

Mecánica

Victor J. Márquez R.

Mérida, Marzo de 2017

Índice general

1. Movimiento rotacional	2
1.1. Cuerpo rígido	2
1.2. Momento de inercia o inercia rotacional	2
1.2.1. Momento de inercia en un sistema de partículas	3
1.2.2. Momento de inercia en cuerpos con distribuciones continuas de masa	4
1.3. Teorema de los ejes paralelos	8
1.4. Momento angular de una sola partícula	10
1.5. Segunda ley de Newton aplicada a la rotación	11
1.6. Energía cinética rotacional	15
1.7. Movimiento de rodadura	17
1.8. Momento angular de un cuerpo rígido en rotación	21
1.9. Conservación del momento angular	22

*Las matemáticas son una gimnasia
del espíritu y una preparación
para la filosofía.*

Isócrates

Capítulo 1

Movimiento rotacional

1.1. Cuerpo rígido

El movimiento rotacional se da en todos los niveles, desde el movimiento de los electrones en los átomos hasta el movimiento de galaxias enteras. El análisis de este tipo de movimiento se puede simplificar asumiendo que el objeto o sistema de partículas es un cuerpo rígido, esto es, un cuerpo en el cual las distancias mutuas entre sus componentes o partículas permanecen constantes en el tiempo.

El movimiento más general de un cuerpo rígido comprende tanto los movimientos de rotación como los de traslación. Comenzaremos entonces con estudiar primero el movimiento de un cuerpo rígido rotando sobre un eje fijo y luego sí el caso más general en el cual el eje de rotación no está fijo en el espacio.

1.2. Momento de inercia o inercia rotacional

En el caso traslacional, la masa es una medida de la tendencia de un cuerpo a resistirse a cambios en su movimiento lineal, es decir, la masa es una propiedad de un cuerpo que especifica cuánta inercia tiene.

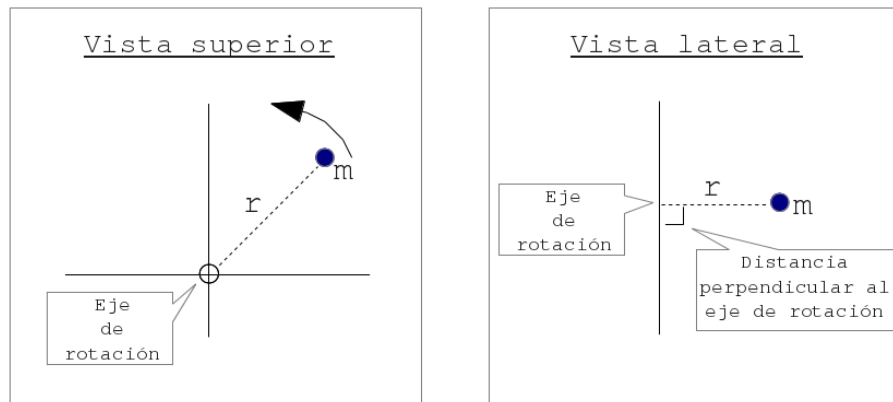
Ahora, en el caso rotacional, la medida de la resistencia de un cuerpo a cambios

en su movimiento rotacional se define como momento de inercia, y a diferencia de la masa que posee un valor independiente de su entorno, el momento de inercia puede tener distintos valores para distintos ejes de rotación.

Para una partícula de masa m que gira alrededor de un eje fijo, el momento de inercia depende de su masa y de la distancia perpendicular r entre la partícula y el eje de rotación, esto es,

$$I = mr^2 \quad (1.1)$$

El momento de inercia I puede tratarse como un escalar en las rotaciones alrededor de un sólo eje.



1.2.1. Momento de inercia en un sistema de partículas

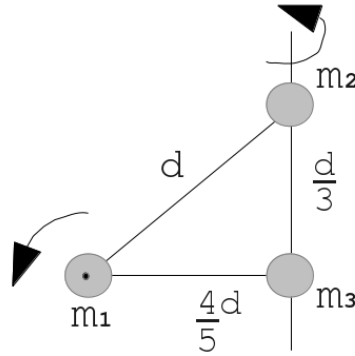
Para un cuerpo rígido formado por N partículas que giran alrededor del mismo eje, el momento de inercia viene dado por:

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_N r_N^2, \quad (1.2)$$

$$I = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2, \quad (1.3)$$

donde m_i es la masa de cada partícula y r_i es la distancia perpendicular entre cada masa y el eje de rotación.

Ejemplo: Considere un cuerpo rígido formado por 3 masas m_1 , m_2 y m_3 , unidas por varillas de masa despreciable, donde $m_2 = \frac{1}{3}m_1$ y $m_3 = \frac{2}{3}m_1$. Calcule el momento



de inercia de este cuerpo para un eje que pasa por el centro de m_1 y es perpendicular al plano del diagrama, y para un eje que pasa por m_2 y m_3 .

Para el eje que pasa por m_1 :

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \sum_{i=1}^3 m_i r_i^2, \\
 &= m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2, \\
 &= m_1(0) + \frac{1}{3}m_1 d^2 + \frac{2}{3}m_1 \left(\frac{4}{5}d\right)^2 \\
 &= \frac{73}{75}m_1 d^2
 \end{aligned}$$

Para el eje que pasa por m_2 y m_3 :

$$\begin{aligned}
 I_{23} &= \sum_{i=1}^3 m_i r_i^2, \\
 &= m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2, \\
 &= m_1 \left(\frac{4}{5}d\right)^2 + \frac{1}{3}m_1(0) + \frac{2}{3}m_1(0) \\
 &= \frac{16}{25}m_1 d^2
 \end{aligned}$$

Vemos que $I_1 > I_{23}$, lo cual indica que el cuerpo ejerce mayor resistencia si se desea rotar sobre el eje que pasa por m_1 .

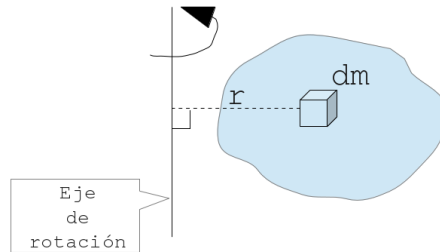
1.2.2. Momento de inercia en cuerpos con distribuciones continuas de masa

El momento de inercia de un cuerpo de masa continua M se puede obtener dividiendo el objeto en muchos elementos iguales de masa Δm_i . Cada elemento

Δm_i va a estar a una distancia perpendicular r_i del eje de rotación. Así, usando la definición de la ecuación 1.3 y tomando el límite de esta suma cuando $\Delta m_i \rightarrow 0$, obtenemos

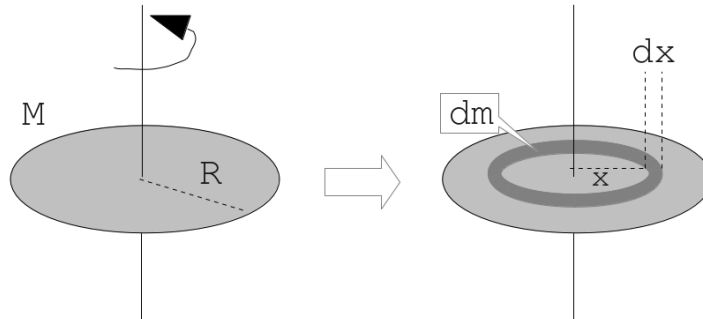
$$I = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} \Delta m_i r_i^2 \quad (1.4)$$

$$I = \int r^2 dm \quad (1.5)$$

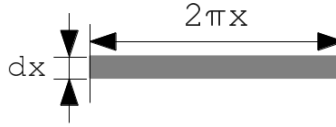


Recordemos que para expresar el diferencial de masa dm en función de los diferenciales de longitud, área o volumen, hacemos uso de las densidades de masa lineal λ , de superficie σ , o de volumen ρ .

