Dinámica de un sistema de partículas
(en trabajo de parto)

W. Barreto
Junio, 2008.

El estudio de un sistema de partículas desde el punto de vista dinámico es el siguiente paso natural. ¿Existe la noción de conservación del momentum para un sistema de partículas? ¿Existe la noción de conservación del momentum angular y de la energía para un sistema de partículas? Al menos intuitivamente no existen impedimentos para explorar la extensión de estos importantes principios para más de una partícula. Hemos visto que las Leyes de Newton se develan si consideramos la conservación del momentum para una y dos partículas. El exploración que emprenderemos se puede clasificar en dos partes. La dinámica de un sistema discreto de partículas y la dinámica de un sistema continuo de partículas, que a su vez se puede subclasificar en el estudio de cuerpos deformables y de cuerpos rígidos. Estas clasificaciones representan un vano intento para ordenar el material de estudio y en cierto sentido siguen siendo idealizaciones. En realidad, las distintas situaciones físicas que se pueden presentar en la Naturaleza combinan la materia clasificada. Por ejemplo, un número de cuerpos rígidos pueden tratarse como un número de partículas, si no nos interesa el movimiento de rotación alrededor de cualquiera de sus ejes propios; podemos también considerar el movimiento de un cuerpo rígido a través de un fluido o viceversa. Son muchas las situaciones posibles que observamos a diario. En cualquiera de estos sistemas la noción de centro de masa es necesaria; así iniciaremos este tema.

I. MOMENTUM Y CENTRO DE MASA

Consideremos un sistema de N partículas con masas y velocidades en principio distintas. El momentum total $\overrightarrow{P}$ del sistema es

$$\overrightarrow{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{v}_i \tag{1}$$

y la masa total M

$$M = \sum_{i=1}^{N} m_i \tag{2}$$

Es una tentación irresistible definir una velocidad $\overrightarrow{V}$ mediante

$$\overrightarrow{P} = M\overrightarrow{V} \tag{3}$$

¿Existe una partícula con masa M y velocidad $\overrightarrow{V}$? En realidad no, pero la podemos imaginar. Una mejor pregunta es ¿existe un punto cuya velocidad sea $\overrightarrow{V}$? y la respuesta es si, se denomina *centro de masa*. Podemos decir que la velocidad del centro de masa corresponde a un punto localizado por el vector posición centro de masa

$$\overrightarrow{R} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \tag{4}$$

siempre y cuando la masa de cada partícula no cambie, así como la masa total. En efecto, la derivada respecto del tiempo del vector posición del centro de masa conduce a

$$\overrightarrow{V} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{v}_i. \tag{5}$$

El centro de masa para sistemas continuos se puede extender fácilmente haciendo uso del calculo diferencial

$$\overrightarrow{R} = \lim_{N \to 0} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{r}_i = \frac{1}{M} \int \overrightarrow{r}\, dm \tag{6}$$

donde el elemento diferencial de masa está dado por la densidad volumétrica de masa $\rho = dm/dV$, la densidad superficial de masa $\sigma = dm/ds$ o la densidad lineal de masa $\lambda = dm/dl$, dependiendo de la situación de interés.

La ecuación (3) corresponde a la de una partícula de masa M y momentum $\overrightarrow{P}$. La derivada rspecto del tiempo del momentum total es

$$\frac{d\overrightarrow{P}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{a}_i. \tag{7}$$

Si definimos la aceleración del centro de masa $\overrightarrow{A}$

$$\overrightarrow{A} = \dot{\overrightarrow{V}} = \ddot{\overrightarrow{R}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{a}_i. \tag{8}$$

Es irresistible definir la fuerza total externa $\overrightarrow{F}$

$$\overrightarrow{F} = \frac{d\overrightarrow{P}}{dt} = M\overrightarrow{A}. \tag{9}$$

En este punto hacemos nuestra primera estación de la expedición, para hacer la siguiente pregunta: ¿la noción de centro de masa es una simplificación burda? Si el sistema es un cuerpo rígido y nos interesa sólo el movimiento de traslación, el centro de masa va muy bien. Si la orientación del cuerpo en el espacio no nos interesa, está bien. La ecuación de movimiento, $\overrightarrow{F} = M\overrightarrow{A}$, 'canta' toda la historia siempre que nos interese sólo el movimiento del centro de masa como representativo del cuerpo, siendo rígido o no.

El centro de masa de un sistema aislado se mueve con velocidad constante respecto a un sistema inercial (suponiendo que las masas de las partículas son independientes de la velocidad). En particular, podemos fijar el origen del sistema inercial en el centro de masa (sistema–C). En este caso $\overrightarrow{V} = 0$ y en consecuancia

$$\sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{p}_i = 0 \tag{10}$$

Muchos experimentos en el sistema del laboratorio (sistema–L) se pueden analizar con mayor simplicidad respecto al sistema–C.

