Vectores

W. Barreto
Mayo, 2008.

Un vector es un objeto geométrico que vive en un determinado espacio; es mucho más que un número real, que un escalar. Tiene dirección y sentido, además de magnitud. Si el vector vive en un espacio de dimensionalidad mayor que tres, nos resulta difícil imaginarlo; en general puede definirse en un espacio de dimensión n. No vamos a considerar aquí vectores en espacios de dimensión mayor que tres. Cuando se trata de un vector en tres dimensiones podemos hacer una descomposición de éste en términos de tres vectores unitarios y ortogonales (vectores base), es decir, linealmente independientes. Si dos vectores son ortogonales o perpendiculares no podemos obtener uno a partir del otro, este es el significado de independencia lineal. También podemos hacer una descompoción del mismo vector en términos de dos vectores unitarios ortogonales (ortonormnales) entre si; en este caso el vector queda embebido en un espacio bidimensional. Es mas, este mismo vector puede quedar embebido en un espacio unidimensional si lo expresamos a través del vector unitario en la dirección del mismo vector. Definiremos las operaciones vectoriales que nos permitirán demostrar lo antes señalado o visualizado.

Albert Einstein dijo que más importante que el conocimiento es la imaginación.

El mundo físico es uno sólo y podemos interpretarlo de diversas formas si somos creativos.

I. OPERACIONES VECTORIALES

Un vector se define como un segmento de recta orientado, es decir, posee magnitud, dirección y sentido. Podemos visualizar un vector como una zaeta, pues tiene una cola y una punta. Así, el vector A lo representamos algebraicamente por $\overrightarrow{A}$. Una operación vectorial básica es el *producto de un escalar por un vector*, que pudiera tener el efecto de modificar su amplitud y su sentido, pero no su dirección. Si multiplicamos un vector cualquiera por el inverso de su magnitud el resultado será un vector de magnitud unitaria o vector unitario en la dirección y sentido del vector original. Así, el vector original se puede escribir

$$\overrightarrow{A} = A\hat{u}_{\overrightarrow{A}}. \tag{1}$$

Otra operación básica es la suma de vectores. Si multiplicamos cualquier vector por -1, cambiando su sentido pero no su magnitud y dirección, podemos entonces restarlo a cualquier otro. Un conjunto de vectores se suman gráficamente concatenándolos de la siguiente forma: Escogemos cualquier vector y le unimos en su punta la cola de otro hasta completar la cadena de vectores. El vector resultante va desde la cola del primer vector de la cadena hasta la punta del último. Una situación especial ilustrativa es la suma n veces del mismo vector unitario con una fracción de este (si la magnitud del vector resultante no es un número entero). La noción de suma nos permite también hacer la descomposición de cualquier vector en términos de dos vectores que son ortogonales entre si. En general esta descomposición no tiene por que ser ortogonal, de hecho hay infinidad de descomposiciones no ortogonales, pero la ortogonal es única. La descomposición de un vector o suma de tres vectores ortogonales sigue naturalmente (regrese a la Figura 1 y "léala" de nuevo). Las propiedades conmutativas y distributivas se pueden aplicar también a la suma de vectores y al producto de un escalar por un vector. Esto es,

$$\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} = \overrightarrow{B} + \overrightarrow{A}, \tag{2}$$

$$\alpha\overrightarrow{A} = \overrightarrow{A}\alpha, \tag{3}$$

$$(\alpha+\beta)\overrightarrow{A} = \alpha\overrightarrow{A} + \beta\overrightarrow{A}, \tag{4}$$

$$\alpha(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}) = \alpha\overrightarrow{A} + \alpha\overrightarrow{B}. \tag{5}$$

Entre dos vectores se pueden realizar otras operaciones, el *producto escalar* " $\circ$ " y el *producto vectorial* " $\times$". El producto escalar se define como

$$\overrightarrow{A} \circ \overrightarrow{B} = AB\cos\theta, \tag{6}$$

donde θ es el ángulo entre los dos vectores. Es claro que el resultado de este producto es un escalar. Si los vectores son perpendicuales entre ellos, el producto escalar es nulo. El producto escalar es conmutativo y distributivo (respecto a la suma):

$$\overrightarrow{A} \circ \overrightarrow{B} = \overrightarrow{B} \circ \overrightarrow{A}, \tag{7}$$

$$\overrightarrow{A} \circ (\overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}) = \overrightarrow{A} \circ \overrightarrow{B} + \overrightarrow{A} \circ \overrightarrow{C} \tag{8}$$

También

$$\alpha(\overrightarrow{A} \circ \overrightarrow{B}) = (\alpha\overrightarrow{A}) \circ \overrightarrow{B} = \overrightarrow{A} \circ (\alpha\overrightarrow{B}) = (\overrightarrow{A} \circ \overrightarrow{B})\alpha \tag{9}$$

siendo α un escalar.

