$e = 2,7182818284...$
Sobre su *pedigree* financiero y matemático

W. Barreto
Noviembre, 2008

La biografía de e no figura tan antigua como la de π, pero casi. Si observamos la Naturaleza podremos inferir que en la geometría de un Caracol, en un Girasol, en una Galaxia, está contenido el número e. En efecto, cualquier objeto geométrico o natural, cosmológico o subnuclear, que tenga forma o describa una trayectoria espiral logarítmica, contiene al maravilloso número e. Así, una vez que e apareció en la escena de las matemáticas como tal, buscamos retrospectivamente su presencia; desde el origen del Universo y de nuestra civilización, hasta en las invenciones, en el arte, en la música y un largo etcétera.

Si nos centramos en la salida a escena del número e, nos tendremos que referir a su *pedigree* financiero. Mucho antes de la invención del cálculo diferencial se calculaban intereses compuestos a partir de un monto semilla inicial. Entonces, posiblemente la fecha del reconocimiento de e se remonta a los tiempos de los orígenes de la banca. En consecuencia, se relaciona con el mundano problema del crecimiento del dinero, a partir de un monto semilla. Por cierto, el nombre e se debe al padre fundador: Leonhard Euler. Hay evidencia de que el número $2,7182818284...$, sin llamarse oficialmente e, era conocido por los matemáticos medio siglo antes de la invención del cálculo diferencial. Pero se tuvo que esperar hasta Euler, hacia la primera mitad del siglo XVIII, para reconocer a e como la base natural de los logaritmos (inventados independientemente por el relojero suizo Joost Bürgi hacia 1588 y por John Napier, quien publicó su invención en 1614, pero éstas son otras historias). Nos ocuparemos de dos historias, que no son cuentos: La de su origen financiero y la de la cuadratura de la hipérbola rectangular. Debo aclarar que esta breve biografía está basada en el libro *e: the story of a number* por Eli Maor, Princeton University Press (1994).

Primera Historia: Asuntos financieros

Si prestas dinero a uno de mi pueblo,
al pobre que habita contigo,
no serás con él usurero;
no le exigiréis interés.
Éxodo 22:24

Vamos a estar claros, desde tiempos inmemoriales el dinero es lo que importa, cuando se trata de bienestar y seguridad financiera. Neurálgico a cualquier consideración monetaria es el concepto de *interés*, o dinero pagado sobre un préstamo. La práctica de hacer cargos por el dinero prestado se remonta a los albores de la historia registrada. Por ejemplo, en una tabla de arcilla de Mesopotamia que data de 1.700 a.C., ahora en el Louvre, plantea el siguiente problema: ¿Cuánto tiempo tomará para que una cantidad de dinero se duplique si se invierte a 20 por ciento de interés compuesto anual? Veamos cómo funciona el interés *compuesto*. Supongamos que invertimos $Bs.100$ (que denominaremos P) en una cuenta que paga 5 por ciento de interés, compuesto anualmente. Al final del año nuestro balance será $Bs.100 \times 1,05 = Bs.105$. El banco tendrá que considerar esta cantidad como la nueva P que será reinvertida a la misma tasa de interés anual. Al final del segundo año el balance será $Bs.105 \times 1,05 = Bs.110,25$, al final del tercer año $Bs.110,25 \times 1,05 = Bs.115,76$, y así sucesivamente. Observamos que nuestro balance crece en una progresión geométrica con un radio común de 1,05. En una cuenta que pague interés *simple* la tasa anual se aplica al monto P que será el mismo cada año. Habiendo invertido $Bs.100$ a 5 por ciento de interés simple, el balance se incrementará en $Bs.5$ anual, resultando la progresión aritmética 100, 105, 110, 115 y así sucesivamente. Claramente el monto invertido a interés compuesto –a cualquier tasa– crecerá eventualmente más rápido que si invertimos a interés simple.

Del ejemplo anterior es fácil ver lo que sucede en el caso general. Supongamos que invertimos una cantidad de P bolívares en una cuenta que paga r por ciento de interés compuesto anual (en los cálculos un r correspondiente a 5 por ciento se expresa como 0,05). Esto quiere decir que al final del primer año el balance será $P(1+r)$, al final del segundo $P(1+r)^2$, y así sucesivamente hasta que después de t años el balance será $P(1+r)^t$. Esta fórmula es la base de casi todos los cálculos financieros, sean cuentas bancarias, préstamos, amortizaciones o utilidades.

Algunos bancos calculan los intereses acumulados no una vez sino varias veces al año. Si, por ejemplo, una tasa de interés anual de 5 por ciento se compone semestralmente, el banco usará la mitad de la tasa anual de interés como la tasa de interés por período. Entonces, en un año $P = 100Bs.$ será compuesta dos veces, cada vez a la tasa de $2,5$ por ciento; esto corresponderá a la cantidad de $Bs.100 \times 1,025^2$ o $Bs.105,0625$, esto es, 6 céntimos más comparado con el intereés compuesto calculado anualmente a 5 por ciento. En la industria bancaria se encuentran todo tipo de esquemas compuestos –anual, semestral, trimestral, semanal, y hasta diario. Supongamos que la composición se realiza n veces al año. Para cada período de conversión el banco usa la tasa de interés anual dividido por n, esto es, r/n. Puesto que en t años hay nt períodos de conversión, la semilla P crecerá después de t años a la cantidad $P(1+r/n)^{nt}$. Supongamos ahora que el Banco de El Vaticano, para contribuir a superar la pobreza mundial, ofrece a sus feligreses en los países pobres un interés anual de 100 por ciento, esto es, $r = 1$. Y para continuar en la onda imaginaria (nada cuesta), los intereses serían calculados por cada unidad monetaria en un año, es decir, para $P = t = 1$, mediante $(1 + 1/n)^n$. Ahora, El Vaticano innovando la industria bancaria introduce los esquemas compuestos por horas, minutos y segundos. La tabla I muestra el resultado que el lector sospechaba. Como es evidente, más allá de la