Ejemplo 1: Calcular el momento de inercia de un disco plano uniforme de masa M y radio R respecto a un eje perpendicular al plano del disco y que pasa por su centro; y respecto a un eje que pasa por el centro pero en el plano del disco.



Para hallar el momento de inercia respecto a un eje perpendicular al plano del disco y que pasa por su centro (I_A), tomamos como elemento de masa un anillo (o una franja) de radio x y anchura dx , que al cortarlo y extenderlo, se convierte en un rectángulo de longitud $2\pi x$ y anchura dx . De esta forma, el diferencial de área para esta franja sería $dA = 2\pi x dx$.



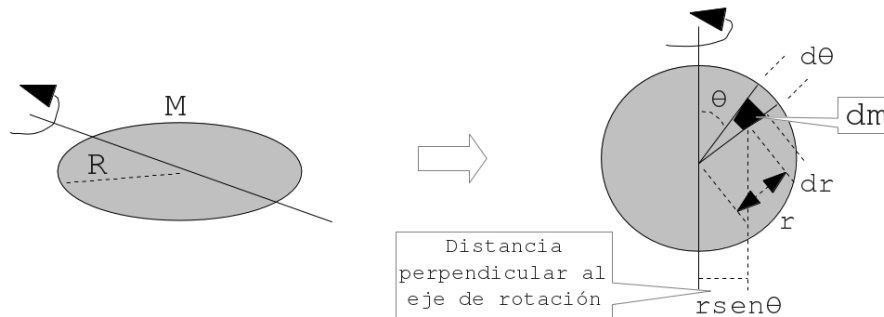
Dado que la distribución de masa es uniforme en el disco, se tiene que $\sigma = \frac{M}{A} = \frac{M}{\pi R^2}$ y también que $\sigma = \frac{dm}{dA} = \frac{dm}{2\pi x dx}$. Al igualar estas expresiones, nos queda,

$$\begin{aligned} \frac{M}{\pi R^2} &= \frac{dm}{2\pi x dx} \\ dm &= \frac{2M x dx}{R^2} \end{aligned}$$

Teniendo definido el diferencial de masa, procedemos a calcular el momento de inercia.

$$I_A = \int r^2 dm = \int_0^R \frac{2M x^2 x dx}{R^2} = \frac{2M}{R^2} \int_0^R x^3 dx = \frac{2M}{R^2} \frac{x^4}{4} \Big|_0^R = \frac{2M}{R^2} \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} M R^2$$

Para hallar el momento de inercia respecto a un eje que pasa por el centro pero en el plano del disco (I_B), hacemos $dA = d\theta r dr$.



Tenemos que $\sigma = \frac{dm}{dA} = \frac{dm}{d\theta r dr}$, que al igualar al σ del disco, nos queda,

$$\begin{aligned} \frac{M}{\pi R^2} &= \frac{dm}{d\theta r dr} \\ dm &= \frac{M d\theta r dr}{\pi R^2}, \end{aligned}$$

y teniendo que la distancia perpendicular del diferencial de masa dm al eje de rotación es $r \text{ sen } \theta$, calculamos el momento de inercia.

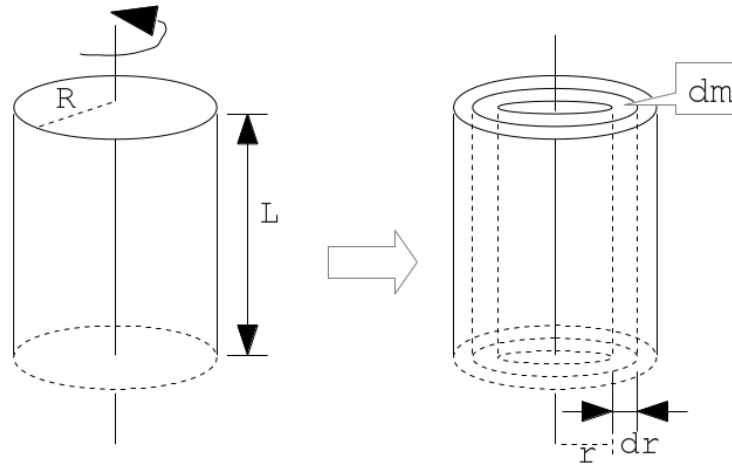
$$I_B = \int r^2 dm = \int (r \text{ sen } \theta)^2 \left(\frac{M}{\pi R^2} d\theta r dr \right) = \frac{M}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R \text{sen}^2 \theta d\theta r^3 dr$$

$$I_B = \frac{M}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \frac{r^4}{4} \Big|_0^R = \frac{MR^4}{4\pi R^2} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \quad \left(\text{usamos } \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos \theta}{2} \right)$$

$$I_B = \frac{MR^2}{4\pi} \left[\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos 2\theta d\theta \right] \quad (\text{hacemos } 2\theta = u; 2d\theta = du; d\theta = du/2)$$

$$I_B = \frac{MR^2}{4\pi} \left[\frac{1}{2} (\theta) \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \cos u du \right] = \frac{MR^2}{4\pi} \left[\frac{2\pi}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\theta \Big|_0^{2\pi} \right] = \frac{1}{4} MR^2$$

Ejemplo 2: Calcular el momento de inercia de un cilindro sólido uniforme de masa M , radio R y altura L respecto a un eje que pasa por el centro de las tapas.



Como elemento de masa dm tomamos una capa cilíndrica cuyo radio interior sea r y radio exterior sea $r + dr$, y sea de altura fija L .

