Cinemática

W. Barreto
Octubre, 2010.

I. VECTORES POSICIÓN, VELOCIDAD Y ACELERACIÓN

Consideremos el movimiento de un cuerpo sin tomar en cuenta su forma o estructura, ni la causa que produce tal movimiento. En esto consiste el estudio de la cinemática a través de una idealización que denominaremos partícula. Entonces estudiaremos en lo que sigue el movimiento de un un cuerpo puntual. El vector posición ahora depende en un parámetro que denominaremos tiempo t, $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t)$. Las unidad internacional del vector posición es el metro ($[r] = m$) y del tiempo el segundo ($[t] = s$). Ahora, definimos el vector velocidad por

$$\overrightarrow{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{r}}{dt} = \dot{\overrightarrow{r}} \tag{1}$$

y el vector aceleración

$$\overrightarrow{a}(t) = \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \dot{\overrightarrow{v}} = \ddot{\overrightarrow{r}} \tag{2}$$

cuyas unidades internacionales son $[v] = m/s$ y $[a] = m/s^2$, respectivamente.

II. CINEMÁTICA TOTAL

Supongamos que la aceleración es constante, esto es, que el movimiento sea uniformemente acelerado. En este caso se puede demostrar que

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}_0 + \overrightarrow{a}(t - t_0) \tag{3}$$

y

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}_0 + \overrightarrow{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\overrightarrow{a}(t - t_0)^2 \tag{4}$$

donde $\overrightarrow{v}_0$ es la velocidad en el tiempo inicial t_0. De estas dos ecuaciones se desprenden todos los casos particulares de la cinemática. Por ejemplo, si la aceleración es cero, el movimiento es rectilíneo uniforme (velocidad constante) y en consecuencia

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}_0 \tag{5}$$

y

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}_0 + \overrightarrow{v}(t - t_0). \tag{6}$$

Siguiendo con el caso de aceleración constante (distinta de cero), usando la ecuación (3) podemos calcular $\overrightarrow{v} \circ \overrightarrow{v}$ para obtener

$$v^2 = v_0^2 + 2\overrightarrow{a} \circ (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_0) \tag{7}$$

donde hemos usado la ecuación (4). Ahora, usamos la ecuación (3) para obtener el término $\vec{a}(t - t_0)$ y sustituirlo en la ecuación (4). Así

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}_0 + \frac{1}{2}(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}_0)(t - t_0). \tag{8}$$

Si definimos la velocidad promedio como

$$\bar{\overrightarrow{v}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{v}_0 + \overrightarrow{v}) \tag{9}$$

para el desplazamiento $\Delta\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_0$ en el intervalo de tiempo $\Delta t = t - t_0$, se desprende que

$$\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \tag{10}$$

Otra ecuación cinemática se obtiene de $\overrightarrow{v}_0 = \overrightarrow{v} - \overrightarrow{a}(t - t_0)$ que sustituida en (4) conduce a

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}_0 + \overrightarrow{v}(t - t_0) - \frac{1}{2}\overrightarrow{a}(t - t_0)^2. \tag{11}$$

Podemos observar que todas estas ecuaciones cinemáticas son equivalentes. La utilidad depende de los datos que aporte cada problema. Observe que la ecuación (3) no contiene al vector posición; la ecuación (4) no contiene la velocidad; la ecuación (7) no contiene al tiempo; la ecuación (8) no contiene a la aceleración y la ecuación (11) no contiene a la velocidad inicial.

Estas ecuaciones rigen la cinemática cualquiera sea el caso. Un caso muy especial es el movimiento bajo la acción de la gravedad en la cercanía de la superficie terrestre. Bajo la acción de la gravedad los cuerpos son acelerados uniformemente a $9,8$ m/s^2 hacia el centro de La Tierra. ¿Cuál es el origen de la aceleración debido a gravedad? ¿cómo podemos determinarla experimentalmente? ¿todos los cuerpos experimentan la misma aceleración debido a la gravedad?

III. MOVIMIENTO CURVILÍNEO

En principio podemos usar coordenadas cartesianas para describir el movimiento curvilíneo en general. Conocido el vector posición como función del tiempo

$$\overrightarrow{r}(t) =< x(t), y(t), z(t) > \tag{12}$$

podemos calcular la velocidad y la aceleración

$$\overrightarrow{v} =< \dot{x}, \dot{y}, \dot{z} > \tag{13}$$

y

$$\overrightarrow{a} =< \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z} > . \tag{14}$$

Pero es mucho más intuitivo parametrizar la trayectoria del movimiento curvilíneo usando coordenadas esféricas o cilíndricas, o las que se adapten mejor a la geometría del movimiento. Veamos.

