Repaso de Matemáticas 1

Microeconomía

Douglas Ramírez

Relaciones Matemáticas

Funciones

Optimización

Relaciones entre variables

- El objetivo de cualquier disciplina científica es descubrir que variables influyen o determinan el comportamiento de una o más variables
- Para ello se tienen un conjunto de variables llamadas independientes, exógenas o explicativas

$$(x_1, x_2, \dots x_n)$$

- Que influyen o determinan una o más variables llamadas dependientes, endógenas o explicadas

$$(y_1, y_2, \dots y_m)$$

Funciones

- Una función es un conjunto de pares ordenados con la propiedad de que todo valor x únicamente determina un valor y.
- Una función es una relación pero una relación no es necesariamente una función
- Una función también se denomina aplicación o transformación, esto significa la acción de asociar una cosa con otra
- En la proposición y=f (x), la notación funcional f se interpreta como una regla mediante la cual el conjunto x es aplicado o transformado en el conjunto y

Funciones

- Para establecer una representación de relación entre las variables se hace uso de funciones

$$y=f\,(x_1, x_2,\ldots x_n)$$

- Aunque en el estudio de la microeconomía se estudian funciones de R^n en R^m, los modelos que aquí se estudiarán serán funciones de R^n en R o de R en R
- En la expresión, f : x ➔ y la flecha indica aplicación, la letra f expresa simbólicamente una regla de aplicación

$$y=f(x) \qquad\qquad y=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

$$f:\underset{x}{R}\rightarrow\underset{y}{R} \qquad\qquad f:\underset{(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{R^n}\rightarrow\underset{y}{R}$$

Las gráficas

- Aun cuando la mayoría de las relaciones en economía no son "monocausales" la mayoría de las relaciones se representan en escalas de dos o tres dimensiones asumiendo que el resto de variables permanecen constantes"
- Sí fijamos en un valor de una variable en una relación funcional, asumiéndola como constante, la dimensión de la relación se reduce a un plano menor

$$y = f(x_1, x_2)$$

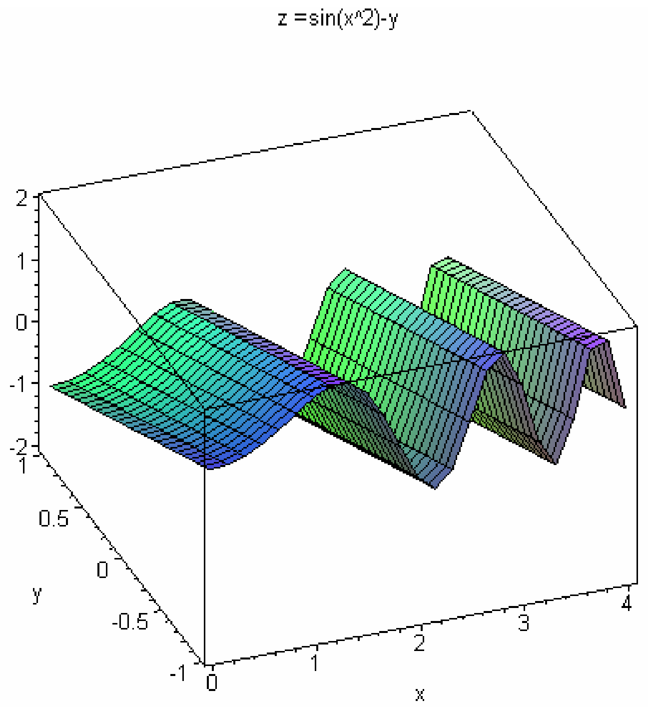
$$x_2 = x_2^0$$

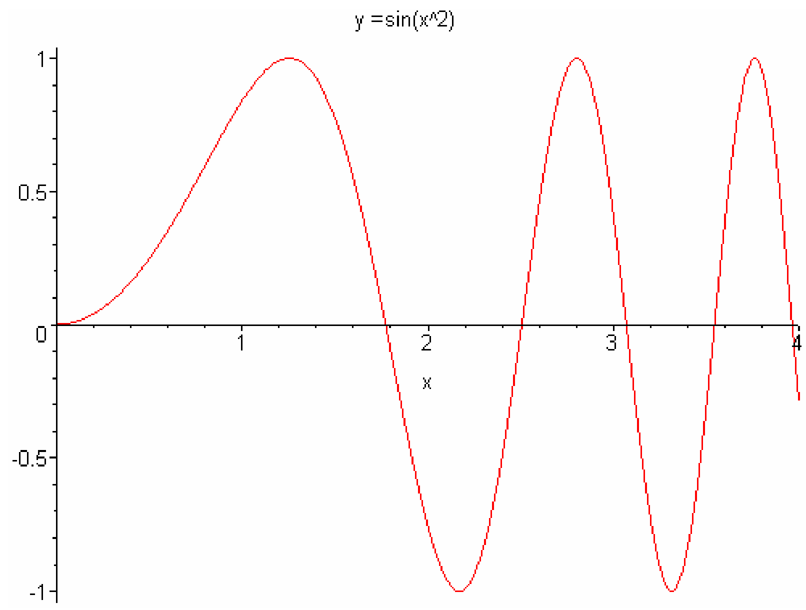
$$y = f(x_1, x_2^0)$$

$$\Rightarrow y = f(x_1)$$

Un ejemplo

$$z = \sin x^2 - y \rightarrow y = \sin x - \bar{z} \Rightarrow y = f(x)$$



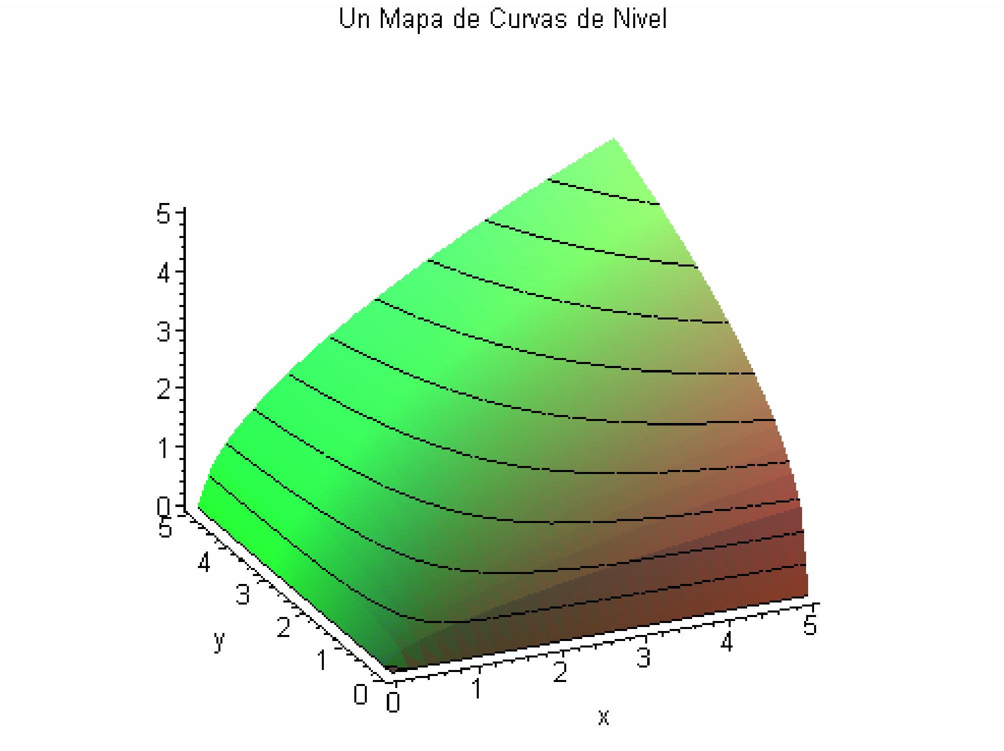


La cláusula de “ceteris paribus”

- En la teoría del consumidor se dice que la cantidad demandada depende del precio del bien y del ingreso entre otros factores $Q_x = f\ (P_x, I, \ldots)$
- Es una función de R^2 en R, si se representara la función debería ser representada en un espacio y no en un plano, sin embargo se representa normalmente en un plano
- ¿Por qué se representa en un plano una función de R^n en R? Es porque se esta haciendo uso de La cláusula de “ceteris paribus” ("manteniendo lo demás constante”)
- Se representa la relación entre la variable explicada y una explicativa, manteniendo fijas el resto de las variables