Si el sistema S de partículas no está aislado, siempre podremos considerar 'el resto del Universo' (sistema S') como parte se un sistema total aislado. En este caso el momentum total

$$\overrightarrow{P} = \overrightarrow{P}_S + \overrightarrow{P}_{S'} \tag{11}$$

se conserva. En este caso el intercambio de momenta entre sistemas es

$$\Delta\overrightarrow{P}_S = -\Delta\overrightarrow{P}_{S'} \tag{12}$$

Definimos la fuerza total externa es

$$\overrightarrow{F}^{EXT} = \frac{d\overrightarrow{P}_S}{dt} = M\overrightarrow{A} \tag{13}$$

porque el cambio de momentum del sistema S se debe a su interacción con S'. Además, las fuerzas internas por la interacción entre las partículas que conforman el sistema S no contribuyen al cambio de momentum total $\overrightarrow{P}$ (demostrar).

Entonces, la 'Ley de acción y reacción' entre los dos sistemas S y S' se expresa

$$\overrightarrow{F}^{EXT} = -\overrightarrow{F}'^{EXT} \tag{14}$$

Podemos concluir también que el centro de masa de un sistema de partículas se comporta como una partícula de masa igual a la masa total del sistema sujeta a la fuerza externa sobre el sistema. Entonces, dos sistemas interactúan como dos partículas. Por otra parte, la fuerza externa sobre un sistema de partículas es la suma de las fuerzas externas sobre cada una de las partículas.

II. MASA REDUCIDA

La idea de que dos sistemas interactúen 'como dos partículas' es muy sugerente. Consideremos el caso de dos partículas sujetas sólo a la interacción mutua, es decir, no hay fuerzas externas y queremos estudiar el movimiento relativo entre ellas. A partir de las ecuaciones de movimiento de ambas partículas

$$m_1 \vec{a}_1 = \vec{F}_{12} \tag{15}$$

$$m_2 \vec{a}_2 = \vec{F}_{21} \tag{16}$$

podemos escribir la acelaración relativa

$$\vec{a}_{12} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2 = \frac{\vec{F}_{12}}{m_1} - \frac{\vec{F}_{21}}{m_2} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\vec{F}_{12} = \frac{1}{\mu}\vec{F}_{12} \tag{17}$$

donde

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{18}$$

es la masa reducida. Si una partícula tiene una masa mucho mayor que la otra, digamos $m_1 << m_2$ la masa reducida

$$\mu = \frac{m_1}{m_1/m_2 + 1} \approx m_1(1 - m_1/m_2) \approx m_1 \tag{19}$$

en donde hemos usado la aproximación $(1+x)^{-1} \approx 1 - x$. Si las masas son iguales $\mu = m/2$.

El monvimiento relativo de dos partículas sujetas únicamente a la interacción mutua es equivalente al movimiento relativo a un observador inercial de una partícula de masa igual a la masa reducida bajo la fuerza de la interacción

$$\vec{F}_{12} = \mu \vec{a}_{12} \tag{20}$$

Al describir el movimiento de dos partículas bajo la interacción mutua podemos separar el movimiento del sistema en el movimiento del centro de masa, cuya velocidad es constante, y el movimient de las partículas referido a un sistema ligado al centro de masa.

Para dos partículas de masa m_1 y m_2 y velocidades $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$, respectivamente, la velocidad del centro de masa es

$$\vec{V} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}. \tag{21}$$

La velocidad de la partícula (1) relativa al centro de masa es

$$\vec{v}'_1 = \vec{v}_1 - \vec{V} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}_{12} \tag{22}$$

de igual forma para la partícula (2)

$$\vec{v}'_2 = \vec{v}_2 - \vec{V} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_{21} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_{12}. \tag{23}$$

En el sistema-C las partículas se mueven con velocidad opuestas. Los momenta se escriben

$$\vec{p}'_1 = m_1 \vec{v}'_1 = \mu \vec{v}_{12} \tag{24}$$

$$\vec{p}'_2 = m_2 \vec{v}'_2 = -\mu \vec{v}_{12} \tag{25}$$

y en consecuencia

$$\vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = 0. \tag{26}$$

III. MOMENTUM ANGULAR

Seguimos el estudio con dos partículas porque hemos visto es representativa para sistemas de muchas partículas; por simplicidad ayuda en el análisis que extenderemos cuando corresponda.

Entonces, para dos partículas el momentum angular total es

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 \tag{27}$$

Sabemos que

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 \tag{28}$$

donde cada torque se expresa como

$$\vec{\tau}_1 = \vec{r}_1 \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_{12}) \tag{29}$$

$$\vec{\tau}_2 = \vec{r}_2 \times (\vec{F}_2 + \vec{F}_{21}) \tag{30}$$

donde hemos tomado en cuenta las fuerzas de interacción entre las dos partículas (internas) y las fuerzas externas a cada una de ellas. Al combinar los torques sobre cada partícula tenemos

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{\tau}_1^{EXT} + \vec{\tau}_2^{EXT} = \vec{\tau}^{EXT} \tag{31}$$

esto es, el cambio instantáneo en el tiempo del momentum angular total es igual al torque total externo. El torque se calcula respecto a un punto fijo en un sistema inercial, usualmente elegido como el origen del sistema–L. Este resultado, se puede inferir fácilmente, se extiende a un sistema de N partículas.

