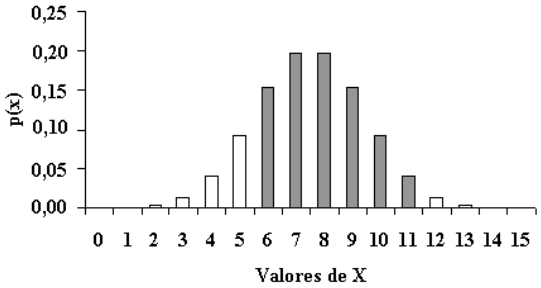
$= 0.3036 - 0.1509 = 0.1527$



Las áreas sombreadas de las figuras representan las probabilidades solicitadas.

$P(5 < X \leq 11) = P(X \leq 11) - P(X \leq 5) =$

$= 0.9824 - 0.1509 = 0.8315$



El área sombreada de la figura representa la probabilidad solicitada.

Valor Esperado (Media) y Varianza de la Distribución Binomial. El valor esperado y la varianza de la distribución binomial son los siguientes:

$$\text{Media} = \mu = np \qquad \text{Varianza} = \sigma^2 = npq$$

Ejemplo 3.2.4. Calcule el número promedio y la varianza que se espera obtener del número de niños con fiebre cuando se vacunan 6 niños, si la probabilidad de que se enferme un niño es de 1/4.

$$\mu = np = 6(1/4) = 1.5 \text{ niños} \qquad \sigma^2 = npq = 6(1/4)(3/4) = 1.125$$

3.2.3. Distribución de Poisson. Esta distribución fue introducida por el matemático francés S.D. Poisson en 1837. El modelo de Poisson a semejanza del binomial consta de varios ensayos de Bernoulli. La diferencia estriba en que el modelo binomial sirve para calcular la probabilidad de ocurrencia de un resultado particular en un número finito de repeticiones, mientras que con el modelo de Poisson se determina la probabilidad de ocurrencia de un determinado evento en el tiempo o el espacio y no en un número definido de repeticiones del experimento. En estos eventos que se producen aleatoriamente en el espacio o el tiempo, la frecuencia de ocurrencia de un evento es tan baja con relación a la frecuencia de no ocurrencia que se consideran como sucesos raros. Tratar de describir la distribución de una variable aleatoria de este tipo mediante el modelo binomial sería impráctico puesto que el número de ensayos tendría que ser extraordinariamente grande para que ocurriera el resultado esperado. Por ejemplo, para un biólogo que está colectando individuos de una especie de planta cuyos individuos están distribuidos aleatoriamente e independientemente en una sabana, es de suma importancia conocer la distribución de probabilidades de la variable número de plantas. Para obtener ésta distribución se podría usar el modelo binomial. Sólo se necesitaría considerar cada punto muestreado como una repetición del proceso, sin embargo esto implicaría trabajar con un número de repeticiones extremadamente grande, puesto que la presencia de una planta en un punto del área de búsqueda es un hecho muy poco frecuente con relación al número de puntos donde no se encuentra. Bajo el supuesto que se pudiera superar la dificultad del elevado número de repeticiones, se tendría otro problema, como el que la función binomial estaría caracterizada por un valor de n muy grande y un valor de p muy pequeño, lo que haría

sumamente tedioso el cálculo de probabilidades por tener que usar factoriales de números muy grandes. Afortunadamente, situaciones como la planteada donde $n \to \infty$ y $p \to 0$, se pueden resolver usando el modelo probabilístico de Poisson.

Para deducir la función de probabilidad de Poisson seguiremos haciendo uso del mismo ejemplo de la planta en la sabana. Supóngase que en esta sabana se delimitó una parcela de terreno, y que el promedio de plantas por unidad de superficie es igual a λ. El mayor interés es el de conocer la probabilidad con la cual la variable aleatoria asume los valores de su rango espacial, el cual es Rx = {0, 1, 2, 3, ... N}. Una manera de encontrar las probabilidades para cada resultado de Rx sería definir un número grande de parcelas del mismo tamaño, determinar su número de plantas y construir una distribución de frecuencias. Las frecuencias relativas se pueden usar para estimar la probabilidad de ocurrencia de la variable número de plantas. Otra forma sería dividir la parcela en *n* unidades del mismo tamaño lo suficientemente pequeñas para que en cada uno de ellas se produzca uno de dos resultados: presencia o ausencia de plantas (Figura 3.2).