Ejemplo

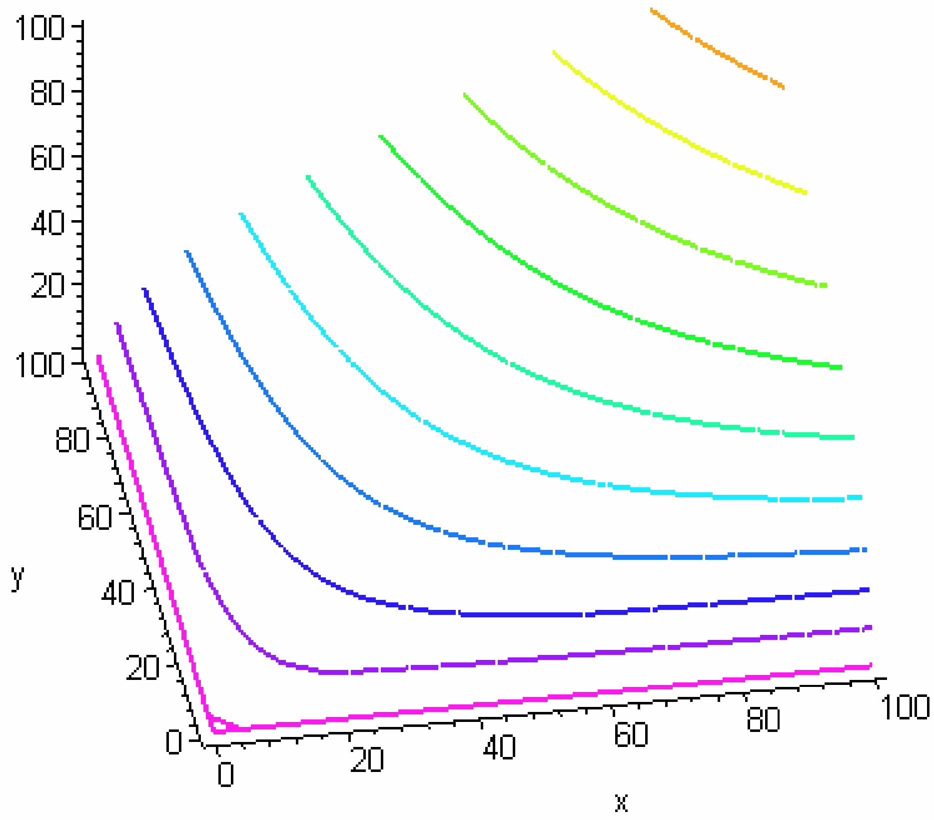
- Suponga que la variable y es explicada por dos variables — $U=f(x, y)$ — y asumamos que es representada por la figura adjunta
- Se puede observar que para un valor dado de x e y se tiene un valor de U y si se mantiene fija U se puede analizar la relación entre y e x



Ejemplo

- En esto consiste la cláusula "ceteris paribus", analizar la relación entre la variable explicada y la variable explicativa considerando las demás explicativas como constantes
- La línea que representa esta relación en el plano (x, y) se le llama curva de nivel y representa el conjunto de combinaciones de x e y que permiten obtener un mismo valor de U^0
- Realizando la proyección en el plano x, y se tendría los valores de U

Un Mapa de Curvas de Nivel

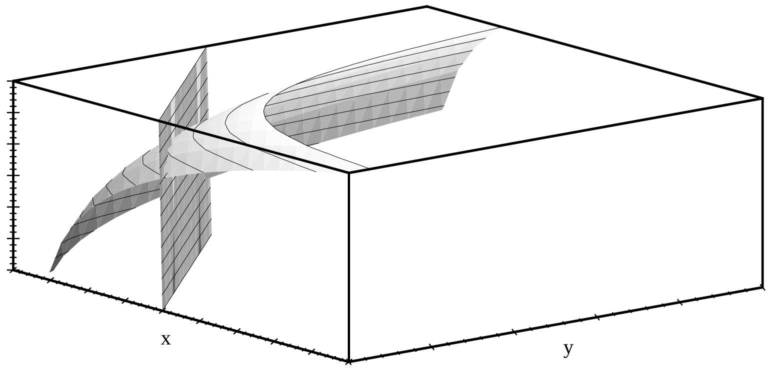


Racionalidad y optimización

- De acuerdo al principio de conveniencia las personas buscan dotarse de los medios que mejor lo dotan para los fines de la vida con el empleo del menor costo o uso de medios, en este sentido son racionales
- Los agentes económicos intentan optimizar sus objetivos sujetos a diferentes restricciones, es decir, tratan de maximizar o minimizar funciones, según sea el objetivo, asignando los recursos escasos a los fines alternativos
- Para obtener soluciones razonables se restringe el rango posible de soluciones a unos valores lógicos

Nociones

- Los problemas microeconómicos adoptan generalmente, la forma de optimización restringida, por ello se necesitan nociones básicas sobre optimización sujeta o no a restricciones de variables reales en el plano ($R \rightarrow R$) y en el espacio ($R^n \rightarrow R$)
- En general, los problemas se plantearán en funciones continuas y diferenciables y para ello se estudiarán algunas ideas sobre el cálculo variaciones



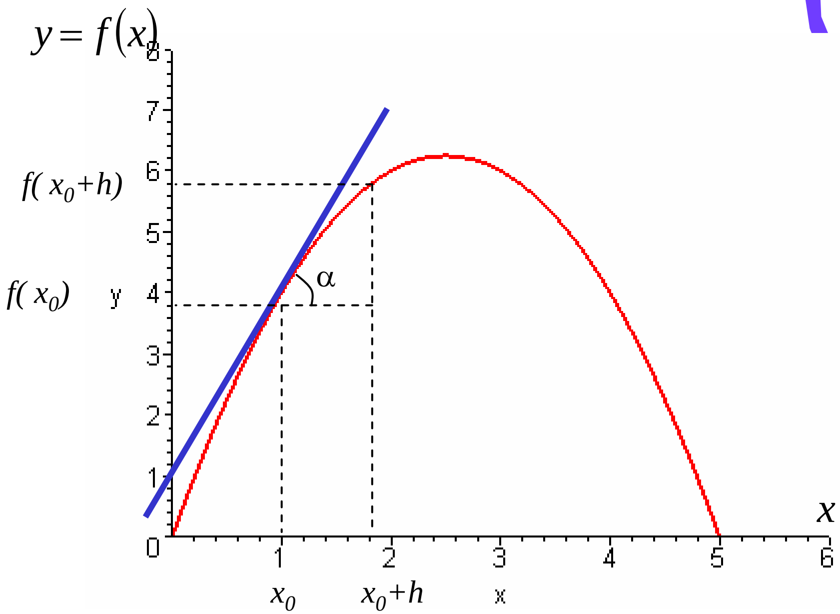
Calculo de Variaciones

- Variación diferencial de y (Δy) respecto a la variación diferencial de x (Δx)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{x+h-x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

•Si llevamos la relación al limite donde la variación se hace infinitamente pequeña se puede expresar como

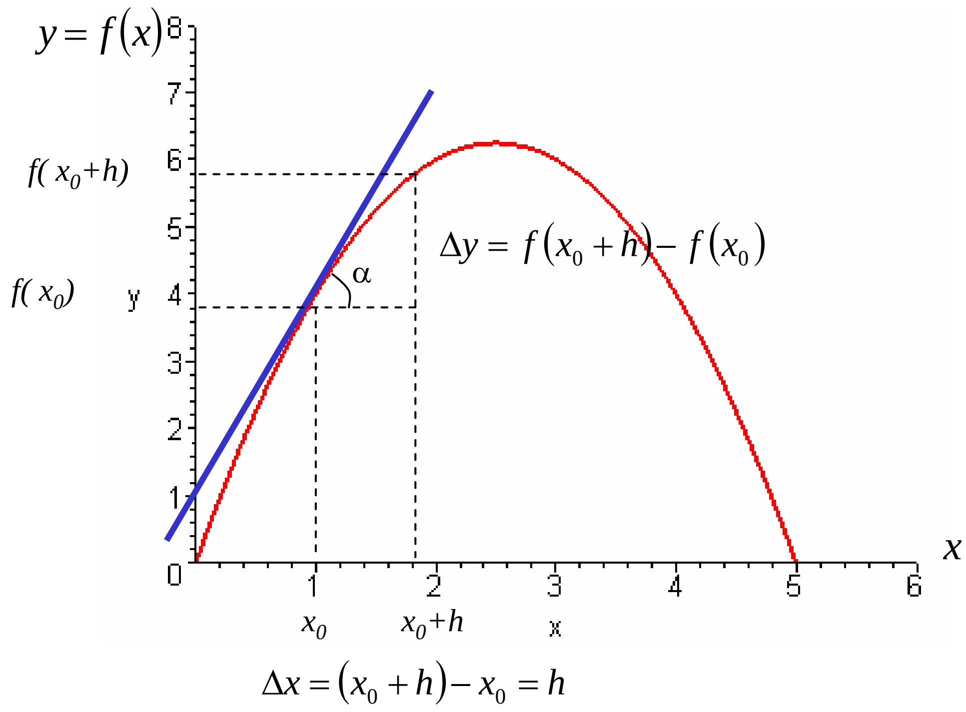
$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



Calculo de Variaciones

- Cuando la variación de x es infinitamente pequeña, la tangente del ángulo α coincide con el valor del cociente de variaciones o derivada

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = tag\,\alpha$$



¿Por qué importan las derivadas?

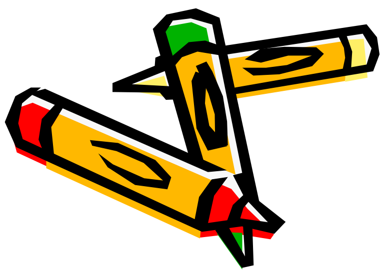
- Conocer el valor de la derivada de una variable y respecto a x equivale a conocer la relación existente entre las variaciones absolutas de las variables

- Suponga que la relación conocida es $dy/dx=-6 \rightarrow dy=-6dx$. Suponga que y es la cantidad demandada y que x es el precio. Suponga que el precio aumenta en $dx=2$, entonces la cantidad demandada se reducirá en $dy=-12$

- Cómo la derivada coincide con el valor de la tangente en el punto, este puede ser positivo o negativo indicando aumento o disminución,

¿Por qué las derivadas ...?

