2.6. Probabilidad Condicional

2.6.1. Introducción.

En la aplicación de la teoría de probabilidades a problemas prácticos es frecuente que el experimentador este confrontando con la siguiente situación:

"Tal o cual sucedió, ahora cuál es la probabilidad que uno u otro suceda"

Por ejemplo:

1. En un experimento en el cual se registra la vida de un bombillo, se puede estar interesado en la probabilidad de que este funcione más de 100 horas dado que ha funcionado 24 horas.

2. En un experimento de extraer bolas de una caja, en la cual hay 5 bolas blaancas y 95 rojas, la probabilidad de que la tercera se a blanca, depende de las 2 primeras extracciones.

3. Se lanza un dado correcto y se sabe que el resultado es un número par, ¿Cuál es la probabilidad de que éste número sea divible por 3?.

Estas preguntas pueden formularse en el contexto de la teoría de probabilidad de la siguiente manera:

1. Sea

   $A =$\{El bombillo funciona más de 100 horas\}

   $B =$\{El bombillo funciona 24 horas\}

$P[A/B]$ se lee como la probabilidad de que ocurra el evento A dado que ocurrió el evento B, es decir, la probabilidad de que un bombillo funcione más de 100 horas dado que ha funcionado 24 horas.

2. Sea

   B_i ={La bola extraída en la i-ésima extracción es blanca }

   R_i ={La bola extraída en la i-ésima extracción es roja }

   La probabilidad deseada se puede escribir como $P[B_3/.]$ donde . puede ser $R_1 \cap R_2$ ó $B_1 \cap B_2$ ó $B_1 \cap R_2$ ó $R_1 \cap B_2$

3. Sea

   A ={El resultado es un número par }

   B ={El resultado es un número divisible por 3 }

   La probabilidad deseada se puede escribir como $P[B/A]$

Ahora lo que queremos ver es como vamos a asignar probabilidades a estos problemas.

2.6.2. Probabilidad Condicional

Definición 2.1 *Sea (Ω, P) un espacio de probabilidad. Sean A y B dos eventos, entonces la probabilidad condicional de que ocurra A dado que ocurrio B, denotado por $P(A/B)$, se define como:*

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad si\ P(B) \neq 0 \tag{2.1}$$

La función definida en (2.1) es una función de probabilidad. Veamos el siguiente teorema.

Teorema 2.2 *Sea (Ω, P) un espacio de probabilidad. La función $P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ es una función de probabilidad.*

Demostración.

Para demostrar este teorma debemor ver que se cumplen las tres axiomas de probabilidad.

i) Para todo evento A $P(A/B) \geq 0$, lo cual es cierto si y sólo si $P(B) \neq 0$ ya que $P(A \cap B) \geq 0$

ii) $P(\Omega/B) = 1$, también se cumple pues $P(\Omega/B) = \frac{P(\Omega\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$

iii) Sean $A_1, A_2, ...$ una sucesión de eventos disjuntos entonces se debe cumplir que $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i/B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i/B)$. Veamos.

$$\begin{aligned} P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i/B) &= \frac{P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P[\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i \cap B)]}{P(B)} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} P[\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i \cap B)]}{P(B)} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i/B) \end{aligned}$$

2.6.3. Teoremas de Probabilidad Condicional

Teorema 2.3 $P(\emptyset/B) = 0$

Demostración. $P(\emptyset/B) = \frac{P(\emptyset\cap B)}{P(B)} = \frac{P(\emptyset)}{P(B)} = 0$

Teorema 2.4 *Sea A un evento, entonces $P(A^c/B) = 1 - P(A/B)$*

Demostración. *Como* $\Omega = A \cup A^c$ *entonces* $P(\Omega/B) = P(A \cup A^c/B) = P(A/B) + P(A^c/B) \Rightarrow P(A^c/B) = 1 - P(A/B)$

Teorema 2.5 *Sean* A_1 *y* A_2 *dos eventos, entonces* $P[(A_1 \cup A_2)/B] = P(A_1/B) + P(A_2/B) - P[(A_1 \cap A_2)/B]$