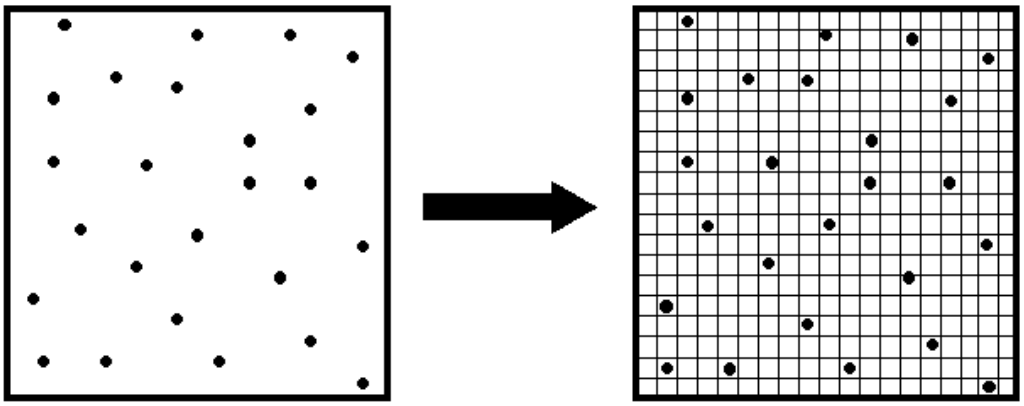


Figura 3.2. Parcela de terreno dividida en n subparcelas. Los puntos indican la ubicación hipotética de las plantas (ver texto)

Bajo estas nuevas condiciones el experimento presenta las características siguientes:

a) Se repite *n* veces.
b) Dos resultados posibles. Si la probabilidad de ocurrencia de una planta es muy pequeña con relación a la probabilidad de que no ocurra y cada subparcela es lo suficientemente pequeña, entonces la posibilidad de encontrar mas de una planta en una misma subparcela es infinitamente pequeña y para efectos prácticos se puede considerar que en cada subparcela existen dos resultados posibles: presencia o ausencia de la planta.

c) Para cada subparcela existe la misma posibilidad de tener una planta.

d) Los n ensayos son independientes. El hecho de que ocurra una planta en un punto, no afecta su ocurrencia en otro punto.

Ahora es posible utilizar la función de probabilidad del modelo binomial para el cálculo de probabilidades.

X = número de plantas en n repeticiones

$$\downarrow$$

$$Rx = \{0, 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots n\}$$

$$\downarrow$$

$$P(X = x) = p(x) = {}_nC_x\, p^x q^{n-x}$$

Sabiendo que λ es igual al valor promedio de emisiones por unidad de superficie, la probabilidad de que ocurra una planta en cada una de las n subparcelas de tamaño 1/n será $p = \lambda/n$ y la probabilidad de que no ocurra será $q = 1 - (\lambda/n)$, de modo que la función de probabilidad queda de la manera siguiente:

$$P(X = x) = p(x) = {}_nC_x \left[\lambda/n\right]^x \left[1 - \lambda/n\right]^{n-x}$$

Sin embargo esta función sólo es una aproximación, pues toma en cuenta n subparcelas. Como la superficie es una variable continua, el área de la parcela se puede dividir en infinitas subparcelas, de modo que cuando n tiende a infinito la función de probabilidad binomial se aproxima al valor siguiente:

$$\underset{n \to \infty}{\text{Limite}}\ {}_nC_x \left[\lambda/n\right]^x \left[1 - \lambda/n\right]^{n-x} = \frac{e^{-\lambda}\, \lambda^x}{x\,!}$$

Donde λ = número de ocurrencia del evento de interés en una unidad de espacio (o tiempo). Para cualquier otro valor de espacio (o tiempo) la función de probabilidad será:

$$p(x) = {}_nC_x \left[\lambda a/n\right]^x \left[1 - \lambda a/n\right]^{n-x} = \frac{e^{-\lambda a}\, \lambda a^x}{x\,!}$$

Siendo <u>a</u> el factor de proporcionalidad que permite calcular el número de ocurrencias del éxito en un tiempo o espacio dado diferente a la unidad.

Sí sustituimos λa por μ la función de probabilidades para el modelo de Poisson queda de la manera siguiente:

$$p(x) = \frac{e^{-\mu}\, \mu^x}{x\,!}$$

Donde μ = es el número promedio de ocurrencias en un espacio o tiempo dado y x = número de veces que ocurre el éxito en ese mismo espacio o tiempo.