- En economía a a todas las derivadas se les pone el adjetivo marginal: utilidad marginal, costo marginal, beneficio marginal, etc.
- La derivada proporciona un conocimiento sobre el signo y la magnitud de las relaciones entre las variaciones absolutas de dos variables.
- Además, las derivadas nos ayudan a caracterizar, los máximos y los mínimos que son el objetivo de los problemas de optimización de la mayoría de los problemas microeconómicos



Ejemplo: Elasticidades

- Hemos visto que $dy/dx = f'(x)$
- Sí el interés es conocer la variación relativa entre las variables independientemente de la unidad de medida.
- Entonces si relativizamos la variación de y respecto a un determinado valor de y al igual que x se tiene las tasas de cambio o variaciones relativas

$$E_{y,x} = \frac{\Delta y / y}{\Delta x / x} = \frac{\frac{y_1 - y_0}{y_0}}{\frac{x_1 - x_0}{x_0}} = \frac{\frac{dy}{y}}{\frac{dx}{x}} \quad \Rightarrow \quad E_{y,x} = \frac{dy}{dx}\frac{y}{x} = f'(x)\frac{x}{f(x)}$$

Supongamos que la elasticidad Eyx=—2. Esto implica que sí la variable x ha disminuido en un 6% la variable y aumentará en un 12%

Aplicación (a)

- El jefe de producción ha establecido una relación entre el único insumo x y la cantidad producida y. Esta relación es dy/dx =6x. Sabemos que actualmente se utiliza 5 unidades de x y esto le permite obtener 50 unidades de y. El desea utilizar dos unidades adicionales de x ¿Cuánto es la variación absoluta que experimentará la producción?
- Sol
- Calculamos el valor de la derivada en x=5
- Aplicamos el incremento dx=2 , dy=¿?

$$si\ x = 5 \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=5} = 6(5) = 30$$

$$sí\ dx = 2 \Rightarrow dy = (30) * 2 = 60$$

Aplicación (b)

- El gerente general, que no le interesa los aspectos técnicos, pregunta al gerente de producción cuanto es el cambio porcentual en la producción ante una duplicación de los factores empleados
- Sol.
- Aquí se pueden aplicar las elasticidades, por el apartado anterior sabemos que

$$E_{y,x} = \frac{\frac{dy}{y}}{\frac{dx}{x}} = \frac{dy}{dx}\frac{x}{y} = 6x\frac{x}{y}\Big|_{x=5,y=50} = 6*\left(\frac{25}{50}\right) = 3$$

Por cada punto porcentual en que se incrementa los insumos, el producto aumenta un 3%. Por lo tanto si se duplica los insumos, la producción se sextuplica

$$\frac{dy}{y} = 3\frac{dx}{x} = 3*200\% = 600\%$$

Optimización de funciones de una variable

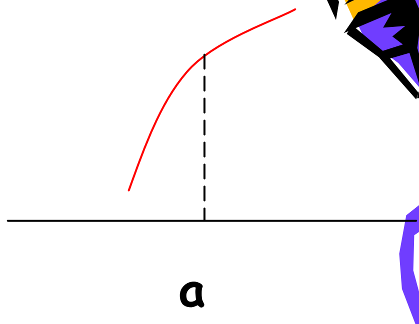
Derivadas

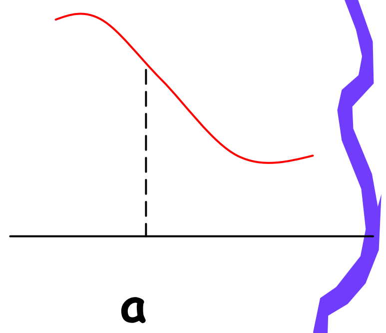
Concavidad y Convexidad

Máximos y Mínimos

Crecimiento de una función

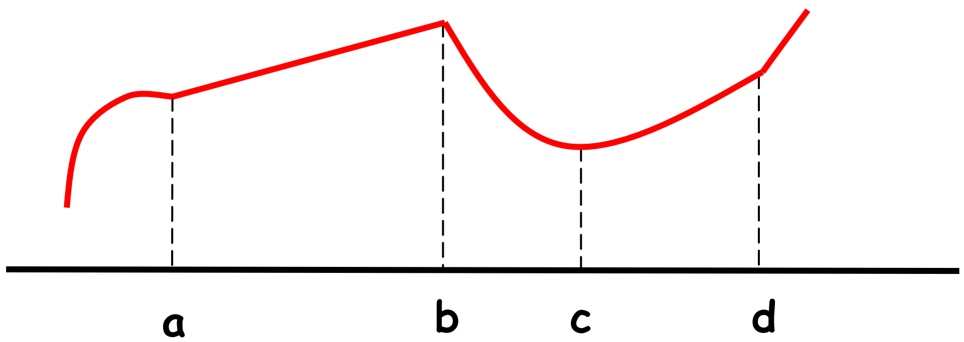
- Sea f una función derivable en un punto $x=a$. Entonces
  - Si $f'(a)>0$, f es creciente en a
  - Si $f'(a)<0$, f es decreciente en a
- Para determinar los intervalos de crecimiento de una función, se encuentran los valores (extremos relativos) para los cuales la función se anula o no se encuentra definida y una vez ordenada se estudian el signo de f' y los intervalos de crecimiento de f.





Extremos relativos de una función

- Sí f alcanza en x=a un extremo relativo (máximo o mínimo) entonces, o bien f'(a)=0 ó bien f'(a) no existe
- Sin embargo, puede suceder cualquiera de las dos cosas sin que f posea un extremo relativo en x=a



La función dibujada sólo presenta extremos en b y c, y en cambio, f' se anula en a y c y no existe en b y d (los puntos agudos no son derivables pues la pendiente es distinta a izquierda y derecha)

Criterio del cambio de signo

- **Los siguientes criterios garantizan la existencia de extremos**:
- Sea f una función continua en a y derivable alrededor de a
- Si en a, el signo de f' cambia de positivo a negativo, f tiene un máximo en a
- Si en a, el signo de f' cambia de negativo a positivo, f tiene un mínimo en a
- Si en a, el signo de f' no cambia, f no tiene ni un máximo ni un mínimo en a

Ejemplo

Estudiar el crecimiento de la función $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2-4x}$

Solución

Primero se obtiene el domino de la función

$$x^2-4x=0 \to x(x-4)=0$$
$$\to x=0; ó; x=4$$

La función está definida en R-{0, 4}

Al obtener la derivada

$$f'(x)=\frac{-2x^2-2x+4}{x^2(x-4)^2}$$

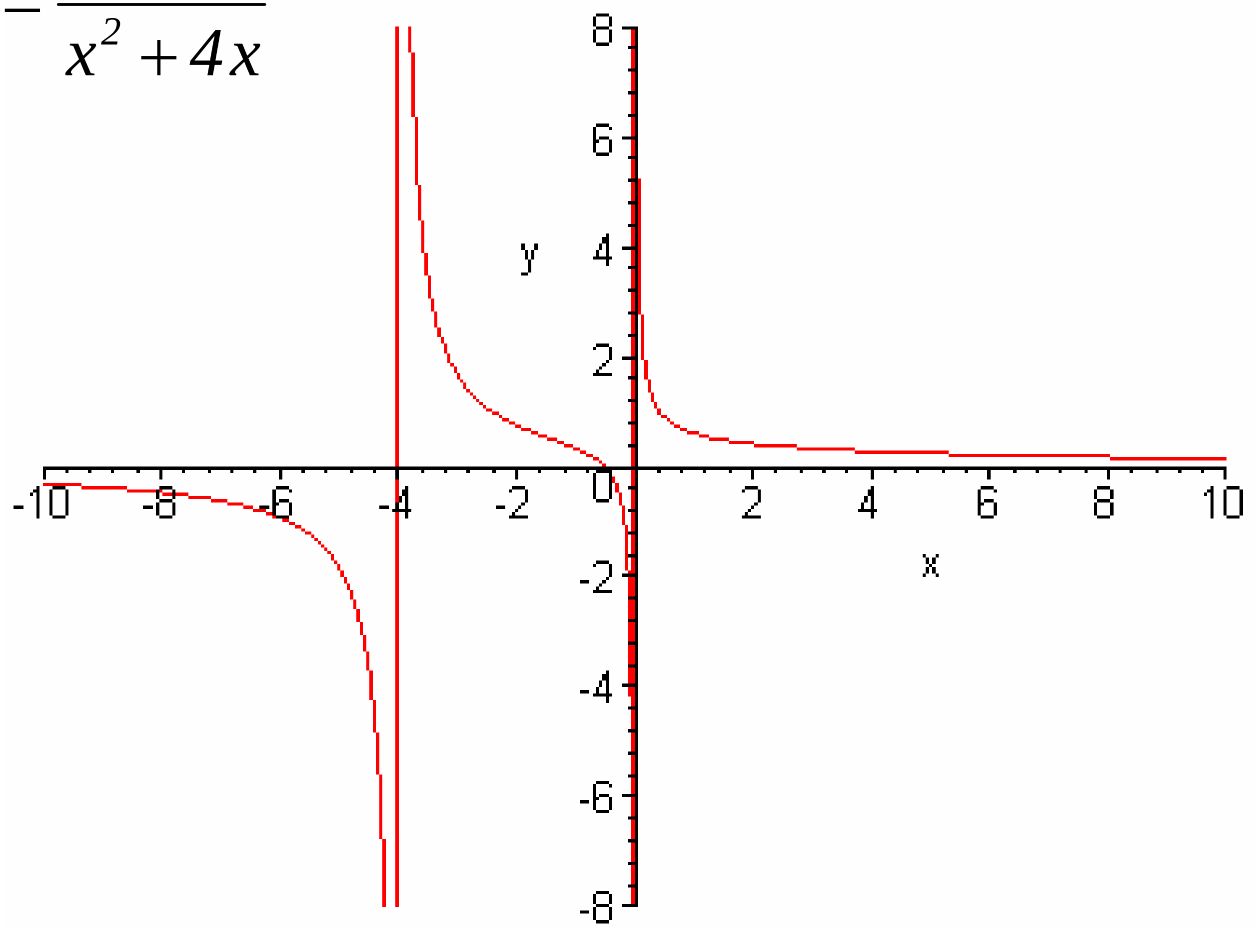
No está definida en los mismos puntos que la función f