Demostración. *Como* $A_{\cup}A_2 = (A_1 \cap A_2^c) \cup (A_1^c \cap A_2) \cup A_1 \cap A_2)$ *entonces,*

$$\begin{aligned} P[(A_1 \cup A_2)/B] &= P[((A_1 \cap A_2^c) \cup (A_1^c \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_2))/B] \\ &= P[(A_1 \cap A_2^c)/B] + P[(A_1^c \cap A_2)/B] + P[(A_1 \cap A_2)/B] \\ &= P[(A_1 \cap A_2^c)/B] + P[(A_1 \cap A_2)/B] + P[(A_1^c \cap A_2)/B] + P[(A_1 \cap A_2)/B] \\ &\quad -P[(A_1 \cap A_2)/B] \\ &= P(A_1/B) + P(A_2/B) - P[(A_1 \cap A_2)/B] \end{aligned}$$

2.7. Regla de la Multiplicación

De la definición de probabilidad condicional, tenemos el siguiente resultado, ya que,

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{2.2}$$

entonces,

$$P(A \cap B) = P(A/B)P(B) \tag{2.3}$$

Si extendemos este resultado para n eventos obtenemos la regla multiplicativa, la cuál se especifica en el siguiente teorema.

Teorema 2.6 *Sea* (Ω, P) *un espacio de probabilidad y* $A_1, A_2, ..., A_n$ *eventos sobre* Ω*,*

con $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) > 0$ *entonces*

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/(A_1 \cap A_2)) \cdots P\left(A_n/\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) \tag{2.4}$$

Demostración. *Probemos por inducción sobre* n

Para $n = 2$

$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2/A_1)$

Para $n = 3$

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P[(A_1 \cap A_2) \cap A_3] = P(A_1 \cap A_2)P(A_3/A_1 \cap A_2) \\ &= P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 \cap A_2) \end{aligned}$$

Supongamos que se cumple para $n-1$ *y vamos a probar para* n

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i \bigcap A_n\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) P\left(A_n/\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)$$

Por hipotesis $P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) = P(A_1)P(A_1/A_2) \cdots P\left(A_{n-1}/\bigcap_{i=1}^{n-2} A_i\right)$

Entonces

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/(A_1 \cap A_2)) \cdots P\left(A_{n-1}/\bigcap_{i=1}^{n-2} A_i\right) P\left(A_n/\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) \tag{2.5}$$

Ejemplo 2.7 *Una caja contiene 10 bolas de las cuales 3 son negras y 7 son blancas. Si se seleccionan tres bolas al azar de la caja sin reemplazo.*

a) ¿Cuál es la probabilidad de que las tres sean Blancas?

Sean

B_i=$\{$*Una bola blanca es seleccionada en el ensayo i i=1,2,3*$\}$

N_i=$\{$*Una bola negra es seleccionada en el ensayo i i=1,2,3*$\}$

$P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = P(B_1)P(B_2/B_1)P[B_3/(B_1 \cap B_2)] = \frac{7}{10}\frac{6}{9}\frac{5}{8} = \frac{210}{720} = \frac{7}{24}$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera sea negra la segunda blanca y la tercera negra?

$P(N_1 \cap B_2 \cap N_3) = P(N_1)P(B_2/N_1)P[N_3/(N_1 \cap B_2)] = \frac{3}{10}\frac{7}{9}\frac{2}{8} = \frac{42}{720} = \frac{7}{120}$

c) ¿Cuál es la probabilidad de que dos sean negras?

Definamos el Evento C =$\{$*Dos bolas son negras*$\}$*, entonces*

$$\begin{aligned} P(C) &= P[(N_1 \cap N_2 \cap B_3) \cup (N_1 \cap B_2 \cap N_3) \cup (B_1 \cap N_2 \cap N_3)] \\ &= P(N_1 \cap N_2 \cap B_3) + P(N_1 \cap B_2 \cap N_3) + P(B_1 \cap N_2 \cap N_3) \\ &= P(N_1)P(N_2/N_1)P[B_3/(N_1 \cap N_2)] + P(N_1)P(B_2/N_1)P[N_3/(N_1 \cap B_2)] + \\ &\quad P(B_1)P(N_2/B_1)P[N_3/(B_1 \cap N_2)] \\ &= \frac{3}{10}\frac{2}{9}\frac{7}{8} + \frac{3}{10}\frac{7}{9}\frac{2}{8} + \frac{7}{10}\frac{3}{9}\frac{2}{8} = \frac{7}{120} + \frac{7}{120} + \frac{7}{120} = \frac{7}{40} \end{aligned}$$