La distribución de probabilidades de Poisson esta formada por los pares ordenados de valores [x_i; $p(x_i)$] y la misma está caracterizada por un sólo parámetro: el promedio μ. En forma similar a la distribución binomial, la distribución de Poisson es una familia de curvas, cuya forma depende del valor de μ (Figura 3.3)

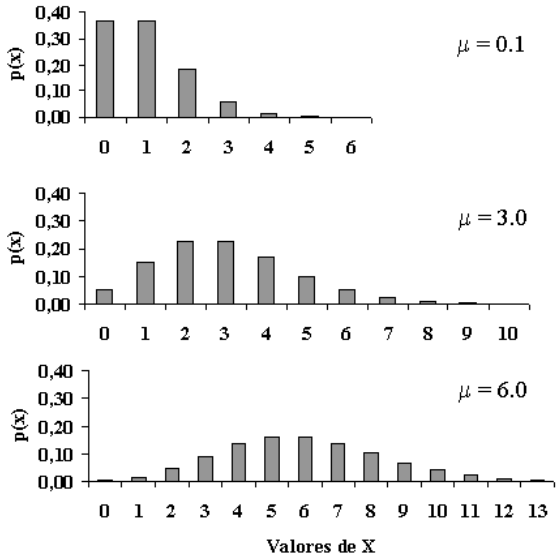


Figura 3.3. Distribución de probabilidades para el modelo de Poisson

Ejemplo 3.2.5. Supóngase que un material determinado emite partículas radiactivas y que el número de partículas emitidas durante una hora tiene una distribución de Poisson cuyo promedio es de 0.8 partículas/hora. ¿Cuál es la probabilidad de que en cinco horas se emitan mas de 3 y menos de 7 partículas?.

Para encontrar la probabilidad solicitada P(3 < **X**< 7) será necesario calcular las probabilidades individuales p(4), p(5) y p(6), de forma que,

$$P(3 < \mathbf{X} < 7) = P(4 \le \mathbf{X} \le 6) = p(4) + (p5) + p(6)$$

Para el cálculo de cada probabilidad es necesario usar la función de Poisson: $p(x) = \dfrac{e^{-\mu}\,\mu^{x}}{x\,!}$

Si el número promedio de partículas por unidad de tiempo es λ = 0.8 emisiones/hora, el número promedio esperado para cinco horas será $\mu = \lambda t = 0.8 \times 5 = 4$

$$p(4) = \frac{e^{-4}4^{4}}{4!} = \frac{(0.0183)(256)}{4.3.2.1} = \frac{4.688}{24} = 0.1954$$

$$p(5) = \frac{e^{-4}4^{5}}{5!} = \frac{(0.0183)(1024)}{5.4.3.2.1} = \frac{18.74}{120} = 0.1562$$

$$p(6) = \frac{e^{-4}4^{6}}{6!} = \frac{(0.0183)(4096)}{6.5.4.3.2.1} = \frac{74.96}{720} = 0.1041$$

Al sumar estos valores se obtiene la probabilidad buscada,

$$P(3 < \mathbf{X} < 7) = P(4 \le \mathbf{X} \le 6) = 0.1954 + 0.1562 + 0.1041 = 04557$$

Ejemplo 3.2.6. Se ha encontrado que el número de fallas en un transistor de un aparato de medición es una variable aleatoria que se distribuye como Poisson. El promedio de fallas es de 0.1 cada 10 horas. ¿Cuál será la probabilidad de que el transistor falle en dos horas?

La probabilidad de que el transistor falle será la probabilidad de que la variable aleatoria tome un valor mayor o igual a 1 en 2 horas.

λ = 0.1 fallas/10 horas = 0.01 fallas/hora $\mu = \lambda t = (0.01)2 = 0.02$ fallas/2 horas

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - p(0) = 1 - \frac{e^{-0.02}\ 0.02^0}{0!} = 1 - 0.9892 = 0.0198$$

Función de probabilidad acumulada. En la Tabla 3.3 se muestran una parte de la Tabla de probabilidades acumuladas de la función de probabilidad de Poisson (Ver Tabla 3 del Anexo). Las entradas para ésta tabla son el parámetro μ y el número x de éxitos.