Para f'(x)=0➔x=-2 y x=1

Signo f'	−		+		+		−		−
Crecimiento de f	↓	-2	↓	0	↑	1	↑	4	↓

La función decrece en (-∞,-2) crece en (-2,0), crece en (0,1) decrece en (1,4) y decrece en (4,∞). Existe un mínimo relativo en x=-2 y un máximo relativo en x=1

$$f(x)=\frac{2x+1}{x^2+4x}$$

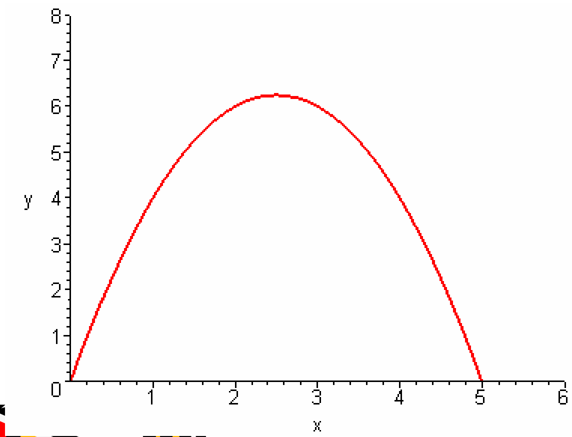


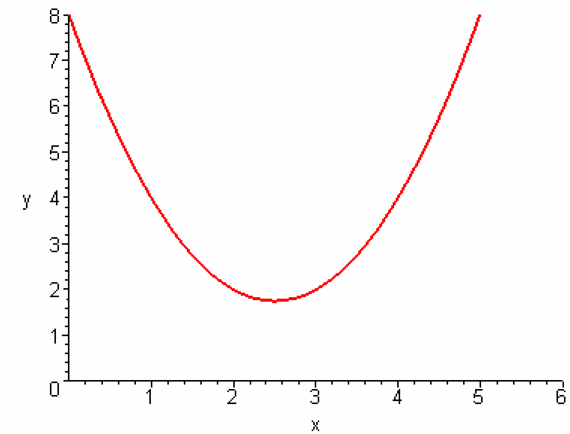
Criterio de la segunda derivada

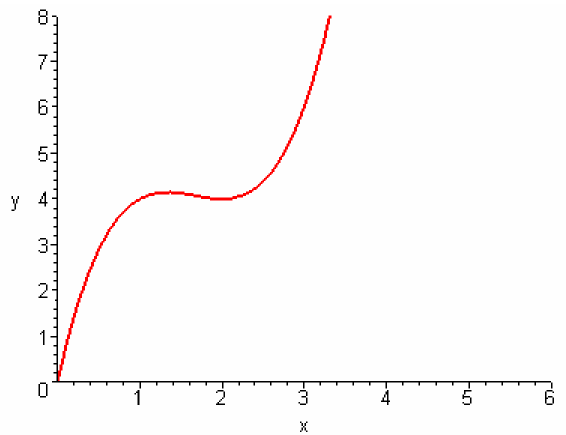
- Si $f'(a)=0$ y $f''(a)>0$, entonces f tiene un mínimo relativo en $X=a$
- Si $f'(a)=0$ y $f''(a)<0$, entonces tiene un máximo relativo en $X=a$
- Ejemplo
- Sea $f(X)=X^2-8X+12$; definida en todo R
- Sea $f'(X)=2X-8=0 \rightarrow X=4$ y $f''(X)=2>0 \rightarrow f''(4)=2>0$
- Concluimos que la función presenta un mínimo en $X=4$

Concavidad y Convexidad

- Diremos que una función es <u>cóncava</u> si su graficas se curva hacia arriba y diremos que una función es <u>convexa</u> si lo hace hacia abajo
- A los puntos donde una función pasa de ser cóncava a convexa o viceversa se les denomina <u>puntos de inflexión</u>





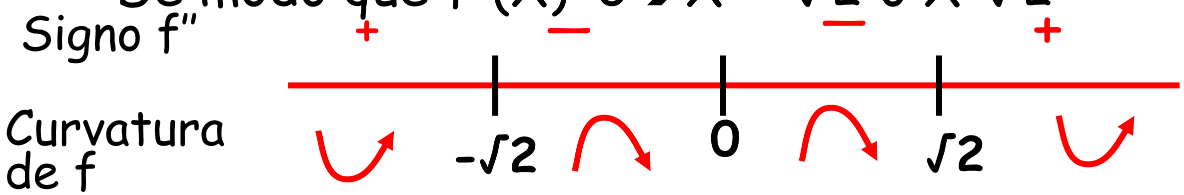


La curvatura de una función

- Si $f''(a)>0$, la función es **cóncava** en a
- Si $f''(a)<0$, la función es **convexa** en a
- Si $f''(a)=0$, la función cambia de signo en a y tiene un punto de inflexión en $x=a$
- Para determinar los intervalos de concavidad y convexidad de una función y de sus puntos de inflexión se encuentran los valores de x donde f'' se anule o no exista y, luego de ordenados, se estudia el signo de f'' y los intervalos de curvatura de f
- Los valores donde f exista y f'' cambie de signo son los puntos de inflexión

Ejemplo

- Estudiar la curvatura de la función $f(X)=X^4-12X^2$
- **SOLUCIÓN**
  - La función está definida en toda R.
  - La condición de primer orden (CNPO) $f'(x)=4X^3-24X$
  - La condición de segundo orden (CSO) $f''(x)=12X^2-24$
  - De modo que $f''(X)=0 \Rightarrow X=-\sqrt{2}$ ó $X=\sqrt{2}$

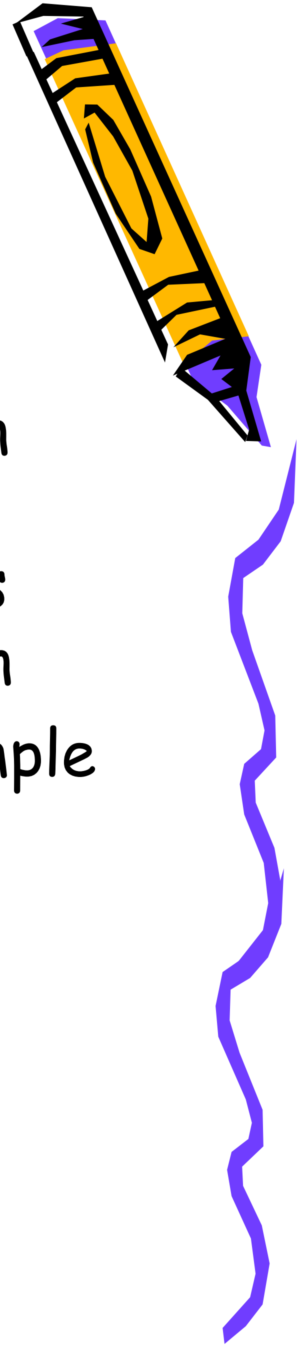


La función es cóncava en $(\infty,-\sqrt{2})$, convexa en $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ y cóncava en $(\sqrt{2},\infty)$. Hay dos puntos de inflexión en $X=-\sqrt{2}$ y en $X=\sqrt{2}$

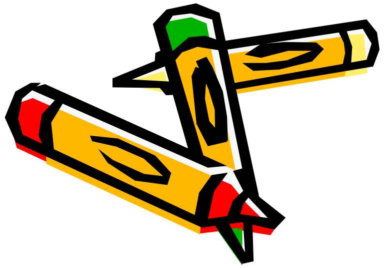
Caracterización analítica de un máximo y un mínimo

- Si la función es cóncava ($f''>0$) la función tiene un máximo
- Si la función es convexa ($f''<0$) la función tiene un mínimo
- **Condición Necesaria**: $dy/dx=0$; de esta ecuación se obtienen los puntos críticos, aquellos valores de x candidatos a optimizar la función y que se denotan por x^*
- **Condición Suficiente**: $d^2y/dx^2 \leq 0$, x^* es un máximo (f es una función estrictamente cóncava), pero si $d^2y/dx^2 \geq 0$, x^* es un mínimo (f es una función estrictamente convexa)

