Minimización del Gasto

Microeconomía
Douglas Ramírez Vera

El problema inicial

- Supongamos que la función de utilidad es continua U(x,y), supongamos que las preferencias satisfacen los supuestos de completitud e insaciabilidad local y supongamos un conjunto presupuestario semiconvexo y compacto.
- Entonces consideremos los siguientes problemas.
- Problema I⇒Máx. U(x,y); s.a: $p_x x+p_y y \leq M$
- Problema II⇒min. $p_x x+p_y y$; s.a. $U(x,y) \geqq u^*$

Teoremas

- Teorema: La maximización de la utilidad implica la minimización del gasto para un nivel de precios e ingresos.
  - Supongamos que se satisface los supuestos anteriores, Sea (x^*, y^*) la solución del problema I , entonces $u=U(x^*,y^*)$, en este caso (x^*,y^*) es la solución del problema II.
- Teorema: La minimización del gasto implica la maximización de la utilidad para un nivel de utilidad y precios.
  - Supongamos que se satisfacen los supuestos anteriores y que el par (x^*,y^*) es la solución al problema II.
  - Sea $M= p_x x+p_y y$; supongamos que $M>0$. En este caso, (x^*,y^*), es la solución del problema I.

Maximización de la utilidad

- Consideremos el problema I de maximización del bienestar formulemos el Lagrange.

  $L(x,y)=U(x,y)+\lambda(m-p_x x-p_y y)$

  $\partial L(x,y) / \partial x= \partial U(x,y) / \partial x-\lambda p_x=0$

  $\partial L(x,y) / \partial y= \partial U(x,y)/\partial y-\lambda p_y=0$

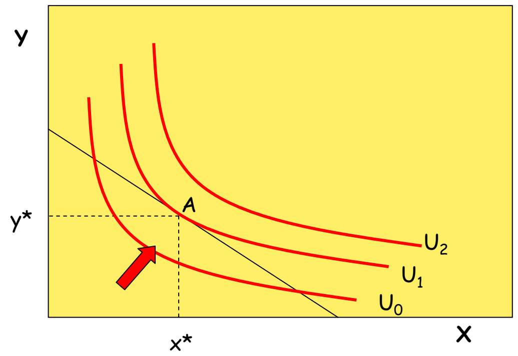
  $\partial L(x,y) / \partial \lambda= m-p_x x-p_y y=0$

- De las condiciones de primer orden se tiene

  $\lambda=\{[\partial U(x,y) / \partial x]/p_x\}=\{[\partial U(x,y) / \partial y]/p_y\}$

  $RMS_{y,x}=[UMg_y/UMg_x] =[p_x/p_y]$

El problema de Maximización consumidor



El punto A representa el máximo nivel de utilidad que puede obtener una persona, dada la restricción presupuestaria

La Minimización del Gasto

- Sea el problema II de minimización del gasto, para ello formulemos el Lagrange
- $Z(x,y)=p_x x+ p_y y- [U(x,y)-u]$
- CNPO

  $\partial Z(x,y)/\partial x = -\mu U_x + p_x =0$, Solución es : $\mu=p_x/U_x$

  $\partial Z(x,y)/\partial y= -\mu\ U_y + p_y=0$, Solución es : $\mu=p_y/U_y$

  $\partial Z(x,y)/\partial \mu=U(x,y)-u=0$, Solución es : $\{u=U(x,y)\}$
- Como

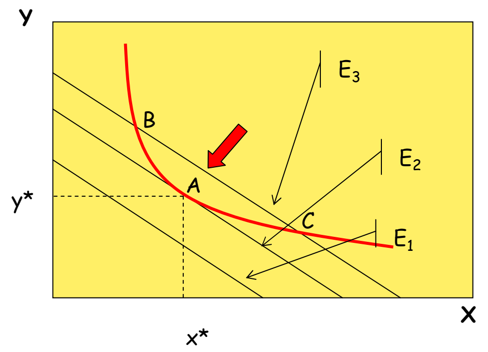
$$\mu=(p_x/U_x)= \mu = (p_y/U_y) =(1/\lambda) \Rightarrow$$

$$(p_x/p_y)=(U_x/U_y) \equiv RMS_{y,x}$$

Las cestas de consumo

- De aquí que la elección de la cesta (x^*,y^*) minimizadora del gasto debe encontrarse en el punto de tangencia de la recta presupuestaria y la curva de indiferencia que genera el máximo nivel de utilidad o bienestar.
- Como este es el mismo punto de elección que maximiza la utilidad de nuestro problema inicial, el problema dual de minimización del gasto genera las mismas cantidades de demanda que se obtienen en el problema inicial, pero las funciones de demandas son compensadas o hicksianas.