Tabla 3.2: Algunas probabilidades acumuladas de la Distribución de Poisson
[F(x) = P(X ≤ x) = X:p(μ)]

	μ									
X	**1.8**	**1.9**	**2**	**2.1**	**2.2**	**2.3**	**2.4**	**2.5**	**2.6**	**2.7**
0	0.1653	0.1496	0.1353	0.1225	0.1108	0.1003	0.0907	0.0821	0.0743	0.0672
1	0.4628	0.4337	0.4060	0.3796	0.3546	0.3309	0.3084	0.2873	0.2674	0.2487
2	0.7306	0.7037	0.6767	0.6496	0.6227	0.5960	0.5697	0.5438	0.5184	0.4936
3	0.8913	0.8747	0.8571	0.8386	0.8194	0.7993	0.7787	0.7576	0.7360	0.7141
4	0.9636	0.9559	**0.9473**	0.9379	0.9275	0.9162	0.9041	0.8912	0.8774	0.8629
5	0.9896	0.9868	0.9834	0.9796	0.9751	0.9700	0.9643	0.9580	0.9510	0.9433
6	0.9974	0.9966	0.9955	0.9941	0.9925	0.9906	0.9884	0.9858	0.9828	0.9794
7	0.9994	0.9992	0.9989	0.9985	0.9980	0.9974	0.9967	0.9958	0.9947	0.9934
8	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997	0.9995	0.9994	0.9991	0.9989	0.9985	0.9981
9	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9996	0.9995
10				1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999

Ejemplo 3.2.7. Supóngase que el número de impulsos que recibe una central telefónica es una variable que se distribuye como Poisson El promedio es de 120 impulsos recibidos por hora. La central tiene una capacidad máxima de 4 impulsos/minuto. ¿Cuál es la probabilidad de que en un minuto determinado la central se congestione?

λ = 120 imp./hora = 120 imp./60 minutos = 2 imp./minuto

$\mu = \lambda t$ = (2 imp./minuto)(1 minuto) = 2 impulsos

$$P(\mathbf{X} > 4) = 1 - P(\mathbf{X} \leq 4) = 1 - F(4)$$

Para encontrar el valor de F(4) en la Tabla 3.2 se localiza en la primera fila el valor de $\mu = 2$, luego en la primera columna se ubica el valor de x = 4. La intersección de ambas muestra las probabilidades acumuladas para la función de Poisson, F(4) = 0.9473, por tanto

$$P(\mathbf{X} > 4) = 1 - P(\mathbf{X} \leq 4) = 1 - F(4) = 1 - 0.9473 = 0.0527$$

Ejemplo 3.2.7. Encontrar la probabilidad solicitada en el Ejemplo 3.2.5 utilizando la función acumulativa

$$P(3 < \mathbf{X} < 7) = P(4 \leq \mathbf{X} \leq 6) = F(6) - F(3)$$

Se encuentran en la Tabla 3 del Anexo los valores de F(6) y F(3) para $\mu = 4$

$$P(3 < \mathbf{X} < 7) = P(4 \leq \mathbf{X} \leq 6) = F(6) - F(3) = 0.8893 - 0.4335 = 0.4558$$

Ejemplo 3.2.8. El número de accidentes severos que ocurren anualmente en los laboratorios de química según la Federación Internacional de Laboratorios de Química es de 2.5 casos por cada 1000 profesionales del área. ¿Cuál es la probabilidad de que en una población de 80 personas que trabajan en los laboratorios de un Departamento de Química, se produzca algún accidente en el año?

$$\lambda = 2.5 \text{ casos/1000 personas} = 2.5 \times 10^{-3} \text{ casos/persona}$$

$$\mu = \lambda t = (2.5\text{x}10^{-3} \text{ casos/persona})(80 \text{ personas}) = 0.2 \text{ casos}$$

$$P(\mathbf{X} > 0) = 1 - P(\mathbf{X} \leq 0) = 1 - F(0) = 1 - 0.8187 = 0.1813$$

Relación entre los modelos Binomial y Poisson. La deducción de la función de probabilidad del modelo de Poisson se hizo a partir de la función de probabilidad del modelo binomial. Con éste propósito en un experimento binomial se aumentó infinitamente el número de repeticiones (n), y la probabilidad de ocurrencia del éxito se disminuyó proporcionalmente a éste aumento: $p = \lambda/n$. De modo que en cualquier ensayo de Bernoulli donde n sea muy grande y p muy pequeño, se puede utilizar la función de Poisson para calcular las probabilidades de ocurrencia del éxito, sabiendo que $\mu = np$.