Continuidad de funciones

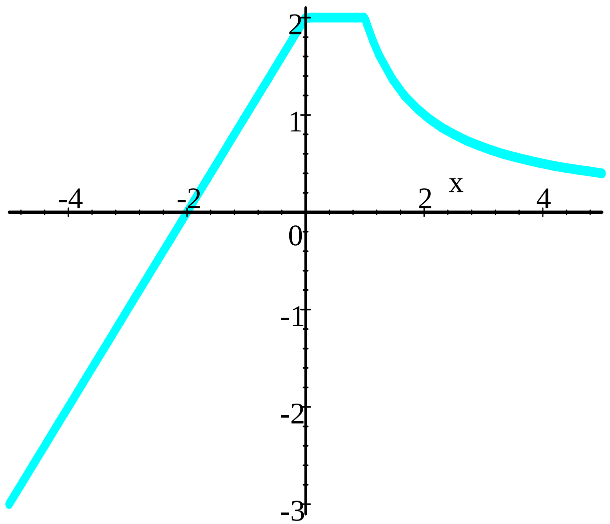


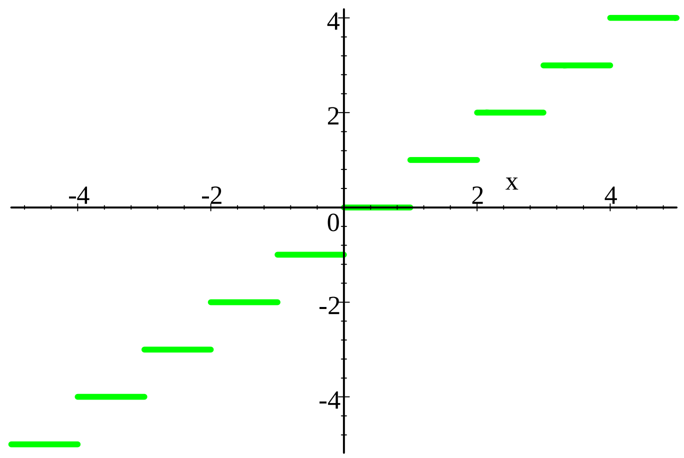
- Tenemos la idea intuitiva de que una función es continua cuando se puede dibujar su gráfica sin levantar el lápiz papel. Si hay que levantarlo se decimos que la función es discontinua en dichos puntos. Esto permite dar la siguiente definición
- Una función y=f(x) es continua en x=a si se cumple las siguientes condiciones
  1. Existe f(a)
  2. Existe el limite por la izquierda de f(a)
  3. Existe el limite por la derecha de f(a)



$$\lim_{x\to a^-} f(a) = \lim_{x\to a^+} f(a)$$

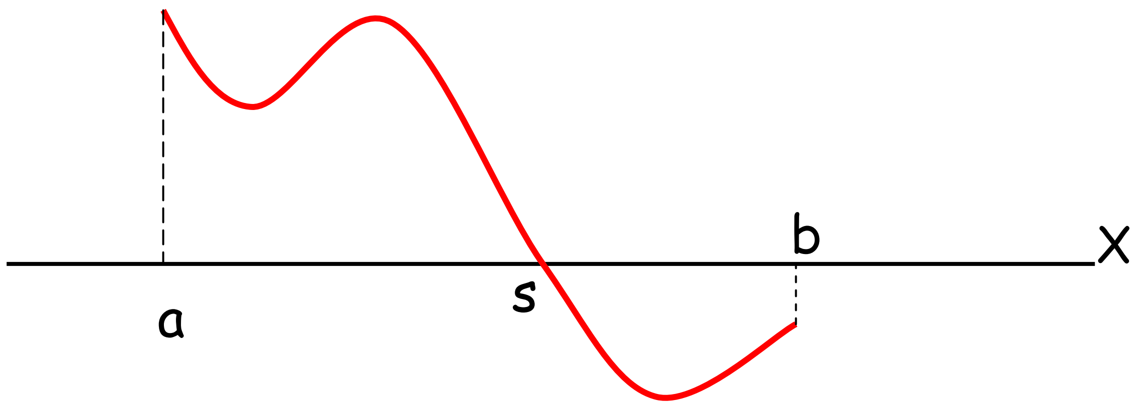
Ejemplo





Teorema de Bolzano

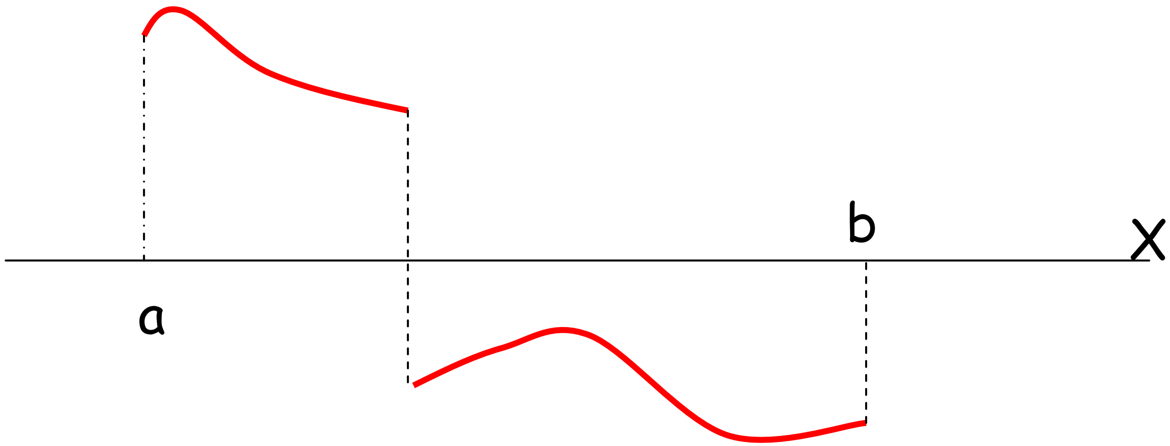
- Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y signo de $f(a) \neq$ signo de $f(b)$, entonces existe un numero $s \in (a, b)$ tal que $f(s)=0$.



El teorema dice que si una grafica continua pasa de una parte a otra del eje X, necesariamente la corta

Teorema de Bolzano

- La condición de que f(x) sea continua es imprescindible, como muestra el siguiente ejemplo



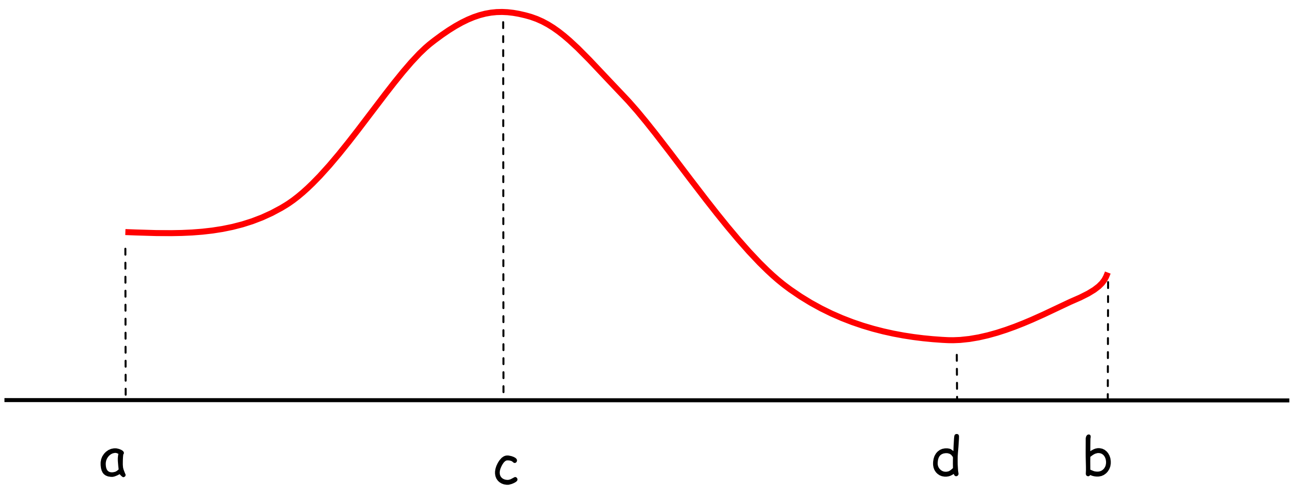
Es una grafica no continua que pasa de un lado a otro del eje X sin cortarlo

Ejemplo Bolzano.

- Probar que la ecuación $X^3 - 3X+40=0$ tiene alguna raíz real.
- Sol.
  - Si llamamos $f(x)= X^3 - 3X+40=0$, encontramos tanteando que $f(-4)=-12$ y $f(-3)=22$
  - Dado que f(x) es una función continua (es un polinomio) el teorema de Bolzano garantiza la existencia de un numero $s \in (-4, -3)$ tal que $f(s)=0$, es decir, que es la raíz de la ecuación.