El problema de minimización del gasto del consumidor



El dual del problema de maximización del bienestar del consumidor es alcanzar un determinado nivel de utilidad (u) con el menor gasto posible

Demanda compensada

- La demanda compensada resuelve el problema de minimizar el gasto para mantenerse en el nivel de utilidad fijado.

$$\{ \text{Min } XP;\ \text{s.a. } u-U(X)=0\}$$

- Definición: Una curva de demanda compensada muestra la relación entre el precio del bien (p) y la cantidad comprada suponiendo que los otros precios y la utilidad se mantienen constantes.
- La curva de demanda compensada

$$x^*[U=u]=h_x(\, p_x,\, p_y,\, u)$$

La Demanda Hicksiana

- Por tanto h_x muestra como varia la cantidad demandada x cuando varia su precio (p_x) manteniéndose constante los otros precios (p_y) y la utilidad (u), es decir, "compensa" la renta del individuo para mantener constante la utilidad.
- Por lo tanto, h_x , sólo refleja los efectos sustitución de las variaciones de los precios.
- Si sustituimos la solución obtenida (las demandas compensadas) en la función de gasto se tiene:

Función de Gasto

- Sean las soluciones de las curvas de demanda compensada en la función objetivo
- $y=h_y(p_x, p_y, u)$
- $x=h_x(p_x, p_y, u)$
- Obtenemos la función de gasto.
- $p_x h_x(p_x, p_y, u)+p_y\ h_y(p_x, p_y, u) \equiv G(p_x, p_y, u)$
- <u>La función de gasto</u> del consumidor muestra los gasto mínimos necesario para alcanzar un determinado nivel de utilidad con un determinado conjunto de precios

La Función de Gasto

- Propiedades de la función de gasto.
- (1) La función de gasto es no decreciente en precio; es decir si $\mathbf{p}' \geqq \mathbf{p}$; entonces $G(\mathbf{p}',u) \geqq G(p,u)$.
- (2) La función de gasto es homogénea de grado uno en precio.
- (3) La función de gasto es cóncava en precios
- (4) La función de gasto es continua en precio; cuando los precios son no nulos y estrictamente positivos ($\mathbf{p}$>>0).

Identidades

- Para las preferencias regulares una cesta de consumo que maximiza la utilidad también minimiza el gasto a lo cual llamamos dualidad. Esta sencilla observación nos lleva a cuatro importantes identidades:
  1. $G(\mathbf{p},V(\mathbf{p},M)) \equiv M$. Es el gasto mínimo necesario para alcanzar la utilidad $V(\mathbf{p}, M)$ es M
  2. $V(\mathbf{p}, G(\mathbf{p},u)) \equiv u$. La utilidad máxima generada por la renta $G(\mathbf{p},u)$ es u.

Identidades

3. $x_i(\mathbf{p},M) \equiv h_i(\mathbf{p}, V(p,M))$; La demanda marshalliana correspondiente al nivel de renta M es idéntica a la demanda hicksiana correspondiente al nivel de utilidad $V(\mathbf{p},M)$.
4. $h_i(\mathbf{p},u)\equiv x_i(\mathbf{p},G(\mathbf{p},u))$ La demanda hicksiana correspondiente al nivel de utilidad u es idéntica a la demanda marshalliana correspondiente al nivel de renta $G(\mathbf{p},u)=M$

Dualidad

Fijos (p, m)

$V(p,m) \equiv \max_{X \geq 0} U(X)$

$Sa.: m - px \geq 0$

Problema Dual

Fijos (p, u)

$e(p,u) \equiv \min_{X \geq 0} pX$

$Sa.: U(X) - u \geq 0$

Demand Marshallian

$X = X(p,m)$

Demand Hicksians

$h = h(p,u)$

Sustitución

Fun. Ind. Utilidad

$V(p,m) = U(X(p,m))$

Inversa

Fun. gasto

$e(p,u) = p * h(p,u)$

Identidad Roy

$X_i(p,m) \equiv -\dfrac{\partial V(p,m)/\partial p_i}{\partial V(p,m)/\partial m}$

Propiedad de la derivada

$h_i(p,u) \equiv \dfrac{\partial e(p,u)}{\partial p_i}$

Ejemplo

Sea:

$$\min_{x,y,\mu} Z(x,y,\mu) = p_x x + p_y y + \mu\left(x^{\alpha} y^{1-\alpha} - u\right)$$

