Problemas y ejercicios de Mecánica
Leyes del Movimiento

1. Un bloque de masa M asciende por un plano inclinado con coeficiente de fricción μ_k, que forma con el horizonte un ángulo θ. En el instante inincial, el bloque tiene una rapidez v_0 y se encuentra en $x = 0$. El sistema está en el vacío. Demuestre que al llegar al punto en que se detiene el bloque, su posición viene dada por el vector

$$\vec{r} = \frac{v_0^2}{2g(\mu_k \cos\theta + \operatorname{sen}\theta)}\hat{\imath},$$

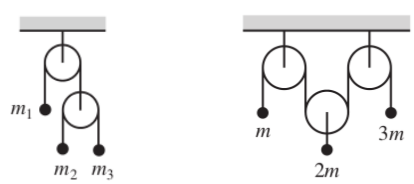
y el tiempo que tarda en llegar a ese punto es

$$t = \frac{v_0}{g(\mu_k \cos\theta + \operatorname{sen}\theta)}.$$

2. Un proyectil es disparado en el vacío desde el origen de un sistema de coordenadas con una rapidez inicial $|\vec{v_0}|$ y a un ángulo α con la horizontal. Calcule el tiempo requerido para que el proyectil cruce una línea que pasa por el origen y forma un ángulo $\beta < \alpha$ con la horizontal. Exprese su resultado en términos de $|\vec{v_0}|$, g, α y β.
(R. $t = \frac{2|\vec{v_0}|}{g}(\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha\tan\beta)$)

3. Considere un patinador sobre el cual la fuerza neta es una fuerza resistiva proporcional al cuadrado de su rapidez, es decir, $\vec{f_r} = -km|\vec{V}|^2\hat{v}$, donde k es una cosntante y m es la masa del patinador. El patinador cruza la línea de meta en una carrera en línea recta con una rapidez $|\vec{V_0}|$ y luego reduce su velocidad al avanzar por inercia de los patines. Demuestre que la rapidez del patinador en cualquier tiempo t después de cruzar la meta es $V_x(t) = V_{0x}/(1 + ktV_{0x})$. A partir de este resultado, encuentre la posición x como función del tiempo, teniendo que $x = 0$ cuando $t = 0$ y demuestre que la velocidad del patinador como función de su posición es $V_x(x) = V_{0x}e^{-kx}$.

4. En la figura de la izquierda se muestra una doble máquina de Atwood con masas m_1, m_2 y m_3. Halle las aceleraciones de las masas.
(R. $\ddot{y}_1 = g\frac{4m_2m_3 - m_1(m_2+m_3)}{4m_2m_3 + m_1(m_2+m_3)}$, $\ddot{y}_2 = -g\frac{4m_2m_3 + m_1(m_2-3m_3)}{4m_2m_3 + m_1(m_2+m_3)}$, $\ddot{y}_3 = -g\frac{4m_2m_3 + m_1(m_3-3m_2)}{4m_2m_3 + m_1(m_2+m_3)}$)



5. Considere la máquina de Atwood en la figura de la derecha, con masas m, $2m$ y $3m$. Encuentre las aceleraciones de las masas y sus funciones $y(t)$.
(R. Tomando $+y$ hacia arriba: $\ddot{y}_3 = -\frac{3}{5}g$)

6. La velocidad de una partícula de masa m varía con la distancia x como $v_x(x) = \alpha x^{-n}$. Considerando que $v_x(x=0) = 0$ cuando $t = 0$, encuentre la fuerza $F_x(x)$ responsable. Halle $x(t)$ y $F_x(t)$.
(R. $F_x(x) = -mn\alpha^2 x^{-(2n+1)}$; $x(t) = [(n+1)\alpha t]^{\frac{1}{n+1}}$; $F_x(t) = -mn\alpha^2[(n+1)\alpha t]^{\frac{-(2n+1)}{(n+1)}}$)

7. Un bote de masa m es disparado en línea recta con velocidad inicial v_{ox} en un lago, y luego el bote se frena por una fuerza retardante $F_x = -\alpha e^{\beta v_x}$. Demuestre que cuando se detiene el bote, ha transcurrido un tiempo

$$t = \frac{m}{\alpha\beta}(1 - e^{-\beta v_{ox}}),$$

y se encuentra en la posición

$$x = \frac{m}{\alpha\beta}[\frac{1}{\beta} - e^{-\beta v_{ox}}(v_{ox} + \frac{1}{\beta})].$$

8. Una pelota es lanzada con rapidez $|\vec{V_o}|$ a un ángulo θ_o y es sometida a la fuerza resistiva del aire $\vec{F_r} = -m\alpha\vec{V}$. Encuentre $x(t)$ y $y(t)$. Luego, haciendo $\alpha|\vec{V_o}| = g$, demuestre que

$$x = \frac{|\vec{V_o}|^2}{g}(\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}),$$

cuando la pelota alcanza el punto más alto.

9. Una partícula de masa m se mueve en línea recta bajo la acción de una fuerza constante $\vec{F}$ y además una fuerza resistiva $\vec{f_r} = -k|\vec{V}|^2\hat{v}$. Demuestre que la distancia recorrida desde el instante que tiene una rapidez $|\vec{V}_A|$ al instante en que tiene una rapidez $|\vec{V}_B|$ es

$$x = \frac{m}{2k}\ln\left|\frac{|\vec{F}|-k|\vec{V}_A|^2}{|\vec{F}|-k|\vec{V}_B|^2}\right|.$$

10. Una partícula parte del reposo desde x bajo la acción de una fuerza restauradora $\vec{F} = -f(x)\hat{\imath}$, donde $f(x) = \frac{k}{x^3}$, siendo k una constante positiva. Demuestre que el tiempo que tarda la partícula en volver al origen $x_o(>0)$ es $t \leq \sqrt{\frac{mx_o^4}{k}}$.