n	$(1+1/n)^n$
1	2,0000000
2	2,2500000
12	2,6130353
52	2,6925970
365	2,7145675
8.760	2,7181267
525.600	2,7182792
31.536.000	2,7182817
∞	e

TABLA I: Composición utópica para el Banco de El Vaticano

composición diaria de los intereses apenas se gana un céntimo por cada unidad monetaria. Por cada millón de dólares el banco desembolsaría 10.000 dólares cada hora. Para la moneda mínima de un céntimo no tiene sentido la composición en minutos y segundos. El ejemplo imaginario nos permitió vaciar el arca eclesiástica y develar el número e. En el lenguaje matemático escribimos

$$\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n = e,$$

vale decir, cuando el número de composición n en un año tiende a ser muy grande y la tasa de interés de 100 por ciento, el interés de la unidad monetaria universal no supera el valor de $e - 1$.

Segunda Historia: Cuadratura de la Hipérbola

Grégoire Saint–Vicent es el más grande entre los que han cuadrado el círculo... él encontró la propiedad del área de una hipérbola que conduce a los logaritmos neperianos denominados hiperbólicos.
Augustus De Morgan,
The Encyclopedia of Eccentrics (1915)

El problema de la *cuadratura* en general consiste en calcular el área bajo una forma plana. El término proviene de la naturaleza misma del problema: expresar el área en términos de unidades de área, esto es, *cuadrados*. Para los griegos esto significaba que una forma dada tenía que ser transformada en una equivalente cuya área debería encontrarse mediante principios fundamentales.

Una de las formas que resistió el encuadramiento fue la hipérbola. A diferencia del círculo y la elipse, la hipérbola es una curva que tiende a infinito, por tanto debemos aclarar el sentido de la cuadratura en este caso. El área bajo la hipérbola rectangular $xy = 1$ entre $x = 1$ y $x = t$ depende claramente de t, esto es, el valor numérico de $A(t)$ depende de t. El problema de cuadrar la hipérbola consiste en encontrar esta función. Desde principios del siglo XVII varios matemáticos intentaron resolver este problema. La venerable historia cuenta con esfuerzos de notables matemáticos como Fermat, Descartes y Pascal, el triunvirato francés justo antes de la invención del cálculo diferencial.

En este punto nos separamos de la historia oficial para seguir una propia. El problema de la cuadratura es básicamente un problema computacional que podemos resolver usando cálculo numérico o cálculo diferencial. Si reconstruimos el área bajo la curva $y = 1/x$ con rectángulos de base Δx entonces podemos calcular el área bajo la curva mediante la aproximación

$$A(t) = \sum_{i=0}^{N_t} \frac{\Delta x}{x_i}.$$

¿Cuál es el valor de t para que $A(t) = 1$? Es ilustrativo resolver este problema numéricamente. El breve y sencillo código (escrito en FORTRAN) mostrado en la Tabla II, resuelve el problema mediante un esquema iterativo en una aproximación de primer orden en Δx.

```
program e
double precision sum, dx, x
logical done
sum = 0.d0
dx = 1.d-6
x = 1.d0
done = .false.
do while (.not.done)
    sum=sum + dx/x
    if(sum.gt.1.d0) done = .true.
    x= x + dx
end do
write(*,'(2f12.6)') x-dx, sum
end program
```

TABLA II: Programa en FORTRAN para cuadrar la hipérbola rectangular, $y = 1/x$. Este código arroja el resultado $x - dx = 2,718280$; $sum = 1,000000$.

Todo estudiante de cálculo sabe que la respuesta es

$t = e$, porque

$$A(t) = \int_1^t \frac{dx}{x} = \ln(t) = 1.$$

Para finalizar la historia que se convirtió en cuento, dedico el siguiente problema a mis estudiantes del curso de Física 21, del semestre B2008, sección 3.

Problema de cuadratura termodinámica. Un gas ideal experimenta una expansión isoterma desde un volumen inicial V_0 hasta un volumen V_x. ¿Cuántas veces está contenido V_0 en V_x para que el trabajo realizado *por* el gas sea nRT?

Solución. De la ecuación de estado para un gas ideal tenemos

$$pV = nRT.$$

El trabajo realizado por el gas ideal es

$$W = \int_{V_0}^{V_x} pdV = nRT \int_{V_0}^{V_x} \frac{dV}{V} = nRT \ln \frac{V_x}{V_0} = nRT,$$

esto es,

$$\frac{V_x}{V_0} = e.$$

Hasta en la Termodinámica puede estar contenido el número e.