Teorema de Weierstrass

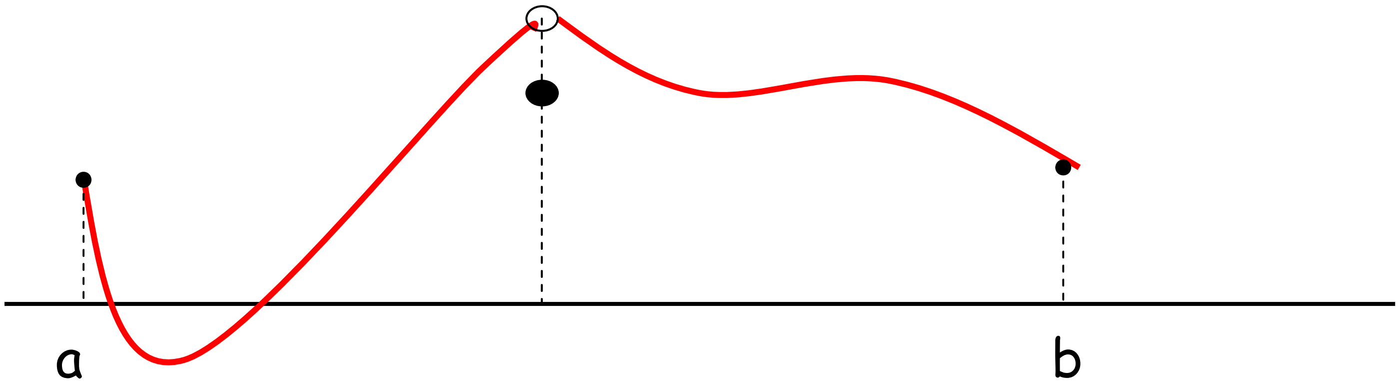
- Cualquier función continua en el intervalo [a, b], alcanza su máximo y mínimo absoluto en dicho intervalo



En la gráfica f(c) es el valor máximo y f(d) es el valor mínimo de la función en [a, b]

Teorema de Weierstrass

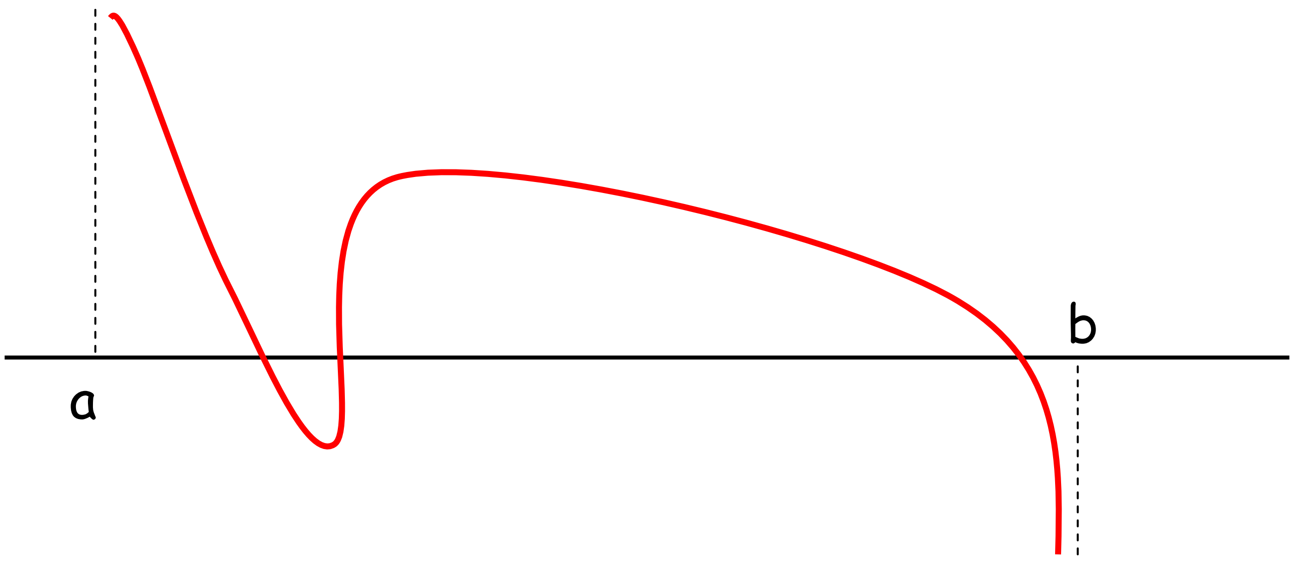
- La continuidad de f(x) y que el intervalo [a, b] sea cerrado son condiciones ineludibles para garantizar la existencia de los extremos, tal como muestran los siguientes ejemplos.



En el ejemplo f(x) no es continua en [a, b] y no alcanza el máximo

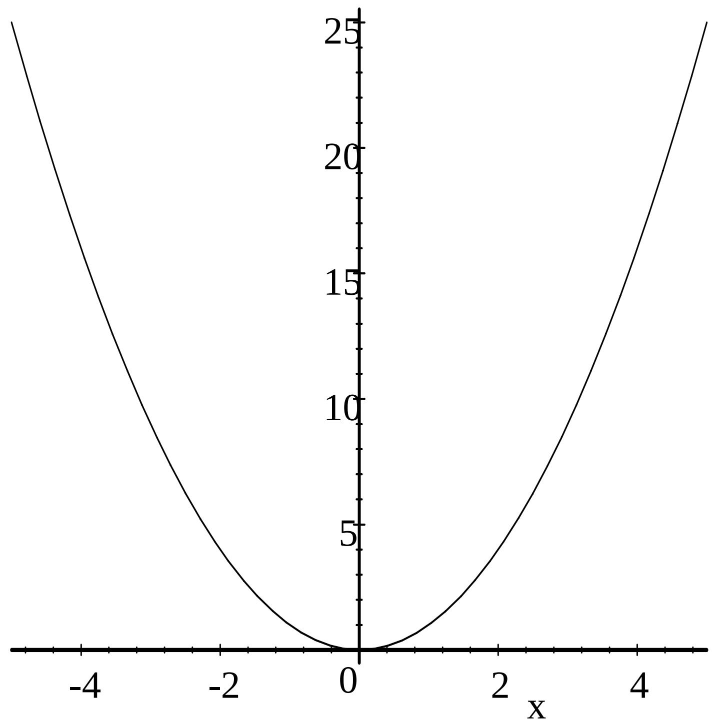
Teorema de Weierstrass

- En f(x) es continua, pero el intervalo (a, b) no es cerrado y no hay máximo ni mínimo.



Ejemplo W

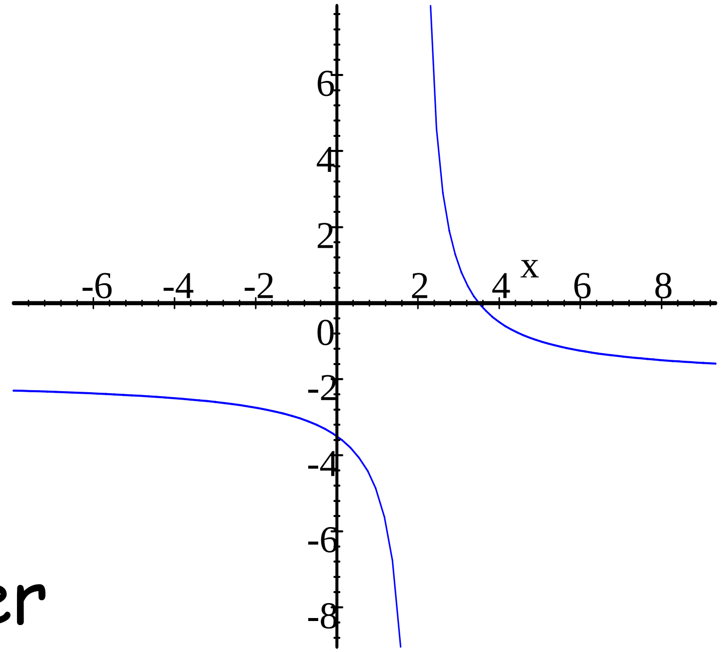
- La función $f(x)=x^2$ es continua en el intervalo [-4,4](lo es en todo R). En dicho intervalo alcanza un máximo en x=-4 y x=4, de valor 16 y un mínimo absoluto en x=0 de valor cero



Ejemplo W

En cambio la función

$$g(x)=\frac{1}{x-2}$$



No tiene en el intervalo [-8, 8] ni máximo ni mínimo absoluto, por no ser continua en x=2 y ser el limite

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=-\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} g(x)=\infty$$

Funciones de varias variables

Derivadas Parciales

Optimización Restringida

Derivadas parciales

- Supongamos que tenemos funciones de R^2 en R como: $y=f\,(x_1,x_2)$
- Si calculamos el diferencial o variación tenemos

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2$$

Las derivadas parciales pretenden medir la variación causada en la variable dependiente causada por cada una de las variables independientes

Derivadas parciales

$\frac{\partial y}{\partial x_1}$

- Mide cual es la variación de la variable dependiente (y) ante un cambio en la variable independiente x_1, suponiendo que la variable x_2 permanece constante, esto es , cuando $dx_2=0$