El producto vectorial se define como una operación que resulta un vector de magnitud

$$|\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}| = AB\sin\theta \tag{10}$$

cuya dirección es perpendicular a los vectores A y B, el sentido dependerá del orden en que se realice el producto vectorial. Si el vector A apunta hacia el Norte y el vector B hacia el Noreste, por ejemplo, el producto vectorial $\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}$ se realiza en el sentido horario y el vector resultante es perpendicular a ambos vectores y tiene el sentido de avance de un tornillo derecho. Es claro que el producto vectorial de dos vectores paralelos es nulo. El producto vectorial entonces no es conmutativo pero si distributivo (respecto a la suma):

$$\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} = -\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{A}, \tag{11}$$

$$\overrightarrow{A} \times (\overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}) = \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} + \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{C} \tag{12}$$

También

$$\alpha(\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}) = (\alpha\overrightarrow{A}) \times \overrightarrow{B} = \overrightarrow{A} \times (\alpha\overrightarrow{B}) = (\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B})\alpha \tag{13}$$

siendo α un escalar.

II. COMPONENTES CARTESIANAS DE UN VECTOR

Un punto P tiene coordenadas Cartesianas (x, y, z) en el espacio tridimensional. Si formamos el vector posición desde el origen O del sistema de coordenadas hasta el punto P, entonces $\overrightarrow{r}$ tiene componentes rectangulares

$$\overrightarrow{r} = < x, y, z >, \tag{14}$$

donde x, y, $z \in (-\infty, \infty)$. Es fácil demostrar que el vector posición se puede escribir como una combinación lineal de los vectores ortonormales y rectangulares $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$, cada uno en la dirección de los semiejes positivos x, y y z:

$$\overrightarrow{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}. \tag{15}$$

En consecuencia, por todo lo anterior, el producto escalar entre dos vectores cualesquiera resulta

$$\overrightarrow{A} \circ \overrightarrow{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z, \tag{16}$$

en particular si realizamos el producto escalar de un vector con sigo mismo, podemos determinar su magnitud a partir de sus componentes rectangulares

$$A = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{1/2}. \tag{17}$$

Por otra parte, el producto vectorial entre dos vectores A y B resulta

$$\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} = (A_y B_z - A_z B_y)\hat{\imath} - (A_x B_z - A_z B_x)\hat{\jmath} + (A_x B_y - A_y B_z)\hat{k}, \tag{18}$$

que se puede calcular mejor a través del determinante

$$\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \tag{19}$$

III. COMPONENTES DE UN VECTOR EN COORDENADAS CILÍNDRICAS

El mismo punto P de la sección anterior puede tener coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z), donde

$$\rho = (x^2 + y^2)^{1/2} \tag{20}$$

y

$$\phi = \arctan(y/x) \tag{21}$$

son las coordenadas radial, sobre el plano xy, y azimutal (angular), respecto al semieje positivo x. Es claro que $\rho \in [0, \infty)$ y $\phi \in [0, 2\pi]$. Si definimos el vector unitario $\hat{e}_\rho = < \cos\phi, \sin\phi, 0 >$ podemos escribir un vector posición de la siguiente forma

$$\overrightarrow{r} = \rho\hat{e}_\rho + z\hat{k}. \tag{22}$$

Por completitud, podemos construir también el vector unitario azimutal por $\hat{e}_\phi = < -\sin\phi, \cos\phi, 0 >$, perpendicular a $\hat{e}_\rho$ y a $\hat{k}$. Así, tenemos una base ortonormal también para las coordenadas cilíndricas. Observe que el vector posición del punto P no tiene componentes en la dirección azimutal, sin embargo un vector $\overrightarrow{A}$ cualquiera en coordenadas cilíndricas tiene componentes A_ρ, A_ϕ y A_z. Las coordenadas cilíndricas se construyen "trasladando" las coordendas polares a lo largo del eje z. Así las coordenadas cilíndricas resultan un híbrido polar–rectangular. El producto escalar y vectorial procede de manera similar a las coordenadas cartesianas. ¿Se puede calcular el producto vectorial en coordenadas cilíndricas como un determinante?

IV. COMPONENTES VECTORIALES EN COORDENADAS ESFÉRICAS

Las coordenadas esféricas del punto P son (r, θ, ϕ), donde r es la distancia del origen al punto P, relacionada con las coordenadas cartesianas por

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \tag{23}$$

$\theta \in [0, \pi]$ el ángulo cenital respecto al semieje positivo z,

$$\theta = \arctan\left\{\frac{(x^2 + y^2)^{1/2}}{z}\right\} \tag{24}$$

y ϕ el mismo ángulo azimutal definido para coordenadas cilíndricas (ahora es el que forma la proyección del vector posición sobre el plano xy con el semieje positivo x. Ahora el vector posición del punto P está dado por:

$$\overrightarrow{r} = r\hat{e}_r, \tag{25}$$

donde $\hat{e}_r =< \sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta >$ es el vector unitario en la dirección radial. Para construir la base de vectores unitarios ortonormal en coordenadas esféricas escogemos el vector unitario azimutal $\hat{e}_\phi$ (el mismo de las coordendas cilíndricas) y otro que denominaremos $\hat{e}_\theta$, este debe ser ortogonal tanto a $\hat{e}_r$ como a $\hat{e}_\phi$. Se puede demostrar fácilmente que $\hat{e}_\theta =< \cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, -\sin\theta >$. En general, cualquier vector en coordenadas esféricas tiene componentes A_r, A_θ y A_ϕ. El producto vectorial es una operación bien definida en estas coordenadas.