El vector posición en coordenadas esféricas lo podemos escribir

$$\overrightarrow{r}(t) = r\hat{e}_r \tag{15}$$

donde es claro que tanto la magnitud como la dirección del vector posición varían con el tiempo. Es fácil demostrar que la velocidad resulta

$$\overrightarrow{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\dot{\phi}\sin\theta\hat{e}_\phi \tag{16}$$

y la aceleración

$$\overrightarrow{a} = a_r\hat{e}_r + a_\theta\hat{e}_\theta + a_\phi\hat{e}_\phi \tag{17}$$

donde

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta \tag{18}$$

$$a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta \tag{19}$$

$$a_\phi = 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta + r\ddot{\phi}\sin\theta. \tag{20}$$

En el plano ecuatorial, $\theta = \pi/2$, las componentes de la aceleración para el movimiento curvilíneo en coordenadas esféricas se escriben:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\phi}^2 \tag{21}$$

$$a_\theta = 0 \tag{22}$$

$$a_\phi = 2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}. \tag{23}$$

En coordendas cilíndricas los vectores posición, la velocidad y la aceleración son:

$$\overrightarrow{r} = \rho\hat{e}_\rho + z\hat{k} \tag{24}$$

$$\overrightarrow{v} = \dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\hat{e}_\phi + \dot{z}\hat{k} \tag{25}$$

$$\overrightarrow{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})\hat{e}_\phi + \ddot{z}\hat{k} \tag{26}$$

En el plano $z = 0$ las componentes de la aceleración se reducen a las mismas componentes de la aceleración en coordenadas esféricas (haciendo $r = \rho$).

IV. MOVIMIENTO CIRCULAR

Ahora resulta es muy fácil describir el movimiento circular. Si consideramos el movimiento en el plano ecuatorial ($z = 0$) a coordenada radial constante $r = \rho = R$ la velocidad y aceleración se reducen a:

$$\overrightarrow{v} = R\dot{\phi}\hat{e}_\phi \tag{27}$$

$$\overrightarrow{a} = R\ddot{\phi}\hat{e}_\phi - R\dot{\phi}^2\hat{e}_\rho \tag{28}$$

Podemos definir la aceleración tangencial y la aceleración normal (o centrípeta) como

$$a_T = R\alpha \tag{29}$$

$$a_N = R\omega^2 = \frac{v^2}{R} \tag{30}$$

donde $\omega = \dot{\phi}$ es la velocidad angular y $\alpha = \ddot{\phi}$ es la aceleración angular. Podemos introducir el vector velocidad angular y el vector aceleración angular tal que

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r} \tag{31}$$

y

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\alpha} \times \overrightarrow{r} + \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{v} \tag{32}$$

donde $\overrightarrow{\alpha} = \dot{\overrightarrow{\omega}}$. A velocidad angular constante es evidente que

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\omega} \times (\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}). \tag{33}$$

V. MOVIMIENTO RELATIVO

Podemos describir el movimiento relativo de dos partículas que siguen trayectorias distintas A y B. Sean los vectores posición de ambas partículas $\vec{r}_A$ y $\vec{r}_B$, referidos al mismo sistema de coordenadas. La posición de la partícula B relativa a la partícula A es

$$\vec{r}_{BA} = \vec{r}_B - \vec{r}_A \tag{34}$$

de donde podemos encontrar la velocidad y la aceleración relativas

$$\vec{v}_{BA} = \vec{v}_B - \vec{v}_A \tag{35}$$

$$\vec{a}_{BA} = \vec{a}_B - \vec{a}_A. \tag{36}$$

De igual forma podemos escribir la posición de la partícula A relativa a la partícula B y su velocidad y aceleración relativas. Es evidente que $\vec{r}_{BA} = -\vec{r}_{AB}$, $\vec{v}_{BA} = -\vec{v}_{AB}$ y $\vec{a}_{BA} = -\vec{a}_{AB}$.

Consideramos el movimiento de una partícula relativo a dos sistemas inerciales (uno se mueve respecto al otro con velocidad constante). Si el sistema X' es el que se mueve con velocidad $\vec{V}$ constante respecto al sistema X, entonces la posición de la partícula es

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{V}t \tag{37}$$

donde hemos supuesto que en $t = 0$ ambos sistemas coinciden en el origen. Se desprende de inmediato que

$$\vec{v}\,' = \vec{v} - \vec{V} \tag{38}$$

$$\vec{a}\,' = \vec{a}. \tag{39}$$

Es mucho más interesante y útil considerar el movimiento de una partícula relativo a dos sistemas que rotan uno respecto al otro con velocidad angular constante. Para simplificar el tratamiento puntualizamos:

- Los orígenes de ambos sistemas coinciden;
- El sistema primado rota con velocidad angular constante $\vec{\omega}$ respecto al sistema no primado;
- Obviamente, el sistema no primado rota con velocidad angular uniforme $-\vec{\omega}$ respecto al sistema primado.

Se puede demostrar que la velocidad y aceleración relativas son

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{40}$$

$$\vec{a} = \vec{a}\,' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \tag{41}$$

El segundo término del lado derecho de esta ecuación se denomina aceleración de Coriolis; el tercer término es la aceleración centrípeta.

Cuando se estudia el movimiento relativo a La Tierra, que es una situación particular de lo anterior, surgen los siguiente esfectos:

1. Aceleración efectiva debido a la gravedad;
2. Desviación de la vertical;
3. Corrimiento en el plano horizontal que permite explicar el sentido de rotación de los remolinos y huracanes, según el hemisferio.