Estática comparativa: aspectos formales

Microeconomía

Douglas Ramírez

Maximización de la Utilidad

Por simplicidad la elección es entre dos bienes (x, y), las utilidades marginales son positivas. Los precios están determinados por el mercado. El poder de compra esta dada por M (su riqueza monetaria). El problema es maximizar su función índice de utilidad sujeta a la restricción presupuestaria.

$$U(x,y) \Rightarrow \frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = U_x \geq 0; \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = U_y \geq 0$$

$$s.a.$$

$$M - xp_x - yp_y = 0$$

El lagrange de la función objetivo es:

$$L = U(x,y) + \lambda(M - xp_x - yp_y)$$

Del Lagrance a las CNPO

Condiciones Necesarias de Primer Orden

$$L_x = U_x - \lambda p_x = 0$$

$$L_y = U_y - \lambda p_y = 0$$

$$L_\lambda = M - xp_x - yp_y = 0$$

El consumidor distribuye sus gastos de modo que la pendiente de su recta de presupuesto sea igual a la pendiente de alguna curva de indiferencia

$$\frac{U_x}{p_x} = \lambda = \frac{U_y}{p_y} \Rightarrow \frac{U_x}{U_y} = \frac{p_x}{p_y}$$

Condiciones de segundo Orden

El determinante del Hessiano Orlado es positivo o definido negativo para un máximo lo cual garantiza la convexidad de la curva de indiferencia o equivalentemente que la utilidad marginal es decreciente en la elección óptima

$$\left|\overline{H}\right| = \begin{vmatrix} 0 & -p_x & -p_y \\ -p_x & \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \\ -p_y & \dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} \end{vmatrix} = 2 p_x p_y \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - p_y^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - p_x^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} > 0$$

Análisis Estático Comparativo 1

Sí suponemos que se satisface las condiciones de 2do orden podemos analizar las propiedades de la estática comparativa sobre la base de la condición de primer orden

$$U_x - \lambda p_x = 0$$
$$U_y - \lambda p_y = 0$$
$$M - xp_x - yp_y = 0$$

Los valores de solución son funciones de los parámetros y tienen una barra para indicarlo

$$\bar{x} = x(p_x, p_y, M)$$
$$\bar{y} = y(p_x, p_y, M)$$
$$\bar{\lambda} = \lambda(p_x, p_y, M)$$

Análisis Estático Comparativo 2

El efecto de un cambio en el monto del presupuesto del se determina mediante la diferenciación total con respecto a M

$$\begin{bmatrix} 0 & -p_x & -p_y \\ -p_x & \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \\ -p_y & \dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \left(\dfrac{\partial \bar{\lambda}}{\partial M}\right) \\ \left(\dfrac{\partial \bar{x}}{\partial M}\right) \\ \left(\dfrac{\partial \bar{y}}{\partial M}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Las segundas derivadas han sido evaluadas en el punto de equilibrio. Es evidente que el determinante de la matriz de coeficientes resulta el hessiano orlado, lo cual facilitará la expresión y evaluación de las derivadas de la estática comparativas.

Análisis Estático Comparativo 3

Por regla de Cramer se tiene:

$$\left(\frac{\partial\bar{x}}{\partial M}\right)=\frac{1}{\left|\overline{H}\right|}\begin{bmatrix}0 & -1 & -p_y\\ -p_x & 0 & U_{xy}\\ -p_y & 0 & U_{yy}\end{bmatrix}=\frac{1}{\left|\overline{H}\right|}\begin{vmatrix}-p_x & U_{xy}\\ -p_y & U_{yy}\end{vmatrix}$$

$$\left(\frac{\partial\bar{y}}{\partial M}\right)=\frac{1}{\left|\overline{H}\right|}\begin{bmatrix}0 & -p_y & -1\\ -p_x & U_{xx} & 0\\ -p_y & U_{yx} & 0\end{bmatrix}=\frac{1}{\left|\overline{H}\right|}\begin{vmatrix}-p_x & U_{xx}\\ -p_y & U_{yx}\end{vmatrix}$$

Por la condición de segundo Orden el Hessiano Orlado ($\mathbb{H}$) es positivo al igual que los precios. Pero a falta de mayor información acerca de las magnitudes relativas de P_x, P_y y U_{ij}, no estamos en condiciones de afirmar cuales serán los signos de estas dos derivadas. Esto significa que a medida que aumenta el ingreso las compras óptimas de x e y pueden aumentar, disminuir o ser nula.