Ejemplo 3.2.9. En una fábrica, se sabe que en el proceso de envasado de alimentos uno de cada 1000 envases producidos no cumple con las normas de calidad del producto. ¿Cuál es la probabilidad de que en una muestra aleatoria de 8000 envases, menos de 7 no cumplan con las normas de calidad?

La variable **X** = número de envases sin calidad se distribuye binomialmente: a) en cada elección existe dos resultados posibles, b) la probabilidad de encontrar un envase que no cumpla con la garantía no cambia, c) los ensayos son independientes y d) el experimento se repitió n veces.

$$n = 8.000 \quad \text{y} \quad p = 1/1000 = 0.001$$

La función acumulativa no esta tabulada para valores de n tan grandes. El cálculo mediante la función de probabilidad se dificulta por que hay que trabajar con factoriales muy grandes. Sin embargo si consideramos que n tiende a infinito y p tiende a cero, podemos aproximar la Binomial a Poisson, de modo que:

$$\mu = np = 8000x0.001 = 8$$

Las probabilidades deseadas las buscamos en la tabla de probabilidades acumuladas para la distribución de Poisson cuando $\mu = 8$.

$$P(\mathbf{X} \leq 7) = F(7) = 0.3134$$

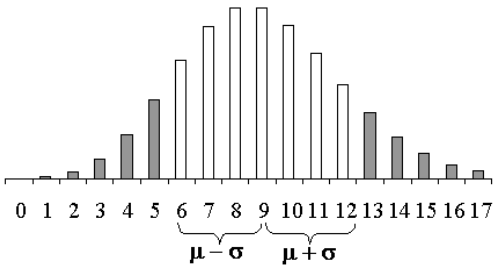
Valor Esperado (Media) y Varianza de la Distribución de Poisson. El valor esperado y la varianza de la distribución de Poisson son iguales:

$$\text{Media} = \mu \qquad \text{Varianza} = \sigma^2$$

$$\mu = \sigma^2$$

Ejemplo 3.2.10. Sea X una variable que se distribuye según el modelo de Poisson, sabiendo que $\mu = 9$ calcule la probabilidad que tiene la variable aleatoria de ser mayor o menor a la media en más de una desviación estándar.

La probabilidad solicitada es $P(\mu - \sigma > X > \mu + \sigma)$, y como sabemos que $\mu = 9$, se deduce que el valor de la desviación estándar es $\mu = \sigma^2 = 9$; de modo que,



$$P(\mu - \sigma > X > \mu + \sigma) = P(9 - 3 > X > 9 + 3) =$$
$$= P(6 > X > 12) = P(X < 6) + P(X > 12) =$$
$$= P(X \leq 5) + [1 - P(X \leq 12)] = F(5) + 1 - F(12) =$$
$$= 0.1157 + 1 - 0.8758 = 0.2399$$

3.3 MODELOS PROBABILÍSTICOS CONTINUOS

3.3.1. Modelo Normal. La función de probabilidad de la distribución normal sirve de modelo para una gran cantidad de variables continuas naturales, tales como la temperatura, la humedad, la precipitación, la altura, el peso, la concentración, el coeficiente de inteligencia, los errores instrumentales, etc. Igualmente la distribución de muchos valores muestrales tienden hacia la distribución normal, por lo cual ésta distribución adquiere una gran importancia en el análisis de datos mediante la inferencia estadística. La fórmula de la función de probabilidad del modelo normal fue introducida por Abraham De Moivre en las primeras décadas del siglo XVIII, como una derivación de la distribución binomial cuando n es muy grande. Luego fue usada por Pierre Laplace y Carl Gauss con diferentes propósitos. Erróneamente, se le ha atribuido a éste último el descubrimiento de la función de probabilidad normal, por lo que su distribución muchas veces se le denomina Campana de Gauss, para honrar a su supuesto creador y por la forma de la distribución que semeja a una campana. El nombre de distribución normal le fue dado por Karl Pearson, otro insigne matemático. Una

variable aleatoria **X** se encuentra distribuida normalmente si su función de probabilidad es la siguiente:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2}$$

Esta función esta caracterizada por dos parámetros: la media μ y la desviación estándar σ. El valor de μ define la posición de la distribución y el valor de σ (o σ^2) definen la forma de la distribución (Figura 3.4). Para cada par de valores distintos de μ y σ (o σ^2) existe una distribución normal, por lo tanto existe un número infinito de distribuciones normales diferentes. La distribución normal es simétrica, con un valor máximo para $x = \mu$. Presenta dos puntos de inflexión para $x = \pm \sigma$ (Figura 3.5).