Ejemplo 2.8 *Una caja contiene 12 bolas de las cuales 7 son rojas y 5 son marron. Se realiza el siguiente juego: se extrae una bola y se anota su color, y esta es regresada a la caja con dos bolas del mismo color. ¿Cuál es la probabilidad de que una bola marron sea seleccionada en cada uno de los tres primeros ensayos?.*

Sea $M_i = \{$*Una bola marron es seleccionada en el ensayo i, i=1,2,3*$\}$

$$P(M_1 \cap M_2 \cap M_3) = P(M_1)P(M_2/M_1)P[M_3/(M_2 \cap M_1)] = \frac{5}{12}\frac{7}{14}\frac{9}{16} = \frac{315}{2688} = 0{,}12$$

2.8. Teorema de Probabilidad Total

Existen problemas en la teoría de probabilidad, en los cuales la ocurrencia de un evento está condicionado por un evento ocurrido antes, pero que no sabemos con exactitud cuál ocurrio, por lo tanto debemos tomar todas las alternativas.

Teorema 2.9 *Sea* (Ω, P) *un espacio de probabilidad y sean* $B_1, B_2, ...$ *eventos disjuntos tales que* $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$ *y* $P(B_i) > 0$ $i = 1, ..., n$ *entonces para todo evento* A

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i)P(A/B_i) \tag{2.6}$$

Demostración. *Sabemos que* $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$.

Además $A = A \cap \Omega = A \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty}(A \cap B_i)$. *Entonces*

$$P(A) \;=\; P[\bigcup_{i=1}^{\infty}(A \cap B_i)] = \sum_{i=1}^{\infty} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i)P(A/B_i)$$

Ejemplo 2.10 *Una caja 1 tiene una bola blanca y 2 negras, otra caja 2 una bola nega y 2 blancas y una tercera caja contiene 3 negras y tres blancas. Un dado es lanzado, si cae 1,2 ó 3, la caja 1 es seleccionada, si cae 4 la caja 2 es seleccionada y si cae 5 ó 6 la caja 3 es seleccionada. Luego una bola es seleccionada de la caja escogida. ¿Cuál es la probabilidad de que sea la bola sea blanca?.*

Sean:

B=$\{$*La bola seleccionada es blanca*$\}$

C_i=$\{$*La caja i fue escogida, i=1,2,3*$\}$

Entonces

$$\begin{aligned} P(B) &= P[(B\cap C_1)\cup(B\cap C_2)\cup(B\cap C_3)] = P(B\cap C_1)+P(B\cap C_2)+P(B\cap C_3)] \\ &= P(C_1)P(B/C_1)+P(C_2)P(B/C_2)+P(C_3)P(B/C_3) \\ &= \frac{3}{6}\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\frac{2}{3}+\frac{2}{6}\frac{3}{6}=\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{6}=\frac{4}{9} \end{aligned}$$

2.9. Regla de Bayes

Teorema 2.11 *Sea (Ω, P) un espacio de probabilidad y sean $B_1, B_2, ...$ una colección de eventos disjuntos tales que $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$ y $P(B_i) > 0$ $i = 1, ..., n$ entonces para todo evento A*

$$P(B_k/A) = \frac{P(A/B_k)P(B_k)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(B_i)P(A/B_i)} \tag{2.7}$$

Demostración.

$$P(B_k/A) = \frac{B_k\cap A}{P(A)} = \frac{P(A/B_k)P(B_k)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(B_i)P(A/B_i)}$$

Ejemplo 2.12 *Para el ejemplo (2.10) ¿ Calcular la probabilidad de de que la bola se extrajo de la caja 2 dado que era blanca?*

$$P(C_2/B) = \frac{P(B/C_2)P(C_2)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}\frac{2}{3}}{\frac{4}{9}} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{4}{9}} = \frac{1}{4}$$

2.10. Eventos Independientes

Cuando hablamos de probabilidad condicional queremos hallar la probabilidad de que ocurra un evento condicionado por la ocurrencia de otro. Existen situaciones en las que la ocurrencia de un evento no está influencidad por la ocurrencia de otros. Por ejemplo:

1. El sexo de un recien nacido no depende del sexo de un niño nacido antes.
2. El sexo de un recien nacido no deoende del resultado al lanzar una moneda.
3. Al lanzar dos dados el resultado de uno no depende del otro.