Para hallar el diferencial de volumen hacemos

$$dv = \text{volumen externo} - \text{volumen interno},$$

es decir,

$$\begin{aligned} dv &= L\pi(r + dr)^2 - L\pi r^2 \\ &= L\pi(r^2 + 2rdr + dr^2 - r^2) \end{aligned}$$

($dr \approx 0$ ya que dr es muy pequeño)

$$dv = 2L\pi r dr$$

Ya que el cilindro es uniforme, la densidad de masa ρ es igual para el cilindro como para el diferencial de masa dm . De esta forma tenemos,

$$\begin{aligned}\frac{M}{V} &= \frac{dm}{dv} \\ \frac{M}{\pi R^2 L} &= \frac{dm}{2L\pi r dr} \\ dm &= \frac{2M}{R^2} r dr\end{aligned}$$

Habiendo ya definido nuestro diferencial de masa, procedemos a calcular el momento de inercia.

$$\int r^2 dm = \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{2M}{R^2} \frac{r^4}{4} \Big|_0^R = \frac{2M}{R^2} \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} MR^2$$

1.3. Teorema de los ejes paralelos

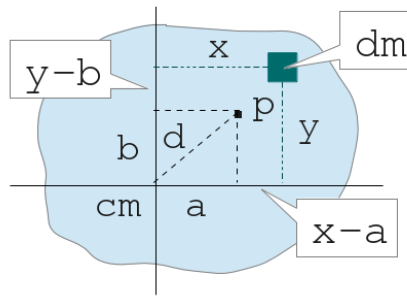
Cuando los ejes de rotación coinciden con algún eje de simetría, los momentos de inercia son relativamente fáciles de calcular. Sin embargo, cuando se tiene un eje arbitrario, éste cálculo puede ser más engorroso. En estos casos, se puede hacer uso de una relación simple entre el momento de inercia I_{cm} de un cuerpo de masa M alrededor de un eje que pasa por el centro de masa y el momento de inercia I_p alrededor de cualquier otro eje paralelo a éste pero desplazado a una distancia d . Esta relación, llamada teorema de los ejes paralelos viene dada por:

$$I_p = I_{cm} + Md^2 \tag{1.6}$$

Demostración: Considere dos ejes paralelos que pasan perpendicularmente por una figura plana de masa M , uno que pasa por el centro de masa y el otro por un punto P . La figura está en el plano xy y los ejes son paralelos al eje z . Haremos que el origen o coincida con el centro de masa, de modo que $x_{cm} = y_{cm} = z_{cm} = 0$. La distancia entre ambos ejes es d , donde $d^2 = a^2 + b^2$.

Sea dm un elemento de masa con coordenadas (x, y) . El momento de inercia I_{cm} viene dado por

$$I_{cm} = \int r_{cm}^2 dm = \int (x^2 + y^2) dm$$



El momento de inercia I_p viene dado por:

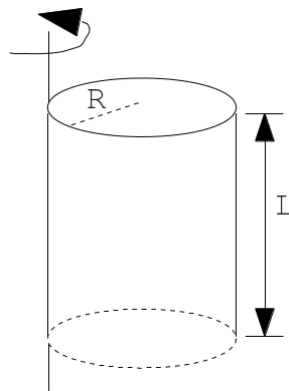
$$\begin{aligned}
 I_p &= \int r_p^2 dm = \int [(x-a)^2 + (y-b)^2] dm \\
 &= \int (x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2) dm \\
 &= \underbrace{\int (x^2 + y^2) dm}_{I_{cm}} - \underbrace{2a \int x dm - 2b \int y dm}_{\text{Coordenadas } x_{cm} \text{ y } y_{cm} \text{ que son cero}} + \underbrace{(a^2 + b^2)}_{d^2} \underbrace{\int dm}_{M \text{ del objeto}}
 \end{aligned}$$

Y nos queda entonces,

$$I_p = I_{cm} + Md^2. \quad (1.6)$$

Este teorema se conoce también como teorema de Steiner.

Ejemplo: Calcular el momento de inercia de un cilindro sólido uniforme de masa M , radio R y altura L respecto a un eje perpendicular a las tapas que pasa por uno de los extremos del cilindro.



Ya que el eje que estamos tomando en cuenta ahora es paralelo al eje que habíamos calculado previamente, podemos escribir,

$$I_p = I_{cm} + Md^2$$

Y teniendo que $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$, ya que el momento de inercia para un eje que pasa por el medio de las tapas pasa también por el centro del masa del cilindro, nos queda,

$$I_p = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$$

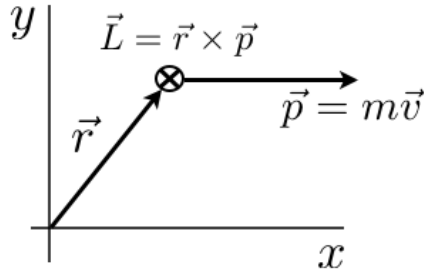
De esta forma hemos hallado el momento de inercia para un eje que, de haberlo calculado integrado, hubiese sido mucho más complicado.

1.4. Momento angular de una sola partícula

El momento angular de una sola partícula de masa m se define como el vector

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}, \quad (1.7)$$

donde \vec{r} es el vector posición de la partícula respecto a un origen o y \vec{p} es su momentum lineal.



El momento angular es una medida del movimiento de rotación. El momento angular, a diferencia del momentum lineal, depende de la elección del origen, ya que el vector posición \vec{r} depende del origen.

La derivada de \vec{L} con respecto al tiempo viene dada por:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{L}} &= \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = (\dot{\vec{r}} \times \vec{p}) + (\vec{r} \times \dot{\vec{p}}) \\ &= \cancel{(\vec{v} \times m\vec{v})} + [\vec{r} \times (m\ddot{\vec{r}} + \frac{dm}{dt}\vec{v})] \\ &= \vec{r} \times \vec{F} \end{aligned}$$

Que podemos escribir como:

$$\tau = \dot{\vec{L}} = \vec{r} \times \vec{F}, \quad (1.8)$$

y se denota como el torque neto τ alrededor de o en la partícula de masa m . La ecuación 1.8 es la forma rotacional de la segunda ley de Newton.

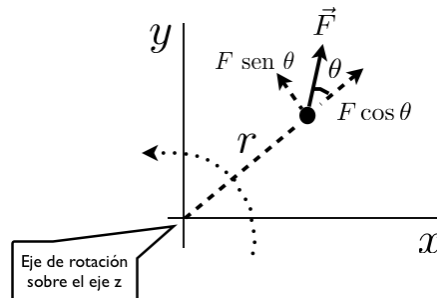
En problemas de una partícula, se puede tomar el origen o de modo tal que el torque neto sea cero, lo cual implicaría que $\dot{\vec{L}} = 0$, es decir, que el momento angular de la partícula con respecto a o se conserva (es constante).

En la tabla que se muestra a continuación podemos apreciar una analogía entre \vec{p} y \vec{L} .

Momentum lineal	Momento angular
$\vec{p} = m\vec{v}$	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$
$\vec{r} = \vec{F}$	$\dot{\vec{L}} = \vec{\tau}$
(fuerza)	(torque)

1.5. Segunda ley de Newton aplicada a la rotación

Considere una partícula de masa m que puede girar libremente alrededor de un eje que está a una distancia fija perpendicular r . A la partícula se le aplica una fuerza \vec{F} en una dirección arbitraria en un ángulo θ con la línea de r .



