Modelos Intrínsicamente No Lineales

Economista: Douglas C. Ramírez Vera.

Consideraremos como ejemplo la llamada función de producción CES (de elasticidad de sustitución constante) representada por.

$$Q_i = g[dK_i^{-r} + (1-d)T_i^{-r}]^{-\frac{n}{r}} e^{u_i}$$

$$(g>1;\ 0<d<1;\ n>0;\ r \geq -1)$$

En la que Q_i representa la cantidad producida, K_i representa la cantidad de capital y T_i representa la cantidad de trabajo, e es el numero neperiano (e = 2.71828...). El parámetro g recibe el nombre de "parámetro de eficiencia", mientras que al parámetro d se le denomina "parámetro de distribución", a n se le llama "parámetro de los rendimientos a escala", y a r, "parámetro de sustitución".

Este tipo de función es muy popular debido a que es muy general e incluye varios casos de funciones de producción dependiendo de los valores que asuma en parámetro de sustitución r, ya que cuando r=0, la función CES se reduce a una función tipo Cobb-Douglas, si $r \rightarrow \infty$ se convierte en la función de producción de producción tipo Leontieff o de proporciones constantes y si $r \rightarrow -1$, sería una función de sustitutos perfectos[1].

Obtención por expansión de serie de Taylor de la Función CES en una aproximación de segundo grado alrededor de r y centrado en cero.[2]

$$\texttt{Series}\left[g - \frac{n}{r}\,\texttt{Log}\left[d * K^{-r} + (1-d) * T^{-r}\right],\ \{r,\ 0,\ 2\}\right]$$

[1] Cfr. Henderson & Quandt. 1979. Teoría Microeconómica Edit. Ariel Barcelona, España
[2] Se utilizó el programa Matemática © para desarrollar la demostración.

El polinomio de la serie

$$(g + n (d \, \mathrm{Log}[K] + (1-d) \, \mathrm{Log}[T])) + \frac{1}{2} n \left(-(-d \, \mathrm{Log}[K] - (1-d) \, \mathrm{Log}[T]) (d \, \mathrm{Log}[K] + (1-d) \, \mathrm{Log}[T]) - 2 \left(\frac{1}{2} d \, \mathrm{Log}[K]^2 + \frac{1}{2} (1-d) \, \mathrm{Log}[T]^2\right)\right) r + \frac{1}{3} n \left(-2 (d \, \mathrm{Log}[K] + (1-d) \, \mathrm{Log}[T]) \left(\frac{1}{2} d \, \mathrm{Log}[K]^2 + \frac{1}{2} (1-d) \, \mathrm{Log}[T]^2\right) - 3 \left(-\frac{1}{6} d \, \mathrm{Log}[K]^3 - \frac{1}{6} (1-d) \, \mathrm{Log}[T]^3\right) - (-d \, \mathrm{Log}[K] - (1-d) \, \mathrm{Log}[T]) \left(-\frac{1}{2} d \, \mathrm{Log}[K]^2 - \frac{1}{2} (1-d) \, \mathrm{Log}[T]^2 + (-d \, \mathrm{Log}[K] - (1-d) \, \mathrm{Log}[T])^2\right)\right) r^2 + O[r]^3$$

En su forma normal

$$g + n (d \, \mathrm{Log}[K] + (1-d) \, \mathrm{Log}[T]) + \frac{1}{2} n r \left(-(-d \, \mathrm{Log}[K] - (1-d) \, \mathrm{Log}[T]) (d \, \mathrm{Log}[K] + (1-d) \, \mathrm{Log}[T]) - 2 \left(\frac{1}{2} d \, \mathrm{Log}[K]^2 + \frac{1}{2} (1-d) \, \mathrm{Log}[T]^2\right)\right) + \frac{1}{3} n r^2 \left(-2 (d \, \mathrm{Log}[K] + (1-d) \, \mathrm{Log}[T]) \left(\frac{1}{2} d \, \mathrm{Log}[K]^2 + \frac{1}{2} (1-d) \, \mathrm{Log}[T]^2\right) - 3 \left(-\frac{1}{6} d \, \mathrm{Log}[K]^3 - \frac{1}{6} (1-d) \, \mathrm{Log}[T]^3\right) - (-d \, \mathrm{Log}[K] - (1-d) \, \mathrm{Log}[T]) \left(-\frac{1}{2} d \, \mathrm{Log}[K]^2 - \frac{1}{2} (1-d) \, \mathrm{Log}[T]^2 + (-d \, \mathrm{Log}[K] - (1-d) \, \mathrm{Log}[T])^2\right)\right)$$

Agrupando términos

$$g + \frac{1}{2} (-1 + d) d \, n \, r (\mathrm{Log}[K] - \mathrm{Log}[T])^2 + \frac{1}{6} d \left(1 - 3 d + 2 d^2\right) n \, r^2 (\mathrm{Log}[K] - \mathrm{Log}[T])^3 + n (d \, \mathrm{Log}[K] + \mathrm{Log}[T] - d \, \mathrm{Log}[T])$$

Ordenando y eliminando los términos donde r^2, nos queda (ya que *r*→*0*).

$$Q = g + n[d * \log(K) + (1-d) * \log(T)] + \frac{1}{2} * (d-1) * d * n * r * [\log(K) - \log(T)]^2$$

Agrupando.

$$Q = g + nd * \log(K) + n(1-d) * \log(T) + \frac{1}{2} * (d-1) * d * n * r * [\log(K) - \log(T)]^2$$

Luego el modelo a estimar sería.

$$Q = b_0 + b_1 \log(K) + b_2 \log(T) + b_3[\log(K) - \log(T)]^2$$

Nótese que el modelo de regresión es lineal pero representa una regresión intrínsicamente no lineal, si la estimación del parámetro b_3 no es significativamente distinta de cero, se rechaza el modelo CES a favor del modelo Cobb-Douglas, los parámetros de la ecuación anterior se relacionan con los parámetros originales a través de la siguiente reparametrización

$$g = anti\log b_0$$

$$d = \frac{b_1}{b_1 + b_2}$$

$$n = b_1 + b_2$$

$$r = \frac{-2b_3(b_1 + b_2)}{b_1 b_2}$$

Por lo tanto, podemos utilizar las estimaciones mínimo cuadráticas ordinarias de los betas para obtener estimaciones de los parámetros.