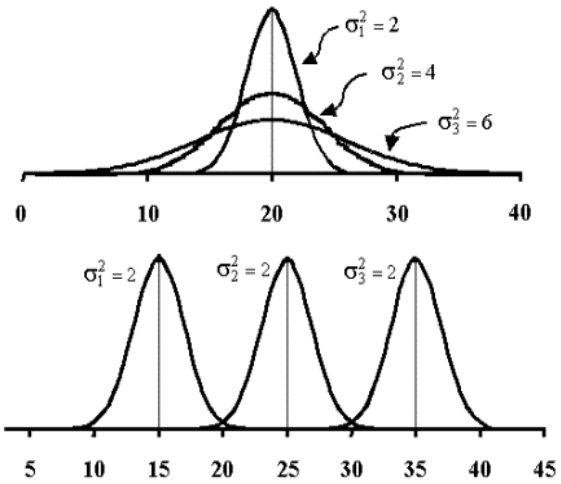


Figura 3.4. Distribuciones normales con la misma media (μ = 20) y diferentes varianzas (Fig. arriba); Distribuciones normales con diferentes medias y la misma varianza (Fig. abajo)

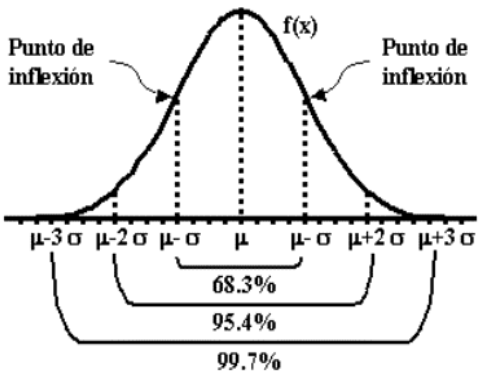


Figura 3.5. Distribución normal y arreas contenidas por los intervalos definidos a una, dos y tres desviaciones estándar alrededor de μ.

La función de probabilidad f(x) tiende a cero a medida que x tiende a $\pm\infty$ determinando que las dos colas de la distribución se aproximen asintóticamente a cero. Todas éstas propiedades le confieren a la distribución normal una forma característica semejante a una campana. Cuando una variable aleatoria sigue la distribución normal se indica de la manera siguiente: **X**:N(μ ; σ). Por tratarse de una función de probabilidad para variables continuas, la probabilidad de que la variable se encuentre en un intervalo se calcula integrando la función de probabilidad f(x) entre los límites del intervalo.

$$P(x_1 \le X \le x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

Igualmente se puede calcular la probabilidad utilizando la función acumulativa Φ(x).

$$P(x_1 \le X \le x_2) = \int_{-\infty}^{x_2} f(x)dx - \int_{-\infty}^{x_1} f(x)dx = \Phi_{(2)} - \Phi_{(1)}$$

En el caso de las distribuciones discretas los valores de la función acumulativa están tabulados para diferentes valores de los parámetros que caracterizan estas distribuciones. Esto no es posible en el caso de la distribución normal porque al ser aplicable a variables continuas existen infinitos valores de μ y σ. La mejor manera que se encontró para resolver ésta situación fue tabular las probabilidades acumuladas para una distribución, con valores de μ y σ específicos y mediante el procedimiento de tipificación transformar cualquier variable normal, en esa variable estándar o patrón. La variable que se seleccionó como estándar es aquella cuya función tiene como parámetros μ = 0 y σ = 1, por lo cual se le denominó variable normal estándar, unitaria o tipificada, identificándose con la letra Z para diferenciarla de las otras variables cuya distribución de probabilidad tiene μ ≠ 0 y σ ≠ 1. La función de probabilidad de esta variable es la siguiente:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}[z]^2}$$

La probabilidad de encontrar un valor de **Z** en un intervalo dado, se obtiene calculando el área que se encuentra entre la curva y el intervalo definido en el eje de coordenadas. Pero en lugar de integrar f(z) entre los límites del intervalo, ésta área se puede calcular utilizando la tabla de la función acumulada Φ(z) (Tabla 3.3), que proporciona los valores de integración entre -∞ y un dado valor de Z **(**Figura 3.6)

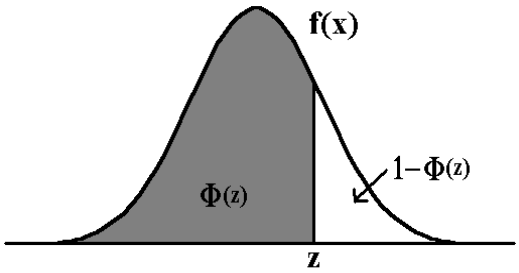


Figura 3.6. Función acumulativa Φ(z)

La primera columna de la Tabla 3.3 son los valores de Z con una apreciación en décimas y la primera fila son las centésimas de Z. Las cantidades dentro de la tabla son las probabilidades acumuladas desde - ∞ hasta un valor dado de Z. Por ejemplo, a la izquierda de z = 1.25 la probabilidad acumulada es 0.8944.