Entonces, en estos casos ¿Qué pasa con $P(A/B)$?.
Una idea natural nos llevaría a pensar que $P(A/B) = P(A)$, pues como A y B son independientes, no importa si B ocurrio o no $P(A/B)$ sólo depende de A. Formalicemos esta idea con la siguiente definición:

Definición 2.13 *Para un espacio de probabilidad dado (Ω, P), sean A y B dos eventos. Se dice que A y B son independientes si y sólo si:*

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \tag{2.8}$$

Basándonos en esta definición podemos tener dos resultados:

$$P(B/A) = P(B) \tag{2.9}$$

$$P(A/B) = P(A) \tag{2.10}$$

Ejemplo 2.14 *Una moneda es lanzada dos veces y sean*

A=$\{$*Cara en el segundo lanzamiento*$\}$

A=$\{$*Cara en el primer lanzamiento*$\}$

Entonces $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ *y* $P(A \cap B) = \frac{1}{4} = P(A)P(B)$

Por lo tanto A y B son independientes.

2.11. Problemas de probabilidad condicional, regla de la multiplicación, probabilidad total, regla de Bayes e independencia

1. La caja 1 contiene x esferas blancas y y rojas. La caja 2 contiene z esferas blancas y v rojas. Se escoge una esfera al azar de la caja 1 y se pone en la caja 2. Luego se escoge una esfera al azar de la caja 2. ¿Cuál es la probabilidad de que esta esfera sea blanca?. (Meyer)

2. Dos tubos defectuosos se confunden con dos buenos. Los tubos se prueban, uno por uno, hasta encontrar los defectuosos.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar el último tubo defectuoso en la segunda prueba?.

   b) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar el último tubo defectuoso en la tercera prueba?.

   c) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar el último tubo defectuoso en la cuarta prueba?.

   d) Sumar los resultados obtenidos en a), b) y c) ¿Es sorprendente el resultado?.

   (Meyer)

3. Una caja contiene 4 tubos malos y 6 buenos. Se sacan dos a la vez. Se prueba uno de ellos y se encuentra que es bueno. ¿Cuál es la probabiblidad de que el otro también sea bueno?. (Meyer)

4. En el problema anterior los tubos se verifican sacando uno al azar, se prueba y

se repite el proceso hasta que se encuentran los cuatro tubos malos. ¿Cuál es la probabilidad de encontar el cuarto tubo malo

a) En la quinta prueba?

b) En la décima prueba?

(Meyer)

5. Supóngase que A y B son dos eventos independientes asociados con un experimento. Si la probabilidad de que A o B ocurra es igual a 0.6, mientras que la probabilidad de que A ocurra es igual a 0.4, determinar la probabilidad de que B ocurra. (Meyer)

6. Veinte artículos, 12 de los cuales son defectuosos y 8 no defectuosos, se inspeccionan uno después de otro. Si esos artículos se escogen al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que

   a) los dos primeros artículos inspeccionados sean defectuosos?

   b) los dos primeros artículos inspeccionados sean no defectuosos?

   c) entre los dos primeros artículos inspeccionados haya uno defectuoso y uno no defectuoso?

   (Meyer)

7. Supóngase que tenemos dos cajas, 1 y 2, cada una con dos cajones. La caja 1 tiene un moneda de oro en un cajon y una de plata en el otro, mientras que la caja 2 tiene una moneda de oro en cada uno de los cajones. Se escoge una caja al azar, y de ésta se escoge un cajón al azar. La moneda que se encontró en este

cajón es de oro. ¿Cuál es la probabilidad de que la moneda provenga de la caja 2? (Meyer)

8. En una fabrica de zapatos, las máquinas A, B y C fabrican 25, 35 y 40 % de la producción total respectivamente. De lo que producen, 5,4 y 2 % respectivamente, son zapatos defectuosos. Se escoge un zapato al azar y resulta ser defectuoso. ¿Cuáles son las probabilidades respectivas de que el zapato provenga de la máquina A,B o C?. (Meyer)

9. Sean A,B y C dos eventos asociados con un experimento. Supónga que $P(A) = 0{,}4$, mientras que $P(A \cup B) = 0{,}7$. Sea $P(B) = p$

   a) ¿Para qué elección de p son A y B mutuamente excluyentes?

   b) ¿Para qué elección de p son A y B independientes?