La fuerza \vec{F} en coordenadas polares viene dada por $\vec{F} = F \text{sen } \theta \hat{\theta} + F \text{cos } \theta \hat{r}$. Al aplicar la segunda ley de Newton en coordenadas polares planas, tenemos,

$$\sum \vec{F} = \vec{F} = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}, \quad (1.9)$$

que en componentes nos queda,

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F \text{cos } \theta \quad (1.10)$$

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = F \text{sen } \theta \quad (1.11)$$

Nos enfocaremos en la componente tangencial, ya que en este eje actúa la fuerza que hace rotar a la partícula. Teniendo que r es un valor fijo,

$$mr\ddot{\theta} = F \text{ sen } \theta, \quad (1.12)$$

multiplicando por r ambos lados,

$$mr^2\ddot{\theta} = rF \text{ sen } \theta. \quad (1.13)$$

El factor mr^2 ya lo hemos visto previamente y lo definimos como el momento de inercia $I = mr^2$ de una partícula de masa m . El miembro derecho de la ecuación 1.13 representa la magnitud del producto cruz del vector \vec{r} y \vec{F} , es decir,

$$|\vec{r} \times \vec{F}| = rF \text{ sen } \theta, \quad (1.14)$$

siendo $\vec{r} \times \vec{F}$ una cantidad que ya hemos introducido previamente en la ecuación 1.8 como torque.

Es importante resaltar que el torque no es una fuerza. El torque es una cantidad vectorial que mide la capacidad que tiene una fuerza para hacer que un cuerpo gire. La palabra torque proviene del latín, de la palabra *torquere* que significa torcer o torsión.

Tenemos entonces que el torque que actúa sobre una partícula es proporcional a su aceleración angular, y en forma general, para n cantidad de torques, tenemos:

$$\sum \tau_{\text{ext}, \odot} = I\ddot{\theta}. \quad (1.15)$$

La ecuación 1.15 es la forma rotacional de la segunda ley de Newton alrededor de un eje fijo (eje $z \odot$ en este caso). Vea su similitud con la forma traslacional $\sum \vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$.

En un objeto de masa extendida, además de las fuerzas externas que pueden haber, existen fuerzas internas actuando entre las partículas o piezas que conforman este objeto. En nuestro caso de estudio, asumiremos que las fuerzas internas son centrales, es decir, que están dirigidas en la línea imaginaria que conecta las partículas, y tenemos a través de la tercera ley de Newton que existe una acción-reacción entre una y otra partícula. Entonces, para N partículas, el momento angular total del sistema es

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{p}_i. \quad (1.16)$$

La fuerza que actúa en cada partícula sería:

$$\vec{F}_{\text{ext},i} + \vec{F}_{\text{int},i} = \frac{d\vec{p}_i}{dt}, \quad (1.17)$$

y nos queda entonces que,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{p}_i \quad (1.18)$$

$$= \sum_{i=1}^N \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \times \vec{p}_i \right) + \sum_{i=1}^N \left(\vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} \right) \quad (1.19)$$

$$= \sum_{i=1}^N (\dot{\vec{r}}_i \times m \dot{\vec{r}}_i) + \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i \times (\vec{F}_{\text{ext},i} + \vec{F}_{\text{int},i})] \quad (1.20)$$

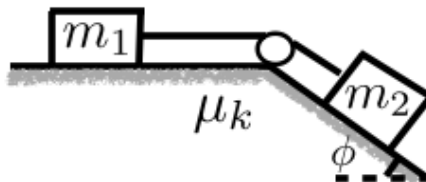
$$= \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_{\text{ext},i} + \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_{\text{int},i}, \quad (1.21)$$

y finalmente nos queda

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^N \tau_{\text{ext},i}. \quad (1.22)$$

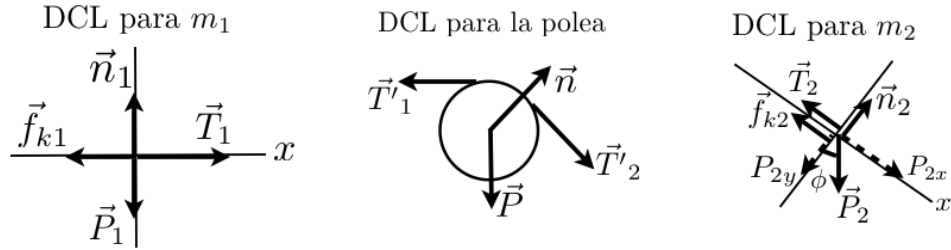
Los torques internos son cero debido a la tercera ley de Newton. Además, esto es razonable ya que un objeto no va a empezar a girar espontáneamente sin una fuerza externa que actúe sobre él. En la ecuación 1.22 podemos ver que el torque total externo puede provenir de fuerzas actuando en distintos puntos.

Ejemplo: Un bloque de masa m_1 y un bloque de masa m_2 están conectados por una cuerda ideal sobre una polea en forma de disco sólido que tiene radio R y masa M . El coeficiente de fricción cinética para ambos bloques es μ_k y el ángulo de inclinación es ϕ . Determine la aceleración del sistema y las tensiones en la cuerda en ambos lados de la polea.



A pesar de que sea una sola cuerda en el sistema, ahora deben haber dos tensiones para que la polea pueda girar, de lo contrario conllevaría a que el torque neto sea

cero y por lo tanto no gire. Representamos estas fuerzas en los diagramas de cuerpo libre.



Aplicamos segunda ley de Newton en el bloque de masa m_1 :

Eje vertical: $n_1 = m_1g$

Eje horizontal: $T_1 - f_{k1} = m_1\ddot{x}$

Y nos queda

$$T_1 - \mu_k m_1 g = m_1 \ddot{x} \quad (1.23)$$

Aplicamos segunda ley de Newton en el bloque de masa m_2 :

Eje vertical: $n_2 = m_2g \cos \phi$

Eje horizontal: $m_2g \sin \phi - T_2 - f_{k2} = m_2\ddot{x}$

Y nos queda

$$m_2g \sin \phi - T_2 - \mu_k m_2g \cos \phi = m_2 \ddot{x} \quad (1.24)$$

Aplicamos la segunda ley de Newton en la polea tomando positivos los torques que apunten hacia dentro (eje z , \odot) al hacer uso de la regla de la mano derecha. Recordemos también que las componentes de los torques vienen de la definición de la magnitud del producto cruz de dos vectores ($|\vec{r} \times \vec{F}| = rF \sin \theta$, siendo θ el ángulo menor que forman \vec{r} y \vec{F}).

Eje z , \odot : $\sum \tau_z = I\ddot{\theta}$

$$T_2 R \sin 90^\circ - T_1 R \sin 90^\circ + n(0) \sin 0^\circ + P(o) \sin 0^\circ = I_{\text{disco}} \ddot{\theta}$$

(Hacemos $\ddot{x} = \ddot{\theta}r$)

$$T_2 R - T_1 R = \left(\frac{1}{2} M R^2 \right) \left(\frac{\ddot{x}}{R} \right)$$

$$T_2 - T_1 = \frac{M}{2} \ddot{x} \quad (1.25)$$

Sumamos las ecuaciones 1.23, 1.24 y 1.25:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}'_1 - \mu_k m_1 g &= m_1 \ddot{x} \\ m_2 g \sin \phi - \mathcal{T}'_2 - \mu_k m_2 g \cos \phi &= m_2 \ddot{x} \\ \mathcal{T}'_2 - \mathcal{T}'_1 &= \frac{M}{2} \ddot{x} \end{aligned}$$

$$m_2 g (\sin \phi - \mu_k \cos \phi) - \mu_k m_1 g = \left(m_1 + m_2 + \frac{M}{2} \right) \ddot{x}$$

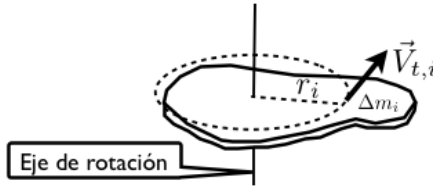
Y obtenemos finalmente

$$\ddot{x} = \frac{[m_2 (\sin \phi - \mu_k \cos \phi) - \mu_k m_1]}{(m_1 + m_2 + \frac{M}{2})} g \quad (1.26)$$

T_1 y T_2 se pueden obtener ahora de 1.23 y 1.25.