Tabla 3.3: Algunas Probabilidades acumuladas Φ(z) de la Distribución Normal Estandarizada.

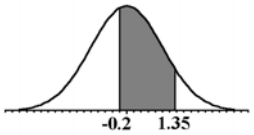
$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z)^2} dz$$

Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
-0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877
-0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228
-0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594
-0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974
-0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	**0,8944**	0,8962
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406

Ejemplo 3.3.1. Si se elige aleatoriamente un valor de la variable **Z**, calcule las probabilidades siguientes: P(**Z** < 1.2); P(-0.2 ≤ **Z** ≤ 1.35); P(**Z** ≥ 0.75); P(-0.45 ≤ **Z** ≤ - 0.13); P(0.12 ≤ **Z** ≤ 1.14); P(- 0.45 ≥ **Z** ≥ 0.45).

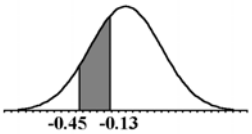
P(**Z** < 1.2) = P(**Z** ≤ 1.2) = Φ(1.2) = 0.8849

P(- 0.2 ≤ **Z** ≤ 1.35) = P(**Z** ≤ 1.35) - P(**Z** ≤ -0.2) =
= Φ(1.35) - Φ(- 0.2) = 0.9115-0.4207= 0.4908

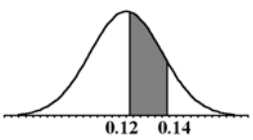


P(**Z** ≥ 0.75) = 1 - P(**Z** ≤ 0.75) = 1- Φ(0.75) =
= 1 - 0.7734 = 0.2260

P(-0.45 ≤ **Z** ≤ -0.13) = P(**Z** ≤ -0.13) - P(**Z** ≤ -0.45) = =
= Φ(-0.13) – Φ(-0.45) = 0.4483 - 0.3264 = 0.1219



$P(0.12 \le \mathbf{Z} \le 1.14) = P(\mathbf{Z} \le 1.14) - P(\mathbf{Z} \le 0.12) =$
$= \Phi(1.14) - \Phi(0.12) = 0.8729 - 0.5478 = 0.3251$



f) $P(- 0.45 \ge \mathbf{Z} \ge 0.45) = P(\mathbf{Z} \ge 0.45) + P(\mathbf{Z} \le -0.45)=$
$= [1 - P(\mathbf{Z} \le 0.45)] + P(\mathbf{Z} \le - 0.45) =$
$= [1 - \Phi(0.45)] + \Phi(-0.45) =$
$= (1 - 0.6736) + 0.3264 = 0.6528$

Las áreas sombreadas representan las probabilidades solicitadas.

Transformación de una variable X en la variable Z. Al definir la variable Z, lo que realmente se hizo fue transformar la función f(x) en la función f(z), haciendo z igual al término $\frac{x-\mu}{\sigma}$ que aparece en el exponente de f(x).

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2} \longrightarrow z = \frac{x-\mu}{\sigma} \longrightarrow f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}[z]^2}$$

De manera que cualquier variable **X** que se distribuye normalmente con $\mu \neq 0$ y/o $\sigma \neq 1$, se puede convertir en la variable **Z**, restando a cualquier valor de X su media μ y dividiendo esta diferencia por su desviación estándar.

