Problemario 2

Prof. W. Barreto

Abril 15, 2011

1. Demostrar que para el movimiento uniformemente acelerado las siguientes dos ecuaciones son equivalentes:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \frac{1}{2}(\vec{v}_0 + \vec{v})(t - t_0),$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}(t - t_0) - \frac{1}{2}\vec{a}(t - t_0)^2.$$

2. Para el movimiento circular de radio R y usando coordenadas cilíndricas, demuestre que la aceleración tiene componentes tangencial y normal:

$$a_T = R\alpha,$$

$$a_N = \frac{v^2}{R},$$

donde la velocidad tangencial es $v = \omega R$, $\omega = \dot{\phi}$ es la velocidad angular, y $\alpha = \ddot{\phi}$ es la aceleración angular. Demuestre también que para el movimiento circular:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r},$$

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}).$$

3. Demuestre que en el caso de movimiento curvilíneo (no circular) en el plano, la aceleración tiene componentes:

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2,$$

$$a_\phi = 2\dot{\phi}\dot{\rho} + \rho\ddot{\phi}.$$

4. Demuestre que

$$\dot{\hat{e}}_\phi = -\dot{\phi}(\sin\theta\hat{e}_r + \cos\theta\hat{e}_\theta).$$

5. Demuestre que en el caso general de movimiento curvilíneo, la aceleración tiene componentes:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta,$$

$$a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta,$$

$$a_\phi = 2\dot{\phi}(\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta) + r\ddot{\phi}\sin\theta.$$

6. Demuestre que el movimiento circular con aceleración angular constante, tiene ecuaciones de movimiento:

$$\phi = \phi_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2,$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha(t - t_0).$$

7. ¿Por qué el movimiento circular se puede considerar unidimensional?

8. ¿Cómo se relacionan el periodo, la frecuencia y la velocidad angular?

9. Demuestre que en cualquier movimiento curvilíneo en el plano, la aceleración se puede descomponer en términos de una componente tangencial y otra normal. ¿Cuáles son estas componentes?

10. ¿Cómo afecta la aceleración centrífuga a la aceleración debido a la gravedad?

11. ¿Un cuerpo se desvía de la vertical debido a la rotación de la Tierra? ¿depende del hemisferio? ¿cómo?

12. ¿Explica la aceleración de Coriolis el sentido de circulación de los remolinos y huracanes según el hemisferio?

13. Se deja caer un cuerpo libremente. Demostrar que en el enésimo segundo el cuerpo recorre la distancia $(n - 1/2)g\,s^2$.

14. Se deja caer una piedra desde la azotea de un edificio. Seis segundos y medio después se escucha el impacto de la piedra al chocar con el pavimento. Si la velocidad del sonido es $343\,m/s$, calcule la altura del edificio.

15. Una rueda de 30 cm parte del reposo y aumenta su velocidad angular uniformemente a razón de $0,4\pi$ rad s^{-1}. La rueda transmite su movimiento a otra rueda, de 12 cm de radio, mediante una correa. Obtener una relación entre las aceleraciones angulares y los radios de las dos ruedas. Encontrar el tiempo necesario para que la rueda de menor radio alcance una velocidad angular de 300 rpm.

16. Demuestre que la trayectoria de un cuerpo –cuya velocidad inicial $\vec{v}_0$ forma un ángulo α con la horizontal– siempre es parabólico. ¿Cual es el alcance? cuál es el tiempo de vuelo? ¿cuál es la altura máxima?

17. Un arquero apunta a una fruta que se encuentra en una rama de un árbol. Justo en el instante en el que la fruta se desprende de la rama el arquero dispara la zaeta. ¿Cuál debe ser el águlo de inclinación inicial? ¿Cuál debe ser la velocidad inicial? ¿Cuál es la velocidad inicial –mínima– para dar en el blanco justo en el alcance horizontal?

18. Calcule la velocidad angular de las tres manecillas del reloj.

19. Un disco de radio R rueda con velocidad constante v_0 a lo largo de un plano horizontal. Demostrar que la posición de cualquier punto sobre el borde está dado por las ecuaciones $x = R(\omega t - \sin \omega t)$; $y = R(1 - \cos \omega t)$, donde $\omega = v_0/R$ es la velocidad angular del disco y t se mide desde el instante en que el punto se encuentra en contacto con el plano. Encontrar también las componentes de la velocidad y aceleración del punto.

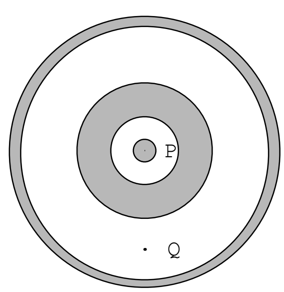
20. La Tierra rota uniformemente respecto a su eje con una velocidad angular $\omega = 7,292 \times 10^{-5}\ s^{-1}$. Encontrar, en función de la latitud, la velocidad y la aceleración de un punto sobre la superficie terrestre.

21. Dos trenes se acercan a la misma velocidad constante v_0. Cuando los trenes se encuentran a una distancia dada, digamos d, un pájaro biónico inicia su vuelo de un tren al otro a $2v_0$; al encontrarse con el tren que viene se devuelve instantáneamente hacia el otro hasta que los trenes de encuentran. ¿Cuántos vuelos realiza el pájaro biónico? ¿Qué distancia recorre?

22. Un cuerpo cae desde una altura de 200 m en un punto cuya latitud es 45^o N. Encontrar la desviación hacia el Este con respecto al punto directamente debajo del punto de partida. Repetir el problema para un punto situado en una latitud 45^o S.

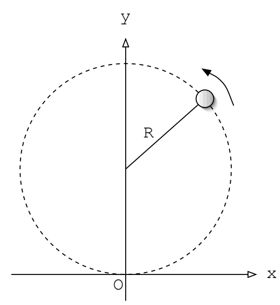
23. Un río fluye hacia el Sur a una velocidad de 9 KPH en un lugar cuya latitud es 45^o N (S). Encontrar la aceleración de Coriolis. Demostrar que en el hemisferio Norte (Sur) empuja el agua hacia la margen derecha (izquierda).

24. Un dardo es lanzado horizontalmente hacia un blanco "ojo de buey", cuyo centro es el punto P (ver figura), con una rapidez de 10 m/s. El dardo alcanza el punto Q, verticalmente hacia abajo del punto P, $0,2$ s más tarde. a) ¿cuál es la distancia PQ; b) ¿A qué distancia del blanco se encontraba el jugador?



25. Una partícula se mueve con velocidad constante sobre un círculo de 3 m de radio y completa una revolución en 20 s (ver figura). La partícula pasa

por el punto O en $t = 0$. Con respecto al origen O, encuentre: a) la magnitud y dirección de los vectores que describen la posición a 5; $7,5$; 10 segundos más tarde; b) la magnitud y dirección del desplazamiento en un intervalo de 5 s, entre el quinto y el décimo segundo; c) el vector velocidad promedio en este intervalo; d) el vector velocidad instantánea al principio y al término del intervalo; e) el vector aceleración instantánea al principio y al término del intervalo. Mida los ángulos en el sentido antihorario respecto al eje x.



26. a) ¿Cuál es la aceleración centrípeta de un objeto sobre el ecuador debido a la rotación de la Tierra?; b) ¿ Cuál debe ser el periodo de rotación de la Tierra para que los objetos sobre el ecuador tengan una aceleración centrípeta de $9,8\ \mathrm{m/s^2}$?