Análisis Estático Comparativo 4

El efecto de un cambio en el precio del bien x se obtiene el conjunto siguiente de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 0 & -p_x & -p_y \\ -p_x & U_{xx} & U_{xy} \\ -p_y & U_{yx} & U_{yy} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \left(\dfrac{\partial \bar{\lambda}}{\partial p_x}\right) \\ \left(\dfrac{\partial \bar{x}}{\partial p_x}\right) \\ \left(\dfrac{\partial \bar{y}}{\partial p_x}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{\lambda} \\ 0 \end{bmatrix}$$

De aquí surgen los siguientes resultados

Análisis Estático Comparativo 5

Por regla de Cramer se tiene:

$$\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial p_x}\right) = \frac{1}{|\bar{H}|}\begin{bmatrix} 0 & \bar{x} & -p_y \\ -p_x & \bar{\lambda} & U_{xy} \\ -p_y & 0 & U_{yy} \end{bmatrix} = \frac{-\bar{x}}{|\bar{H}|}\begin{vmatrix} -p_x & U_{xy} \\ -p_y & U_{yy} \end{vmatrix} + \frac{\bar{\lambda}}{|\bar{H}|}\begin{vmatrix} 0 & -p_y \\ -p_y & U_{yy} \end{vmatrix} = -\bar{x}\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial M}\right) + \frac{-\bar{\lambda} p_y^2}{|\bar{H}|} \equiv T_1 + T_2$$

$$\left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial p_x}\right) = \frac{1}{|\bar{H}|}\begin{bmatrix} 0 & -p_x & \bar{x} \\ -p_x & U_{xx} & \bar{\lambda} \\ -p_y & U_{yx} & 0 \end{bmatrix} = \frac{\bar{x}}{|\bar{H}|}\begin{vmatrix} -p_x & U_{xy} \\ -p_y & U_{yy} \end{vmatrix} - \frac{\bar{\lambda}}{|\bar{H}|}\begin{vmatrix} 0 & -p_y \\ -p_y & U_{yy} \end{vmatrix} = -\bar{x}\left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial M}\right) + \frac{\bar{\lambda} p_x p_y}{|\bar{H}|} \equiv T_3 + T_4$$

La primera derivada ($\partial x/\partial p_x$) nos dice cómo un cambio en p_x afecta la compra de x, esto nos da una base para el estudio de la función de demanda del consumidor para el bien x

Análisis Estático Comparativo 6

En (∂x/∂p_x) hay dos términos componentes de este efecto para el bien x. El primer termino (T_1) incluye la derivada de (∂x/∂M) que expresa aparentemente el efecto de un cambio en M sobre la compra óptima de x y donde a su vez x es un factor ponderativo, sin embargo estamos estudiando el cambio (∂x/∂p_x) en el precio. Por tanto T_1 debe ser interpretado como la estimación del efecto ingreso de un cambio en el precio.

$$\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial p_x}\right) = -\bar{x}\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial M}\right) + \frac{-\bar{\lambda} p_y^2}{\left|\bar{H}\right|} \equiv T_1 + T_2$$

Cuando p_x aumente, la declinación del ingreso real del consumidor producirá un efecto sobre el consumo óptimo de x similar al de una verdadera disminución en M, por eso el uso del término -(∂x/∂M).

Análisis Estático Comparativo 7

Cuanto mayor sea el peso relativo del bien x en el presupuesto total mayor será este efecto sobre el ingreso, y también la influencia del factor ponderativo de x sobre T_1.

Si expresamos la perdida del ingreso real del consumidor por un aumento del precio mediante el diferencial de M, entonces tenemos.

$$dM = -\bar{x}ddp_x \Rightarrow \bar{x} = \frac{-dM}{dp_x} \rightarrow T_1 = -\bar{x}\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial M}\right) = \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial M}\right)\left(\frac{dM}{dp_x}\right)$$

Esto nos demuestra que T1 es la medida del efecto de dp_x sobre x a través de M, el efecto ingreso

Análisis Estático Comparativo 8

Si ahora compensamos al consumidor por su perdida de ingreso real, dándole un incremento de ingreso igual a dM, entonces el consumidor, por neutralización del efecto ingreso, el componente restante de la derivada $(\partial x/\partial p_x)$ o T2, este medirá la variación de x debida totalmente a la <u>sustitución</u> del cambio de p_x.

$$\left(\frac{\partial \overline{x}}{\partial p_x}\right) = -\overline{x}\left(\frac{\partial \overline{x}}{\partial M}\right) + \frac{-\overline{\lambda} p_y^2}{\left|\overline{H}\right|} \equiv T_1 + T_2$$

La ecuación muestra que la derivada de la estática comparativa de $(\partial x/\partial p_x)$ puede ser descompuesta en un <u>efecto ingreso</u> y un <u>efecto sustitución</u> y esto se conoce como <u>ecuación de Slutsky</u>.