CNPO

$$\frac{\partial Z(x,y,\mu)}{\partial x} = p_x - \mu\left(x^{\alpha-1} y^{1-\alpha}\right)\alpha = 0$$

$$\frac{\partial Z(x,y,\mu)}{\partial y} = p_y - \mu\left(x^{\alpha} y^{-\alpha}\right)(1-\alpha) = 0$$

$$\frac{\partial Z(x,y,\mu)}{\partial \mu} = x^{\alpha} y^{1-\alpha} - u = 0$$

De las condiciones de primer orden se tiene de 1 y 2

$$y = \left(\frac{p_x}{p_y}\right)\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)x$$

$$x = \left(\frac{p_y}{p_x}\right)\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)y$$

Funciones de demanda compensada

$$u = x^{\alpha} y^{1-\alpha} = x^{\alpha}\left[\left(\frac{p_x}{p_y}\right)\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)x\right]^{1-\alpha} = x\left[\left(\frac{p_x}{p_y}\right)\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\right]^{1-\alpha}$$

$$h_x^d\left(p_x, p_y, u\right) = x = \left[\left(\frac{p_x}{p_y}\right)\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\right]^{-(1-\alpha)} u = \left(\frac{p_x}{p_y}\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\alpha-1} u$$

$$u = x^{\alpha} y^{1-\alpha} = y^{1-\alpha}\left[\left(\frac{p_y}{p_x}\right)\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)y\right]^{\alpha} = y\left[\left(\frac{p_y}{p_x}\right)\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\right]^{\alpha}$$

$$h_y^d\left(p_x, p_y, u\right) = y = \left[\left(\frac{p_y}{p_x}\right)\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\right]^{-\alpha} u$$

Función de Gasto

$$G\left(p_x, p_y, u\right) \equiv p_x h_x\left(p_x, p_y, u\right) + p_y h_y\left(p_x, p_y, u\right)$$

$$G\left(p_x, p_y, u\right) \equiv \left(p_x\left(\tfrac{1-\alpha}{\alpha}\,\tfrac{p_x}{p_y}\right)^{\alpha-1} u\right) + \left(p_y\left(\tfrac{\alpha}{1-\alpha}\,\tfrac{p_x}{p_y}\right)^{-\alpha} u\right)$$

$$G\left(p_x, p_y, u\right) \equiv \left(p_x\left(\tfrac{1-\alpha}{\alpha}\,\tfrac{p_x}{p_y}\right)^{\alpha-1} + p_y\left(\tfrac{\alpha}{1-\alpha}\,\tfrac{p_x}{p_y}\right)^{-\alpha}\right)u$$

Propiedad de la derivada

$$\frac{\partial G\left(p_x, p_y, u\right)}{\partial p_x} \equiv \frac{\partial\left(p_x\left(\tfrac{1-\alpha}{\alpha}\,\tfrac{p_x}{p_y}\right)^{\alpha-1} + p_y\left(\tfrac{\alpha}{1-\alpha}\,\tfrac{p_x}{p_y}\right)^{-\alpha}\right)u}{\partial p_x}$$

$$\frac{\partial G\left(p_x, p_y, u\right)}{\partial p_x} \equiv \left(\tfrac{1-\alpha}{\alpha}\,\tfrac{p_x}{p_y}\right)^{\alpha-1} u = h_x$$

Inversa de la función de gasto

$$G(p_x, p_y, u) \equiv \left(p_x \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{p_x}{p_y} \right)^{\alpha-1} + p_y \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{p_x}{p_y} \right)^{-\alpha} \right) u = M$$

$$u = \frac{M}{\left(p_x \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{p_x}{p_y} \right)^{\alpha-1} + p_y \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{p_x}{p_y} \right)^{-\alpha} \right)} = V(p_x, p_y, M)$$

Tarea

1. Volver a resolver el problema de minimización del gasto para ello asuma que α=0.6
2. Demostrar la propiedad de la derivada para x e y con la función de gasto
3. Con la función inversa obtenida de función de utilidad indirecta demostrar la identidad de Roy para x e y
4. Obtener la solución de la función indirecta de utilidad por maximización de la utilidad y las demandas ordinarias y comparar con los dos puntos anteriores.

- Fecha de entrega 27/10/2006

Minimización del Gasto

Microeconomía

Douglas Ramírez Vera