1.6. Energía cinética rotacional

Considere un cuerpo rígido que rota sobre un eje fijo con rapidez angular $\dot{\theta}$. El cuerpo rígido está conformado por un conjunto de partículas de masa Δm_i , que están a una distancia perpendicular r_i del eje de rotación.



Cada una de estas partículas tiene energía cinética determinada por su masa y velocidad tangencial $\vec{V}_{t,i}$.

$$T_i = \frac{1}{2} \Delta m_i \vec{V}_{t,i}^2 = \frac{1}{2} \Delta m_i V_{t,i}^2 \quad (1.27)$$

Si expresamos $V_{t,i} = r_i \dot{\theta}_i$, tenemos

$$T_i = \frac{1}{2} \Delta m_i (r_i \dot{\theta}_i)^2 = \frac{1}{2} \Delta m_i r_i^2 \dot{\theta}_i^2 \quad (1.28)$$

Si sumamos la energía cinética de todas las partículas que conforman el objeto, obtenemos la energía cinética total del cuerpo rígido,

$$T = \sum_i T_i = \sum_i \frac{1}{2} \Delta m_i r_i^2 \dot{\theta}_i^2 \quad (1.29)$$

Teniendo que $\dot{\theta}$ es igual para todas las partículas, obtenemos,

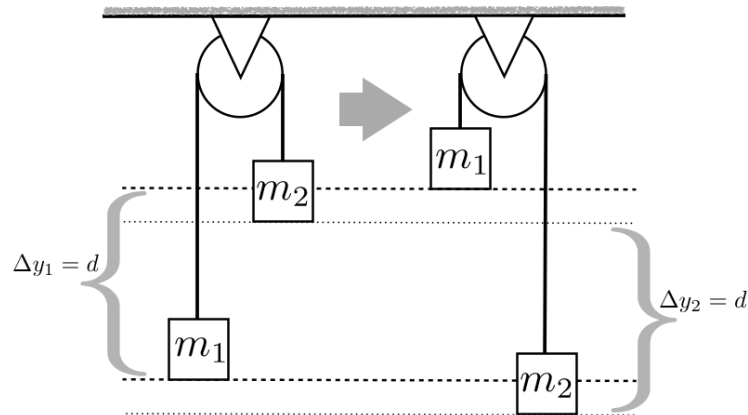
$$T = \frac{1}{2} \left(\sum_i \Delta m_i r_i^2 \right) \dot{\theta}^2 \quad (1.30)$$

y haciendo $\Delta m_i \rightarrow 0$, nos queda finalmente,

$$T = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 \quad (1.31)$$

Siendo la ecuación 1.31 la **energía cinética rotacional**. Vea la analogía con la energía cinética traslacional $T = \frac{1}{2} m V^2$.

Ejemplo: Dos masas m_1 y m_2 están conectadas por una cuerda que pasa sobre una polea en forma de disco con radio R y masa M . La cuerda no desliza y el sistema se suelta desde el reposo. Halle la rapidez lineal de las masas después que la masa m_2 desciende una distancia d , y la rapidez angular de la polea en ese tiempo. El



sistema formado por las dos masas, la polea y la Tierra, está aislado sin fuerzas conservativas que actúen. Por lo tanto, la energía mecánica del sistema se conserva. Definimos la configuración cero para la energía potencial gravitacional a la posición final que tiene m_2 cuando ha descendido. En cuanto a la energía potencial de la polea, debido a que la distancia entre las partículas de un cuerpo rígido no cambia durante el movimiento rotacional, su energía potencial interna permanece igual, y por lo tanto, no tenemos que considerarla cuando explicamos el intercambio de energía del

cuerpo con sus alrededores. Tenemos entonces,

$$\begin{aligned}
 E_{m,o} &= E_{m,f} \\
 \cancel{T_{1,o}} + \cancel{T_{2,o}} + \cancel{T_{\text{polea},o}} + V_{1,o} + V_{2,o} &= T_{1,f} + T_{2,f} + T_{\text{polea},f} + V_{1,f} + \cancel{V_{2,f}} \\
 m_1 g y_{1,o} + m_2 g d &= \frac{1}{2} m_1 v_{1,f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,f}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}_f^2 + m_1 g y_{1,f} \\
 m_2 g d &= \frac{1}{2} m_1 v_{1,f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,f}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} M R^2 \right) \frac{v_f^2}{R^2} + m_1 g \Delta y_1
 \end{aligned}$$

Llamamos $v_{1,f} = v_{2,f} = v_f$, y tenemos,

$$\begin{aligned}
 m_2 g d - m_1 g d &= \frac{1}{2} \left(m_1 + m_2 + \frac{M}{2} \right) v_f^2 \\
 v_f &= \sqrt{\frac{2(m_2 - m_1) g d}{(m_1 + m_2 + \frac{M}{2})}}
 \end{aligned}$$

Y ahora, teniendo que $v_f = R \dot{\theta}$, hallamos la velocidad angular, $\dot{\theta} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{2(m_2 - m_1) g d}{(m_1 + m_2 + \frac{M}{2})}}$.

1.7. Movimiento de rodadura

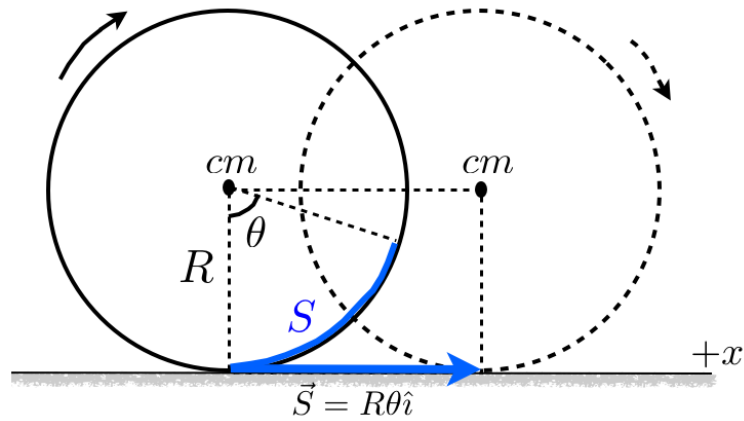
Existen diversos cuerpos rígidos que debido a su geometría, tienen la capacidad de deslizarse, rodar o ambas cosas simultáneamente. Cuando se producen ambas cosas simultáneamente, se tiene un caso de traslación y rotación combinadas que se conoce como **rodamiento sin deslizamiento** o simplemente **rodadura**. El giro de ruedas, aros, cilindros, esferas, etc., son ejemplos conocidos de este movimiento.