$\frac{\partial y}{\partial x_2}$

- Mide cual es la variación de la variable dependiente (y) ante un cambio en la variable independiente x_2, suponiendo que la variable x_1 permanece constante, esto es , cuando $dx_1=0$

Derivadas parciales y diferenciales totales

- Encontrar los puntos extremos de funciones con varias variables de elección los signos de las derivadas desempeñan un papel relevante en la localización de los puntos extremos en especial las derivadas parciales de segundo orden
- La función $y=f(x_1,x_2)$ puede dar origen a dos derivadas de primer orden

$$f_1 = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \frac{\partial y}{\partial x_1} \qquad f_2 = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \frac{\partial y}{\partial x_2}$$

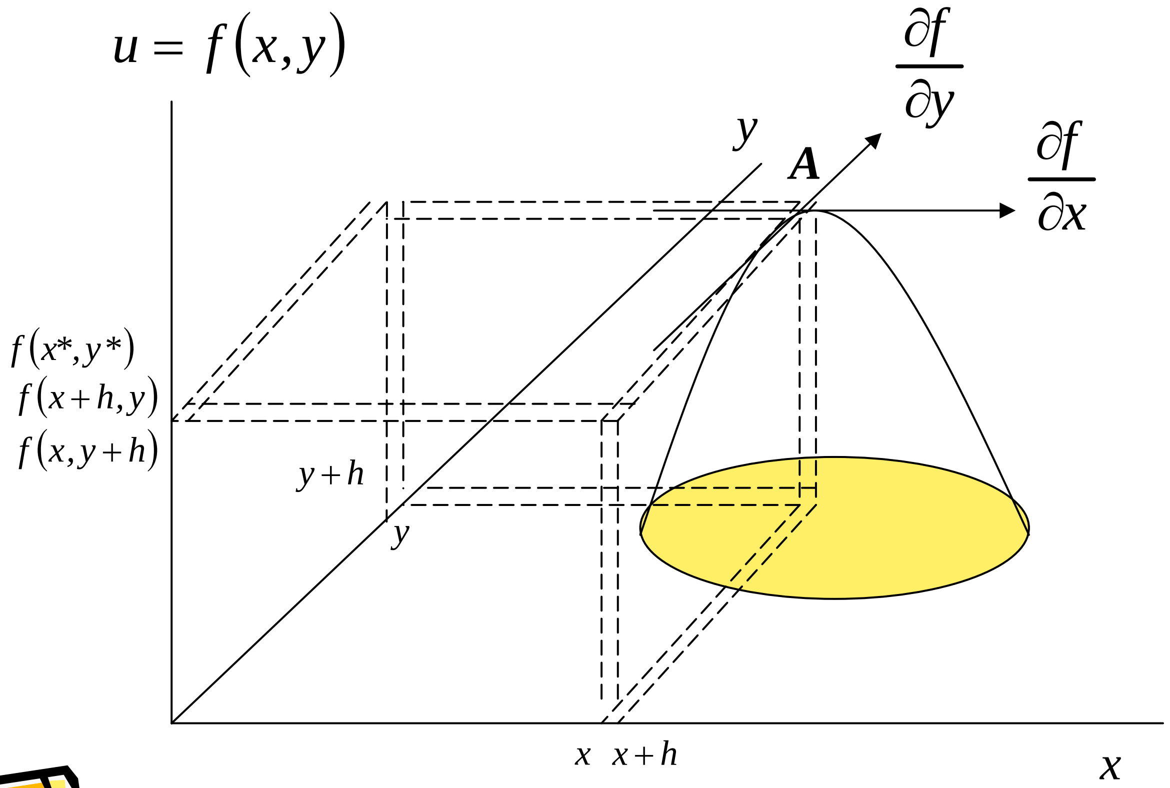
$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2 = 0$$

Condiciones necesarias

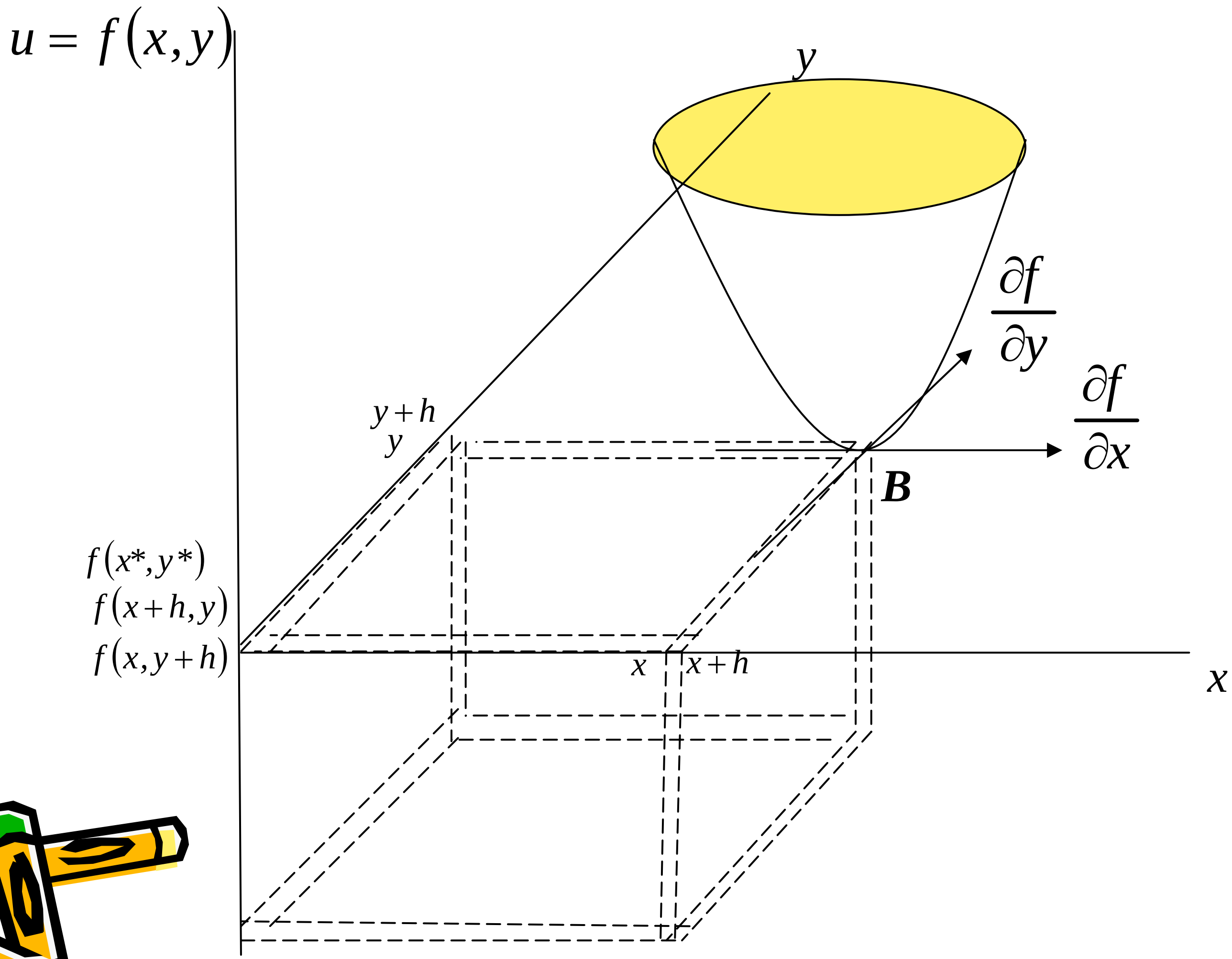
- Suponga que tenemos una superficie el punto como lo muestran las dos figuras siguientes, siendo el punto A un máximo y el B un mínimo.
- Sí cortamos la superficie por dos planos pasando por el punto A (B) sean paralelos a los planos y-x_1, yx_2, respectivamente, obtendremos las dos tangentes ($\partial f/\partial x_1$; $\partial f/\partial x_2$) que muestra la figura
- La tangente $\partial f/\partial x_1$ ($\partial f/\partial x_2$) es aquella para que el valor de x_2 (x_1) se mantiene constante y la derivada parcial de la función es nula y son las <u>condiciones necesarias para un punto extremo</u>

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$$

Derivadas parciales y CNPO de una función de R^2 en R



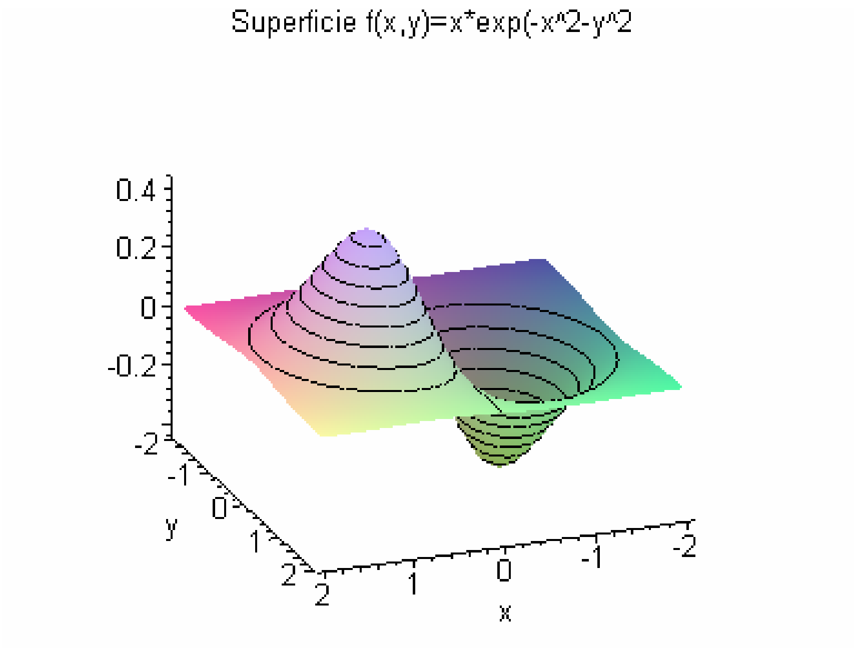
Derivadas parciales y CNPO de una función de R^2 en R

