π por Monte Carlo*

W. Barreto
Noviembre, 2008

Monte Carlo, como todos saben, es una localidad del Principado de Mónaco, famosa por sus casinos. También es el nombre que recibe un método estadístico para resolver problemas numéricos mediante un modelo probabilístico.

Las probabilidades permiten describir exhaustivamente a la Naturaleza y el mundo real mediante las leyes que gobiernan el azar. La noción de exactitud de los físicos no es mas que un valor promedio de una compleja estructura. Los valores promedios pudieran conducir a confusiones o interpretaciones incorrectas. Científicos brillantes pensaron que las leyes de las probabiblidades aplicadas a la física, por ejemplo, representaban el testimonio de nuestra ignorancia, mas que una descripción válida de las leyes de la naturaleza. Y no les faltaba razón porque las leyes de las probabilidades son aplicables en situaciones donde desconocemos "las ecuaciones que gobiernan el movimiento" para poder hacer predicciones con razonable aproximación. También se puede decir que la probabilidad es la medida del grado de incertidumbre, esto es, de nuestra ignorancia sobre el fenómeno estudiado. La descripción probabilística es factible debido a la información incompleta y a la complejidad de un sistema, así como por la aleatoriedad de ciertos procesos. Más adelante precisaremos lo que entendemos por aleatorio mediante un ejemplo concreto.

π aparece en las matemáticas con cierta frecuencia. Quizás una de las formas más fascinantes en que surge es la siguiente. En el año 1777, George Louis Leclerc, Conde de Buffon, más conocido como Buffon, planteó y resolvió el siguiente problema. Sea un palillo de longitud L que lanzamos de cualquier modo (aleatóreamente) sobre un plano horizontal rayado con rectas paralelas separadas entre ellas por una distancia d (en principio mayor que L) ¿Cuál es la probabilidad de que el palillo intersecte una de esas líneas? Por aleatorio entenderemos que cualquier posición (respecto al centro) y cualquier orientación (respecto a la horizontal) del palillo son igualmente probables y que estas dos variables aleatorias son independientes. Sea y la distancia desde el centro del palillo a la línea horizontal más cercana, y sea ϕ su orientación respecto a la misma línea. Sólo requerimos considerar una línea porque las otras representan una repetición de la misma solución. Si uno realiza el experimento y registra los pares (y, ϕ) para cualquier lanzamiento, entonces los puntos se distribuirán al azar pero con uniformidad en el "área" definida por $y \in [0, d/2]$ y $\phi \in [0, \pi]$. Mientras más grande sea el número de lanzamientos, más uniforme será la distribución y más caótica lucirá. Realicemos el experimento haciendo $L = d$, esto es, la separación entre líneas paralelas igual al tamaño del palillo.

Contemos el número de palillos que cruzan o al menos tocan cualquier línea, digamos que es $N(A)$; hagamos la razón R respecto al número total de lanzamientos N, es decir, $R = N(A) : N = N(A)/N$. Ahora calculemos el número $X = 2/R$ para, digamos, cada cien lanzamientos. ¿Qué observas? ¿a cuánto tiende ese número y por qué? Si lanzas un palillo quinientas veces o quinientos palillos una vez, el resultado será más o menos siempre el mismo. Para $N = 500$ el resultado X sospechosamente se ubica alrededor de 3. Si puedes repetir el experimento varias veces tanto mejor... ¿me crees? ¿por qué ocurre esto? ¿por qué X tiende siempre al mismo número? ¿será que X es igual a π?

```
program pi_por_monte_carlo
implicit logical (a-z)
double precision x0,xa,x1,x2
integer i,j,n,nout,iseed
x0=0.d0
j=0
n=1000000000
nout=1000000
write(*,*) 'Escriba cualquier nmero entero'
read(*,*) iseed
call srand(iseed)
do i=1,n
   x0=rand(0)
   xa=3.141592653589793d0*rand(0)
   x1=sin(xa)
   if(x0.lt.x1) j=j+1
   if (mod(i,nout).eq.0) then
      x2=2.d0*dble(i)/dble(j)
      write(*,'(i10,f10.6)') i,x2
   end if
end do
end program
```

TABLA I: Programa en FORTRAN para simular el experimento de Buffon.

Buffon resolvió su problema de la siguiente manera. Cualquier punto en el "area" de lanzamiento corresponde a una y sólo una posible combinación de la posición y y orientación ϕ del palillo. Puesto que todas las combinaciones son equiprobables y el "área" $d\pi/2$ representa la

*versión del capítulo 15 del libro: a history of π, de petr beckmann, St. Martin Press, New York, Third Ed. (1974)

suma de todas las posibilidades que puedan surgir. Sin embargo, no todas las posibilidades resultarán en una intersección del palillo con una línea. Tal intersección tomará lugar si $y < \frac{1}{2}L\, sen\phi$, esto es, para posiciones y orientaciones que correspondan a los puntos por debajo de la curva $y = \frac{1}{2}L\, sen\phi$, tal que la suma de todas las posibilidades que resultan en la intersección del palillo está dada por el "área" bajo esta curva. Si, entonces, la probabilidad es la razón entre el número de eventos favorables y el número de eventos posibles, bajo ciertas condiciones, la probabilidad de intersección estará dada por el radio entre el "área" bajo la curva y el "área" total, $2L : d\pi$, y este número debe coincidir con R para un número muy grande de lanzamientos (es necesario que los puntos correspondientes a los pares (y, ϕ) cubran toda o casi toda el "área"). De inmediato se desprende lo que sospechábamos, si $L = d$ entonces $R = 2/\pi$, pero es importante que el número de lanzamientos sea muy grande.

N	$2/R$
1.000	3.144654
10.000	3.132341
100.000	3.141493
1.000.000	3.139353
10.000.000	3.142407
100.000.000	3.141211
1.000.000.000	3.141530
∞	π

TABLA II: Resultados de una simulación de Monte Carlo para el experimento de Buffon.

Ahora queremos reproducir el experimento mediante una simulación. En este caso debemos generar dos números aleatorios independientes que representen al par (y, ϕ). Este método se conoce como el de Monte Carlo. Así, podemos simular millardos de lanzamientos para encontrar con suficiente precisión una buena aproximación al número π. En la Tabla I se muestra un listado de un programa en FORTRAN que simula el referido experimento. La Tabla II muestra el resultado de $2/R$ para un cierto número de lanzamientos N.

Es evidente la importancia de las simulaciones como herramienta para la exploración de las matemáticas, el mundo físico y el desarrollo tecnológico a través de la ingeniería. Si las probablidades son las matemáticas del siglo XX ¿cuáles serán las matemáticas del siglo XXI?