A modo de simplificar nuestro estudio, tendremos que el eje siempre sigue la misma dirección en el espacio, esto es, el eje de rotación en un instante es paralelo al eje en cualquier otro instante.

Para que un cuerpo con geometría circular pueda rodar sin deslizarse, el desplazamiento del centro de masa debe coincidir con el arco s correspondiente al ángulo girado.

La velocidad con la que se traslada el centro de masa será la derivada con respecto al tiempo de dicho desplazamiento:

$$\vec{v}_{cm} = \frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{d(R\theta)}{dt} \hat{i} = R \frac{d\theta}{dt} \hat{i} = R \dot{\theta} \hat{i} \quad (1.32)$$



Puesto que la variación del ángulo girado es la velocidad angular de rotación ω , se tiene que

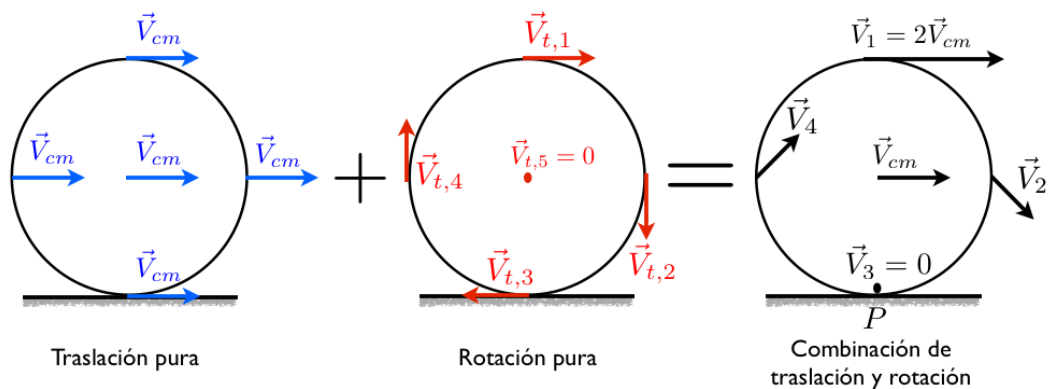
$$v_{cm} = R\dot{\theta} = R\omega \quad (1.33)$$

La ecuación 1.33 se conoce como la **condición de rodadura** y nos da la relación que debe haber entre la velocidad de traslación del centro de masa y la velocidad angular de rotación para que el cuerpo rígido ruede sin deslizar.

Si derivamos la ecuación 1.33 obtenemos la relación entre las aceleraciones lineal y angular,

$$a_{cm} = R\ddot{\theta} = R\alpha \quad (1.34)$$

El movimiento de rodadura puede modelarse como una superposición de traslación pura y rotación pura. Gráficamente, tenemos:



Que la velocidad en el punto P (punto de contacto) sea cero quiere decir que en cada instante dado para el movimiento combinado de traslación y rotación, el objeto

gira alrededor de un *eje de rotación instantáneo* que pasa por el punto de contacto con el suelo. Para ese punto P , tenemos que

$$T = \frac{1}{2}I_p\omega^2, \quad (1.35)$$

donde I_p es el momento de inercia para ese eje. Mediante el teorema de los ejes paralelos tenemos que

$$I_p = I_{cm} + MR^2, \quad (1.6)$$

que al sustituir en ecuación 1.35, tenemos

$$T = \frac{1}{2}(I_{cm} + MR^2)\omega^2 = \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2}M(R\omega)^2, \quad (1.36)$$

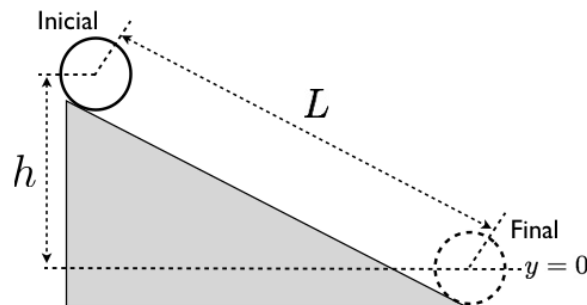
y usando ecuación 1.33, nos queda

$$T = \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{cm}^2. \quad (1.37)$$

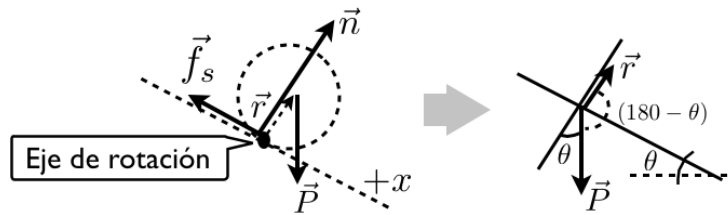
La ecuación 1.37 nos dice que la energía cinética total de un cuerpo que rueda es la suma de la energía cinética rotacional alrededor del centro de masa y la energía cinética de traslación del centro de masa.

Por último, es importante resaltar que la fricción entre el objeto que rueda y la superficie es la causante del rodamiento sin deslizamiento, pero en este caso la fricción no realiza trabajo y no disipa energía, ya que no hay movimiento entre el objeto y la superficie. Si bien en nuestro caso de estudio existe movimiento, la fuerza de fricción es *estática*.

Ejemplo: Un cilindro sólido de masa M y radio R parte del reposo y rueda hacia abajo sin deslizar por un plano inclinado de longitud L y altura h . Halle la velocidad de su centro de masa cuando el cilindro llega abajo.



Usando segunda ley de Newton tenemos,



Traslación:

eje y : $n = Mg \cos \theta$

eje x : $Mg \sin \theta - f_s = M\ddot{x}_{cm}$

Rotación (eje en el punto de contacto):

Tanto \vec{n} y \vec{f}_s tienen torque igual a cero porque están sobre el eje. De la figura vemos que

$$\sin(180 - \theta) = \underbrace{(\sin 180)^0}_{\rightarrow 0}(\cos \theta) - \underbrace{(\cos 180)^{-1}}_{\rightarrow -1}(\sin \theta) = \sin \theta$$

y tenemos

$$\tau = (R)(Mg) \sin(180 - \theta) = RMg \sin \theta = I_p \alpha,$$

teniendo que

$$I_p = I_{cm} + MR^2 = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$$

y nos queda entonces que

$$RMg \sin \theta = \left(\frac{3}{2}MR^2 \right) \left(\frac{\ddot{x}_{cm}}{R} \right)$$

$$\ddot{x}_{cm} = \frac{2}{3}g \sin \theta$$

Usamos $\ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$ y $\sin \theta = \frac{h}{L}$, para hallar la velocidad:

$$\int_0^v v dv = \frac{2}{3}g \frac{h}{L} \int_0^L dx$$

$$\frac{v^2}{2} = \frac{2}{3}g \frac{h}{L} L$$

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$$

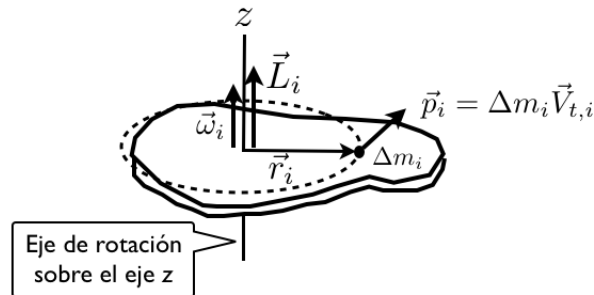
Podemos verificar por conservación de la energía:

$$\begin{aligned}
 E_{m,i} &= E_{m,f} \\
 \cancel{K}_i + V_i &= \cancel{T}_f + \cancel{V}_f \\
 Mgh &= \underbrace{\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{cm}^2}_{T \text{ de rodadura}} \\
 Mgh &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}MR^2 \right) \left(\frac{v_{cm}^2}{R^2} \right) + \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 \\
 gh &= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) v_{cm}^2 \\
 v_{cm} &= \sqrt{\frac{4}{3}gh}
 \end{aligned}$$

1.8. Momento angular de un cuerpo rígido en rotación

Considere un cuerpo rígido como un conjunto de partículas que giran alrededor de un eje fijo. Cada partícula tiene una masa Δm_i y tienen una velocidad tangencial $\vec{V}_{t,i}$, y por lo tanto tienen un momentum lineal $\vec{p}_i = \Delta m_i \vec{V}_{t,i}$. Si hacemos que el origen del sistema de referencia coincida con el eje de rotación, tenemos que la masa Δm_i se encuentra a una distancia \vec{r}_i del origen, y cada partícula tendrá entonces un momento angular

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i. \quad (1.38)$$



Podemos expresar \vec{L}_i como $\vec{L}_i = L_i \hat{k}$, donde

$$\begin{aligned} L_i &= (r_i)(p_i) \text{ sen } \theta_{ryp} \\ &= r_i \Delta m_i V_{t,i} \text{ sen } 90^\circ \\ &= r_i \Delta m_i r_i \omega \\ &= r_i^2 \Delta m_i \omega. \end{aligned}$$

Al hacer la suma de \vec{L}_i sobre todas las partículas, hallamos el momento angular total para el cuerpo rígido

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{L}_i = \underbrace{\sum_{i=1}^N r_i^2 \Delta m_i \omega}_{*} \hat{k} = \left(\sum_{i=1}^N r_i^2 \Delta m_i \right) \omega$$

(*Todos apuntan en la misma dirección porque tienen el mismo ω)

Si hacemos $\Delta m_i \rightarrow 0$, nos queda:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \left(\int r^2 dm \right) \omega \hat{k} \\ &= I \omega \hat{k} \\ &= I \vec{\omega}. \end{aligned} \tag{1.39}$$

Vea la similitud de ecuación 1.39 con el momentum lineal $\vec{p} = m\vec{v}$.

1.9. Conservación del momento angular

La cantidad total de momento angular de un sistema se conserva si el torque externo neto que actúa sobre el sistema es cero, es decir, si el sistema está aislado. Esto es,

$$\sum \vec{\tau}_{\text{ext}} = \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0, \tag{1.40}$$

lo cual implica que \vec{L} total del sistema es constante y por lo tanto,

$$\sum \vec{L}_{\text{inicial}} = \sum \vec{L}_{\text{final}}. \tag{1.41}$$

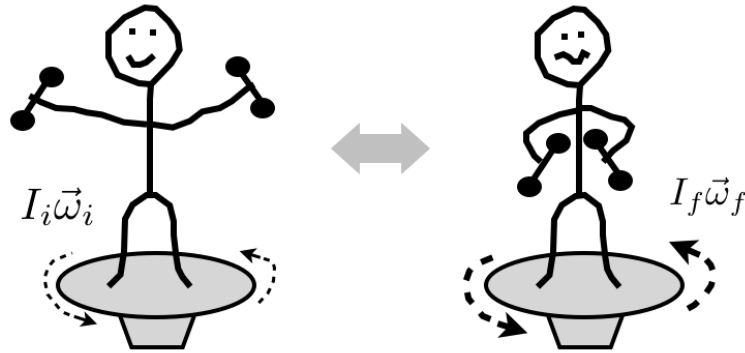
Si la masa de un sistema giratorio aislado experimenta redistribución en alguna forma, el momento de inercia del sistema puede cambiar. Por lo tanto, ya que $\vec{L} = I\vec{\omega}$,

un cambio en I en el sistema aislado requiere un cambio en la velocidad angular $\vec{\omega}$. En este caso tenemos,

$$I_{\text{inicial}}\vec{\omega}_{\text{inicial}} = I_{\text{final}}\vec{\omega}_{\text{final}}. \quad (1.42)$$

Ejemplos:

- Una persona parada sobre una mesa giratoria sin fricción, que sostiene unas pesas con sus brazos. Cuando contrae los brazos acercando las pesas al eje de rotación, disminuye su momento de inercia y por lo tanto aumenta la velocidad angular. Se cumple que $I_{\text{inicial}}\vec{\omega}_{\text{inicial}} = I_{\text{final}}\vec{\omega}_{\text{final}}$, teniendo que $I_{\text{inicial}} > I_{\text{final}}$ y $\vec{\omega}_{\text{inicial}} < \vec{\omega}_{\text{final}}$.



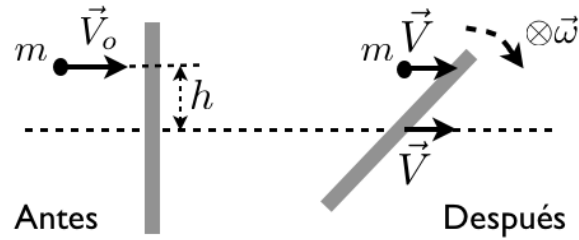
- Los patinadores en patinaje artístico sobre hielo, ponen sus brazos junto a su cuerpo para disminuir su momento de inercia y por lo tanto girar con mayor rapidez angular.

Colisiones y conservación del momento angular

Ahora que hemos visto la conservación del momento angular, podemos extender nuestro estudio en colisiones a casos que involucran rotación de objetos. A diferencia de la conservación del momentum lineal, que siempre se puede usar en cualquier sistema aislado, la conservación del momentum angular aplica para sistemas aislados bajo la condición de que \vec{L} sea calculado respecto al origen de un sistema de referencia inercial.

Ejemplo 1 - Colisión elástica: Un disco de masa m se desplaza con una rapidez v_o en dirección perpendicular a una barra de masa m y longitud l , que está inicialmente en reposo sobre una superficie sin fricción. ¿A qué distancia del centro

de la barra debe chocar elásticamente el disco para que el disco y el centro de masa de la barra se muevan con la misma rapidez después de la colisión?