Como se puede notar al dividir la distancia $x-\mu$ entre σ, se está determinando el número de desviaciones estándar que caben en esa distancia. Por lo tanto los valores de **Z** expresan la distancia de **X** respecto a su media μ en términos de desviación estándar. Por ejemplo un valor de Z = 1.5, significa que el valor de X está a 1.5σ a la derecha de μ. De manera similar, cuando Z = -2 el valor de X está a 2σ a la izquierda de μ (Figura 3.7)

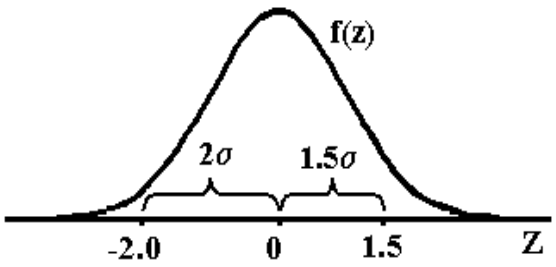


Figura 3.7. Equivalencia entre valores de Z y el número de desviaciones estándar

Por otra parte, para cualquier distribución normal, independientemente de cuales sean sus valores de μ y σ, el área bajo la curva es la misma para cualquier distancia que esté a $n\sigma$ del valor promedio μ, siendo n un número real. Por ejemplo, en cualquier distribución normal, el área sobre el intervalo $\mu \pm 1\sigma$ es de 68.3%; sobre el intervalo $\mu \pm 2\sigma$ es de 95.4% y sobre el intervalo $\mu \pm 3\sigma$ es del 99.7%. Estas dos propiedades que acabamos de ver son las que permiten calcular las probabilidades de una distribución normal, cualquiera sean los valores de μ y σ, a partir de las probabilidades acumuladas para la distribución normal estandarizada o tipificada.

Ejemplo 3.3.2. Sea **X** una variable con $\mu = 20$ y $\sigma = 4$ y se quiere conocer la probabilidad de que la variable tenga un valor menor a 16.

La probabilidad que nos interesa es P(**X** ≤ 16). El área que representa esta probabilidad se encuentra a la izquierda del valor 16 (Figura 3.8). Para poder determinar el valor de ésta área mediante la tabla de probabilidades acumuladas de la distribución normal estándar, se debe convertir el valor de x en su respectivo valor z, lo cual se hace mediante la operación siguiente:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{16 - 20}{4} = -1$$

Ahora se busca el área que se encuentra a la izquierda de z = - 1 en la Tabla 3 (ver anexo), y se asume que dicha área es la probabilidad conque la variable aleatoria X asume un valor igual o menor a 16 (Figura 3.8). En consecuencia se tiene,

$$P(X \le 16) = P\left(Z \le \frac{16 - 20}{4}\right) =$$

$$P\left(Z \le -1\right) = \Phi(-1) = 0.1587$$

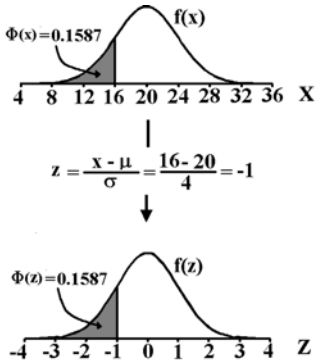
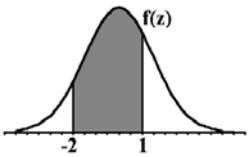


Figura 3.8.

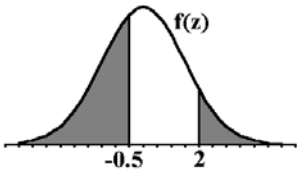
Ejemplo 3.3.3. El nivel de colesterol en la sangre en los individuos adultos de 25 a 30 años de cierta población es una variable que se distribuye normalmente con una media de 190 mg/dl y una desviación de 20 mg/dl, encuentre la probabilidad que un individuo elegido aleatoriamente tenga valores de colesterol a) entre 150 y 210 mg/dl; b) mayor a 230 o menor a 180.

$$\mathrm{P}(150 \le \mathrm{X} \le 210) = \mathrm{P}\left(\frac{150 - 190}{20} \le \mathrm{Z} \le \frac{210 - 190}{20}\right) = \mathrm{P}\left(-2 \le \mathrm{Z} \le 1\right)$$

$$= \mathrm{P}(\mathrm{Z} \le 1) - \mathrm{P}(\mathrm{Z} \le -2) = 0.8413 - 0.0228 = 0.8185$$



$$\mathrm{P}(180 \ge \mathrm{X} \ge 230) = \mathrm{P}\left(\frac{180 - 190}{20} \ge \mathrm{Z} \ge \frac{230 - 190}{20}\right) =$$

$$= \mathrm{P}\left(-0.5 \ge \mathrm{Z} \ge 2\right) = \left[1 - \mathrm{P}(\mathrm{Z} \le 2)\right] + \mathrm{P}(\mathrm{Z} \le -0.5) =$$

$$= 1 - 0.9772 + 0.3085 = 0.3313$$