En otras palabras, la rapidez de cambio del momentum angular de un sistema de partículas, relativo a un punto arbitrario, es igual al torque total, relativo al mismo punto, de las fuerzas externas que actúan sobre el sistema.

Si el momentum angular de una parte del sistema aislado no se conserva, es decir cambia debido a interacciones internas, el resto del sistema experimentará un cambio opuesto de momentum angular, tal que el momentum angular total se conserva.

Ahora consideremos en momentum angular del sistema conformado por dos partículas y relativo al sistema–C. A partir del vector posición del centro de masa

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \tag{32}$$

podemos escribir los vectores posición relativos an sistema–C

$$\vec{r}\,'_1 = \vec{r}_1 - \vec{R} = \frac{m_2\vec{r}_{12}}{m_1 + m_2} \tag{33}$$

$$\vec{r}\,'_2 = \vec{r}_2 - \vec{R} = -\frac{m_1\vec{r}_{12}}{m_1 + m_2} \tag{34}$$

donde $\vec{r}_{12}$ es el vector posición de (1) relativo a (2). Así,

$$\vec{L}\,' = \vec{r}\,'_1 \times \vec{p}\,'_1 + \vec{r}\,'_2 \times \vec{p}\,'_2 = \vec{r}_{12} \times (\mu\vec{v}_{12}) \tag{35}$$

el momentum angular respecto al centro de masa es el de una partícula de momentum $\mu\vec{v}_{12}$ y posición $\vec{r}_{12}$. $\vec{L}\,'$ es el momentum angular interno del sistema. En el caso de un cuerpo rígido o de una partícula fundamental en momentum angular interno se denomina *espín* (que es una propiedad independiente del observador).

Ahora podemos encontrar la relación entre el momentum angular del sistema relativo al sistema–C y el momentum angular relativo al sistema–L. Es inmediato por todo lo anterior que

$$\vec{L} = \vec{L}\,' + \vec{R} \times \vec{P}. \tag{36}$$

Este resultado es válido para un sistema de N partículas.

¿Cuál es la relación entre el torque total externo respecto al sistema–C y el momentum angular interno?

Se puede demostrar con facilidad que

$$\vec{\tau}^{EXT} = \vec{\tau}' + \vec{R} \times \vec{F}^{EXT} \tag{37}$$

y usando el resultado anterior, podemos obtener sin demora

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{L}'}{dt} + \vec{R} \times \vec{F}^{EXT} = \vec{\tau}^{EXT} \tag{38}$$

esto es

$$\vec{\tau}' = \frac{d\vec{L}'}{dt}. \tag{39}$$

Este resultado es válido para un sistema de N partículas y aún si el sistema–C no está en reposo respecto a un sistema inercial.

IV. TRABAJO Y ENERGÍA

La variación de la energía cinética se debe al trabajo de las fuerzas externas y al trabajo de las fuerzas internas

$$\Delta E_c = W^{EXT} + W^{INT} \tag{40}$$

lo cual representa la extensión del teorema de trabajo y nergía y es válido para un sistema de N partículas (demostrar para dos partículas). Si las fuerzas internas son conservativas

$$W^{INT} = -\Delta E_{p,12} \tag{41}$$

$$\Delta E_c + \Delta E_{p,12} = W^{EXT} \tag{42}$$

Definiendo

$$U = E_c + E_{p,12} \tag{43}$$

como la energía propia del sistema, tenemos

$$\Delta U = W^{EXT} \tag{44}$$

esto es, la variación de la energía propia es igual al trabajo de las fuerzas externas. Si el sistema es aislado $U = U_0$, la energía propia permanece constante (si las fuerzas internas son conservativas). Para un sistema de N partículas

$$U = \sum_{todas} E_{c,i} + \sum_{pares} E_{p,ij}. \tag{45}$$

Si no hay fuerzas internas toda la energía es cinética. Si las fuerzas externas también son conservativas

$$W^{EXT} = -\Delta E_p^{EXT}. \tag{46}$$

Definiendo la energía total del sistema

$$E = E_c + E_p^{INT} + E_p^{EXT} \tag{47}$$

tenemos

$$\Delta E = 0. \tag{48}$$

Es fácil demostrar que la energ´ ia cinética del sistema en términos de la energía cinética interna y la energícinética de traslación del sistema

$$E_c = E_c' + \frac{1}{2}MV^2. \tag{49}$$

Por tanto, la energía interna se define

$$U^{INT} = E_c' + E_p^{INT}. \tag{50}$$

Casi que podemos asegurar sin demostración (pero mejor demuéstrelo) que para un sistema de dos partículas

$$E_c' = \frac{1}{2}\mu v_{12}^2. \tag{51}$$

Para el presente estado de cosas, estamos capacitados para estudiar colisiones, física estadística o termodinámica, fluidos y la dinámica de cuerpos rígidos. Centraremos nuestra atención en éste último caso. Podemos asegurar que toda la temática desarrollada ha sido una preparación para abordar el siguiente estudio.

V. DINÁMICA DE CUERPOS RÍGIDOS

Un cuerpo rígido es un sistema de muchas partículas que mantienen su posición relativa bajo la acción de fuerzas y torques, es decir, que preserva su forma (es no deformable)...