Debido a que el disco y la barra forman un sistema aislado, y se tiene una colisión perfectamente elástica, tenemos que la energía total, el momentum lineal y el momento angular se conservan todos, esto es,

$$E_i = E_f$$

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f$$

$$\vec{L}_i = \vec{L}_f,$$

y ya que se tienen tres incógnitas: V , ω y h , con las tres ecuaciones podemos resolver el problema.

Conservación de \vec{p} (trabajamos con magnitudes porque \vec{p} se conserva en una dimensión):

$$mv_o = mv + mv$$

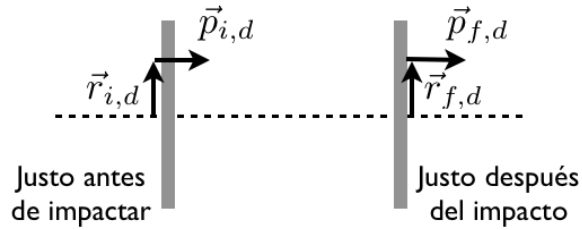
$$v_o = 2v$$

$$v = \frac{v_o}{2}$$

Conservación de E (Usaremos D para el disco y B para la barra):

$$\begin{aligned}
 T_{i,D} + T_{i,B} + V_{i,D} + V_{i,B} &= T_{f,D} + T_{f,B} + T_{f,Brot} + V_{f,D} + V_{f,B} \\
 \frac{1}{2}mv_o^2 &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_B\omega^2 \\
 mv_o^2 &= 2m\left(\frac{v_o}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{12}ml^2\right)\omega^2 \\
 v_o^2 &= 2\frac{v_o^2}{4} + \frac{1}{12}l^2\omega^2 \\
 \frac{1}{2}v_o^2 &= \frac{1}{12}l^2\omega^2 \\
 \omega &= \sqrt{\frac{6v_o^2}{l^2}} \\
 \omega &= \sqrt{6}\frac{v_o}{l}
 \end{aligned}$$

Conservación de \vec{L} (Tomamos el origen en el punto fijo del espacio que coincide con la ubicación inicial del centro de la barra):

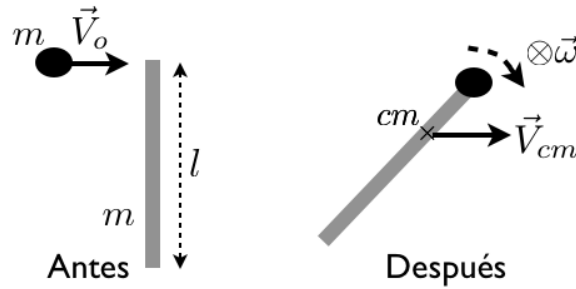


$$\begin{aligned}
 \sum L_{i,z} &= \sum L_{f,z} \\
 L_{i,D} + L_{i,B} &= L_{f,D} + L_{f,B},
 \end{aligned}$$

acá tenemos que $r_{i,D} = r_{f,D} = h$, y nos queda

$$\begin{aligned}
 (h)(mv_o)\text{sen } 90^\circ &= (h)(mv)\text{sen } 90^\circ + I_B\omega \\
 hmv_o &= hm\frac{v_o}{2} + \left(\frac{1}{12}ml^2\right)\left(\sqrt{6}\frac{v_o}{l}\right) \\
 \frac{h}{2} &= \frac{1}{12}l\sqrt{6} \\
 h &= \frac{l}{\sqrt{6}}
 \end{aligned}$$

Ejemplo 2 - Colisión inelástica: Una masa m se desplaza con una rapidez v_o en dirección perpendicular a una barra de masa m y longitud l , que está inicialmente en reposo sobre una superficie sin fricción. La masa choca de manera totalmente inelástica con la barra en uno de sus extremos. ¿Cuál es la velocidad de traslación y velocidad angular resultante del sistema? Primero, por conservación de \vec{p} :



$$mv_o = (m + m)v_{cm}$$

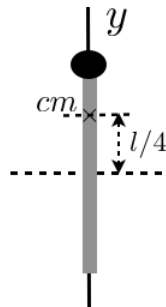
$$mv_o = 2mv_{cm}$$

$$v_{cm} = \frac{v_o}{2}$$

Que v_{cm} sea $\frac{v_o}{2}$ indica que el sistema se mueve en la dirección inicial que tenía la masa m , es decir, en línea recta. Por lo tanto, luego del impacto el sistema rotará alrededor del centro de masa del sistema.

Para la parte rotacional, debemos hallar el centro de masa del sistema para el momento justo después de la colisión. Si lo calculamos respecto al centro de la barra, tenemos

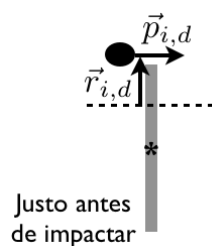
$$y_{cm} = \frac{(m)(\frac{l}{2}) + m(0)}{m + m} = \frac{m\frac{l}{2}}{2m} = \frac{l}{4}$$



El momento de inercia del sistema para el eje en el centro de masa sería

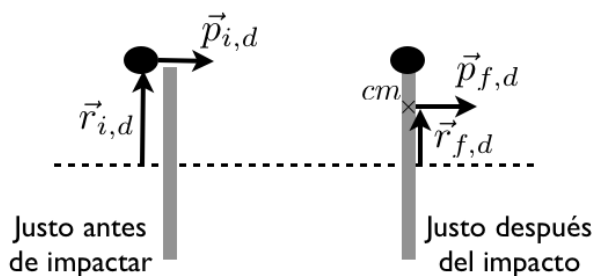
$$I_{cm} = I_{cm,B} + I_{cm,D} = \underbrace{\left[\frac{1}{12}ml^2 + m \left(\frac{l}{4} \right)^2 \right]}_{\text{ejes paralelos para } I_{cm,B}} + m \left(\frac{l}{4} \right)^2 = \frac{5}{24}ml^2$$

Aplicamos conservación de \vec{L} para hallar ω , tomando el origen en el centro de masa del sistema después de la colisión.



$$\begin{aligned} \sum L_{i,z} &= \sum L_{f,z} \\ \left(\frac{l}{4} \right) (mv_o) \sin 90^\circ &= I_{cm} \omega \\ \frac{l}{4} mv_o &= \frac{5}{24} ml^2 \omega \\ \omega &= \frac{6}{5} \frac{v_o}{l} \end{aligned}$$

También se puede aplicar conservación de \vec{L} tomando el origen en el centro de la barra.



De esta forma sería,

$$\begin{aligned}\sum L_{i,z} &= \sum L_{f,z} \\ \left(\frac{l}{2}\right) (mv_o) \text{sen } 90^\circ &= I_{cm} \omega + \left(\frac{l}{4}\right) (2mv_{cm}) \text{sen } 90^\circ \\ \frac{l}{2} mv_o &= \frac{5}{24} ml^2 \omega + \frac{l}{4} (2m) \frac{v_o}{2} \\ \frac{v_o}{2} - \frac{v_o}{4} &= \frac{5}{24} l \omega \\ \frac{v_o}{4} &= \frac{5}{24} l \omega \\ \omega &= \frac{6 v_o}{5 l}\end{aligned}$$