Análisis Estático Comparativo 9

¿Qué se puede decir del signo de ($\partial x/\partial p_x$)?. El Efecto sustitución de T_2 es evidentemente negativo. Porque el Hessiano, los precios y el costo marginal del ingreso (multiplicador de lagrange λ) son positivos. En cambio el efecto ingreso T_1 tiene signo indeterminadado

$$\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial p_x}\right) \Rightarrow \left|-\bar{x}\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial M}\right)\right| \leq \left|\frac{-\bar{\lambda} p_y^2}{|\bar{H}|}\right| \Leftrightarrow |T_1| \leq |T_2|$$

Si T_1 fuera negativo reforzaría el efecto de T_2; en ese caso, un aumento del precio del bien x haría disminuir la compra de x.

Si T_1 fuera positivo pero relativamente pequeño en magnitud sobre el efecto de T_2; en ese caso, disminuye el efecto sustitución pero la pendiente de la función de demanda continuaría siendo negativa.

Análisis Estático Comparativo 10

Si T_1 fuera positivo y domine en magnitud el efecto de T_2. Eso implicaría x es un rubro importante del presupuesto del consumidor y constituye así en un factor importante de ponderación, y por tanto un <u>aumento</u> del precio p_x conducirá a una <u>mayor</u> compra de x.

$$\left|-\bar{x}\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial M}\right)\right| \geq \left|\frac{-\bar{\lambda} p_y^2}{|\bar{H}|}\right| \Rightarrow |T_1| \geq |T_2|$$

Esta situación especial se asocia a los llamados bienes inferiores. Ya que normalmente se espera que el efecto total de $(\partial x/\partial p_x)$ sea negativo.

Análisis Estático Comparativo 11

Por último examinemos la derivada $(\partial y/\partial p_x)=T_3+T_4$, que tiene relación con el efecto cruzado de un cambio en el precio del bien x sobre el consumo del bien y.

$$\left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial p_x}\right)=\frac{1}{|\bar{H}|}\begin{bmatrix} 0 & -p_x & \bar{x} \\ -p_x & U_{xx} & \bar{\lambda} \\ -p_y & U_{yx} & 0 \end{bmatrix}=\frac{\bar{x}}{|\bar{H}|}\begin{vmatrix} -p_x & U_{xy} \\ -p_y & U_{yy} \end{vmatrix}-\frac{\bar{\lambda}}{|\bar{H}|}\begin{vmatrix} 0 & -p_y \\ -p_y & U_{yy} \end{vmatrix}=-\bar{x}\left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial M}\right)+\frac{\bar{\lambda} p_x p_y}{|\bar{H}|}\equiv T_3+T_4$$

El termino T_3 tiene un parecido notable con T_1 y es también interpretable como un efecto ingreso, nótese que el factor de ponderación es x no y. Al igual que se hizo con T_1 a partir de la restricción presupuestaria se tiene:

$$\bar{x}=\frac{-dM}{dp_x}\Rightarrow T_3=-\bar{x}\left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial M}\right)=-\left(\frac{-dM}{dp_x}\right)\left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial M}\right)=\left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial M}\right)\left(\frac{dM}{dp_x}\right)$$

Análisis Estático Comparativo 12

El término T_4 es evidentemente una medida del efecto sustitución por la derivada cruzada.

$$\left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial p_x}\right) = -\bar{x}\left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial M}\right) + \frac{\bar{\lambda} p_x p_y}{|\bar{H}|} \equiv T_3 + T_4$$

El termino T_3 tiene un signo indeterminado. Sin embargo, el efecto sustitución en este modelo de dos bienes será seguramente positivo en nuestro modelo. Esto significa que, al menos que sea anulado por un efecto ingreso negativo, el aumento en el precio del bien x aumentará siempre la compra del bien y.

Por las características de nuestro modelo de dos bienes, nuestros resultados son adecuados o simétricos a un cambio en el precio del bien y.

Estática comparativa: aspectos formales

Microeconomía

Douglas Ramírez