11. Un masa m cuelga de una cuerda de masa ideal de masa despreciable de longitud l. Las condiciones están establecidas de modo que la masa se balancee dando vueltas alrededor de un círculo horizontal, con la cuerda formando un ángulo β con la vertical. Encuentre una expresión para $\theta(t)$ tomando en cuenta que cuando $t = 0$, $\dot{\theta} = \dot{\theta}_o$.
(R. $\theta(t) = \dot{\theta}_o + \sqrt{\frac{g}{l\cos\beta}t}$)

12. Una partícula se lanza verticalmente hacia arriba en un campo gravitacional constante con una velocidad inicial $|\vec{v_o}|$. Demuestre que si la partícula está sujeta a una fuerza resistiva proporcional al cuadrado de su velocidad instantánea, entonces la rapidez de la partícula cuando regresa a su posición inicial es $|\vec{v}| = \frac{|\vec{v_o}|v_t}{\sqrt{|\vec{v_o}|^2+v_t^2}}$, donde v_t es el valor de la velocidad terminal.

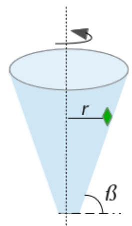
13. Un objeto se mueve en línea recta bajo la influencia de una fuerza resistiva de tipo $\vec{F} = -f(v_x)\hat{v}$, donde $f(v_x) = \alpha + \beta v_x^2$, siendo α y β constantes. Si en $t = 0$, el objeto se encuentra en $x = 0$ y tiene una rapidez $|\vec{v_o}|$, ¿qué tiempo debe transcurrir para que el objeto llegue al reposo? ¿Qué distancia recorrió en ese tiempo?
(R. $t = \frac{m}{\sqrt{\alpha\beta}}\arctan(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}|\vec{v_o}|)$; $x = \frac{m}{2\beta}\ln\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}|\vec{v_o}|^2\right)$).

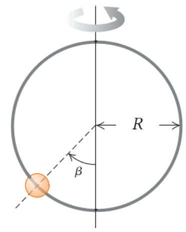
14. Una partícula de masa m se desliza hacia abajo por un plano inclinado bajo la infulencia de la gravedad. Si sobre la partícula actúa una fuerza resitiva de tipo $\vec{f_r} = -km|\vec{V}|^2\hat{v}$, demuestre que el tiempo requerido para que se mueva una distacia d luego de partir del reposo es

$$t = \frac{\cosh^{-1}(e^{kd})}{\sqrt{kg\operatorname{sen}\theta}},$$

donde θ es el ángulo de inclinación del plano.

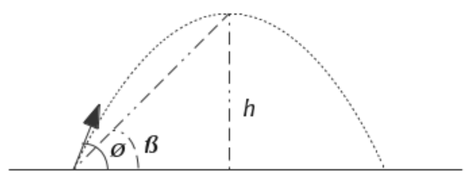
15. Un cubo muy pequeño de masa m se coloca en el interior de un embudo que gira alrededor de un eje vertical con velocidad angular constante ω. La pared del embudo forma un ángulo β con la horizontal. El coeficiente de fricción estática entre el cubo y el embudo es μ_s, y el centro del cubo se halla a una distancia r del eje de rotación. Calcule los valores mínimos y máximos de ω, en los cuales el cubo no se moverá respecto al embudo.
(R. $\omega_{\text{mín}} = \sqrt{\frac{g(\operatorname{sen}\beta - \mu_s \cos\beta)}{r(\cos\beta + \mu_s \sin\beta)}}$; $\omega_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{g(\operatorname{sen}\beta + \mu_s \cos\beta)}{r(\cos\beta - \mu_s \sin\beta)}}$)





16. Una cuenta pequeña de masa m puede deslizarse sin fricción por un aro circular de radio R que está en un plano vertical. El aro gira con rapidez angular constante ω en torno a un diámetro vertical. Calcule el ángulo β en que la cuenta está en equilibrio vertical.
(R. $\beta = \cos^{-1}(\frac{g}{\omega^2 R})$)

17. Un proyectil de masa m se dispara desde el suelo con una rapidez inicial $|\vec{v_o}|$ en un ángulo ϕ sobre la horizontal. Demuestre que el ángulo de elevación β del punto más alto visto desde el punto de lanzamiento se relaciona con ϕ por $\tan\beta = \frac{1}{2}\tan\phi$. Ignore la resistencia del aire.



18. Un cuerpo de masa m cuelga de una cuerda de longitud l de un punto E' y descansa en una superficie cónica ABC. El cuerpo gira alrededor del eje EE' con una rapidez angular constante ω. Calcule: la velocidad lineal del cuerpo, la normal, la tensión, y la velocidad angular ω' necesaria para que el cuerpo se desprenda del cono.
(R. $|\vec{V_t}| = \omega l \operatorname{sen}\theta$; $|\vec{n}| = m \operatorname{sen}\theta(g - l\omega^2\cos\theta)$; $|\vec{T}| = ml\omega^2 + m\cos\theta(g - l\omega^2\cos\theta)$; $\omega' = \sqrt{\frac{g}{l\cos\theta}}$)