   (Meyer)

10. Un número binario está compuesto sólo de los digitos 0 y 1. (por ejemplo, 1011, 1100, etc.) Estos números tienen un papel importante en el uso de los computadores electrónicos. Supóngase que un número binario está formado por n digitos. Supóngase que la probabilidad de qe aparezca un digito incorrecto es p y que los errores en digitos diferentes son independientes uno de otro. ¿Cuál es la probabilidad de formar un número incorrecto? (Meyer)

11. Dos personas lanzan tres monedas regulares cada una. ¿Cuál es la probabilidad de que obtenga el mismo número de caras?. (Meyer)

12. Se lanzan dos dados y puesto que las caras muestran números diferentes, ¿Cuál es la probabilidad de que una sea cara? (Meyer)

13. En la fabricación de cierto artículo se presenta un tipo de defectos con una probabilidad de 0.1 y defectos de un segundo tipo con probabilidad de 0.05. (Se supone la independencia ebntre los dos tipos de defectos). ¿Cuál es la probabilidad de que:

    a) Un artículo no tenga ambas clases de defectos?

    b) Un artículo sea defectuoso?

    c) Suponiendo que un artículo sea defectuoso, tenga un sólo tipo de defecto?

(Meyer)

14. Verificar que el teorema de la multiplicación establecido para dos eventos, se puede generalizar para tres eventos como sigue:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A/(B \cap C))P(B/C)P(C)$$

(Meyer)

15. Un conjunto electrónico consta de dos subsistemas, digamos A y B. A partir de una serie de pruebas previas, se presuponen las siguientes probabilidades: La probabilidad de falle A es 0.20, la probabilidad de que sólo falle B es 0.15 y la probabilidad de que ambos fallen es 0.15. Calcular:

    a) La probabilidad de que falle B dado que B ha fallado.

    b) La probabilidad de que sólo falle A.

(Meyer)

16. En una ciudad se publican los periódicos A,B y C. Una encuesta reciente de lectores indica lo siguiente: 20 % lee A, 16 % lee B, 14 % lee C, 8 % lee A y B, 5 % lee A y C, 4 % lee B y C, y 2 % lee A, B, y C. Para un adulto escogido al azar, calcular la probabilidad de que:

    a) No lea ninguno de los periódicos.

    b) Lea exactamente uno de los periódicos.

    c) lea al menos A y B si se sabe que lee al menos uno de los dos periódicos.

    (Meyer)

17. Cada vez que se realiza un experimento, la ocurrencia de un evento particular A es 0.2. El experimento se repite, independientemente, hasta que A ocurre. Calcular la probabilidad de que sea necesario ejecutar un cuarto experimento. (Meyer)

18. Supóngase que un mecanismo tiene N tubos y que todos son necesarios para su funcionamiento. Para localizar el tubo que funciona mal, se revisa sucesivamente cada uno de ellos. Calcular la probabilidad de que sea necesario verificar N tubos si la probabilidad (constante) de que un tubo este dañado es p. (Meyer)

19. Probar: Si $P(A/B) > P(A)$ entonces $P(B/A) > P(B)$ (Meyer)

20. Un tubo al vacío puede provenir de cualquiera de tres fabricantes con probabilidades $p_1 = 0{,}25$, $p_2 = 0{,}50$ y $p_3 = 0{,}25$. Las probabilidades de que el tubo funcione correctamente durante un período de tiempo especificado son iguales a 0.1, 0.2 y 0.4, respectivamente, para los tres fabircantes. Calcular la probabilidad de que un tubo elegido al azar funcione durante el período de tiempo especificado.

21. Se emiten sucesivamente cuatro señales de radio. Si la recepción de cualquier señal es independiente de la recepción de otra y estas probabilidades son 0.1, 0.2, 0.3, y 0.4 respectivamente, calcular la probabilidad de que la señal k se reciba por $k = 0, 1, 2, 3, 4$

(Meyer)