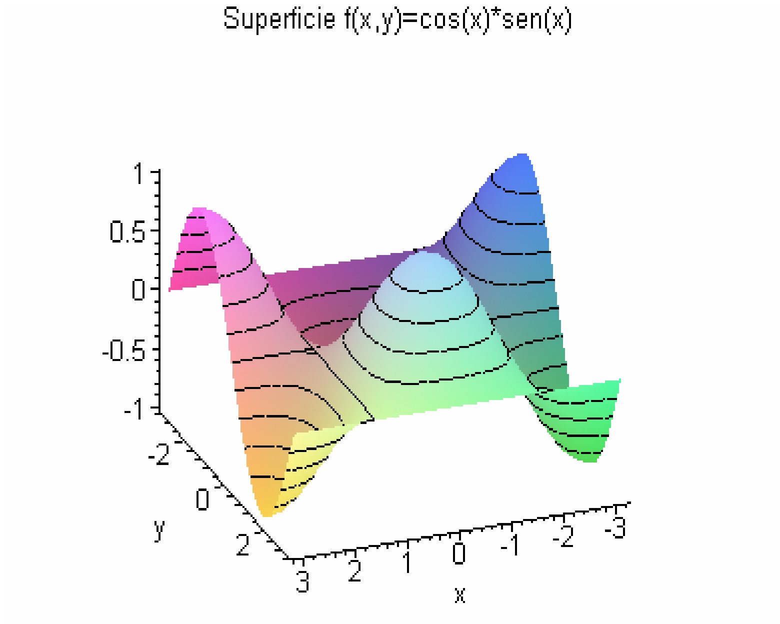


Condiciones suficientes

- Al igual que el caso de una variable, las primeras derivadas parciales nulas constituyen una condición necesaria (condición de primer orden) pero no son condiciones suficientes para la existencia de un máximo o un mínimo
- Si $\partial f/\partial X_i = 0$ el punto puede ser un valor extremo, como se muestran en los dos grafico siguientes donde existen puntos extremos de mínimos, máximos, puntos de inflexión y puntos de silla
- Como antes la condición de primer orden es una condición necesaria pero no suficiente

Ejemplos


Superficie f(x,y)=x*exp(-x^2-y^2
0.4
0.2
0
-0.2
-2
-1
0
1
2
y
2
1
0
-1
-2
x


Superficie f(x,y)=cos(x)*sen(x)
1
0.5
0
-0.5
-1
-2
0
2
y
3
2
1
0
-1
-2
-3
x

Derivadas parciales y diferenciales totales

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2 = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = 0$$

- Como f_1 y f_2 son función de x_1 y de x_2 se puede medir la tasa de cambio con respecto a x_1 y x_2 manteniendo como constante cada una a su vez y así obtener su segunda derivada parcial como:

$$f_{11} = \frac{\partial \partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_1} = \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^{\,2}}$$

$$f_{22} = \frac{\partial \partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2^{\,2}}$$

Teorema de Young

- Recordemos que f_1 es función de x_2 y f_2 es función de x_1. En consecuencia otras dos derivadas parciales llamadas <u>derivadas parciales cruzadas o mixtas</u> porque cada una de ellas mide la tasa de cambio de una derivada parcial de primer orden con respecto a la otra variable y se denota como:

$$f_{12} = f_{21} = \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial f\left(x_1,x_2\right)}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial f\left(x_1,x_2\right)}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 f\left(x_1,x_2\right)}{\partial x_1 \partial x_2}$$

•Las derivadas f_{12} y f_{21} tendrán valores idénticos de acuerdo al teorema de Young cuando las dos derivas son funciones continuas

•En ese caso el orden de diferenciación parcial no tiene importancia ya que se garantiza que $f_{12} = f_{21}$ y el teorema es generabilizable a mas de tres variables

Ejemplo

- Hallar las cuatro derivadas parciales de la función

$$z = x^3 + 5xy - y^2$$

$$f_x = 3x^2 + 5y - y^2$$

$$f_y = 5x - 2y$$

$$f_{xx} = 6x$$

$$f_{yy} = -2y$$

$$f_{xy} = f_{yx} = 5$$

$$z = x^2 e^{-y}$$

$$f_x = 2xe^{-y}$$

$$f_y = -x^2 e^{-y}$$

$$f_{xx} = 2e^{-y}$$

$$f_{yy} = x^2 e^{-y}$$

$$f_{xy} = f_{yx} = 2xe^{-y}$$

Condición de Máximo o Mínimo

- Dado el supuesto que se den las condiciones de primer orden (necesarias $\partial f/\partial Xi=0$) para que la función presente un máximo (mínimo) será suficiente que se cumpla

Máximo

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=0,\frac{\partial f}{\partial x_2}=0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1{}^2}<0,\frac{\partial^2 f}{\partial x_2{}^2}<0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1{}^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2{}^2}>\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}$$

Mínimo

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=0,\frac{\partial f}{\partial x2}=0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1{}^2}>0,\frac{\partial^2 f}{\partial x_2{}^2}>0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1{}^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2{}^2}>\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}$$

Vector Gradiente

- Cuando trabajamos con funciones de R en R, igualando la derivada a cero se buscaban los valores que permitieran buscar máximos y mínimos, es decir , se buscaban valores de x, para los cuales una pequeña variación de la variable independiente (x) generaran un cambio prácticamente nulo en la variable dependiente (y)
- Ahora, para buscar máximos o mínimos en funciones de varias variables debemos buscar pares (x_1,x_2) tales que, pequeñas variaciones de x_1 o x_2 no generen variación en y, es decir, puntos para los cuales las derivadas parciales sean simultáneamente nula

Condición necesaria

- Al vector formado por todas las derivadas de una función se le denomina vector gradiente $\nabla f(x_1, \ldots, x_n)$, por los que la **condición necesaria** también se puede formular indicando que los óptimos de una función de R^n en R, son puntos que provocan que el vector gradiente sea igual al vector nulo

$$y = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{x_1} &= 0 \\ \frac{\partial f}{x_1} &= 0 \\ &\ldots\ldots \\ \frac{\partial f}{x_1} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \nabla f(x_1, \ldots, x_2) = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \ldots \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Condición de segundo orden

- Determinado el punto o puntos críticos, se evalúa si son máximos o mínimos
- Sí la función es convexa el punto crítico será un mínimo
- Sí la función es cóncava el punto crítico será un máximo
- Para comprobar si es un máximo o un mínimo debemos recurrir al cálculo de las segundas derivadas
- Definimos el Hessiano de la función f, como la matriz nxn en la que la diagonal principal contiene las segundas derivadas de las variables independientes y en el resto las derivadas cruzadas

Hessiano

- Si suponemos que la función es continua por el *Teorema de Young* tenemos la siguiente matriz simétrica:

$$Hf\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Hessiano

- Una función será estrictamente convexa sí la forma cuadrática asociada a la matriz Hessiana es definida positiva
- Una función será estrictamente cóncava sí la forma cuadrática asociada a la matriz Hessiana es definida negativa
- Es decir, si la forma cuadrática asociada al Hessiano evaluada en el punto crítico es definida positiva, dicho punto crítico será mínimo
- Sí, por el contrario, la forma cuadrática asociada al Hessiano evaluada en el punto crítico es definida negativa, dicho punto crítico será un máximo

Formas cuadráticas

- Se denomina forma cuadrática a una expresión polinómica homogénea (que tiene todos sus términos del mismo grado)
- Ejemplo de formas lineales: $F=ax+by$con n variables: $\sum aixi$, expresada en forma matricial $F=AX$
- Ejemplo de forma cuadráticas: $F=ax^2+by^2+cxy$, con n variables $\sum aixixj$, expresada en forma matricial $F=X^TAX$
- Donde $A=[aij]_{nxn}$, se denomina matriz asociada de modo que sea simétrica
- El determinante de la matriz A se denomina discriminante

Ejemplo

$$F := 3\,X1^2 + 4\,X1\,X2 - 6\,X1\,X3 + X2^2 - 5\,X3^2$$

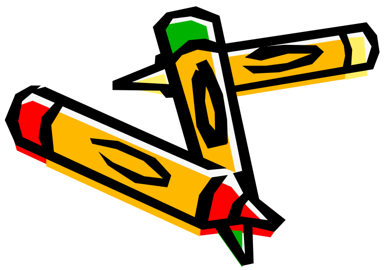
$$A := \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Signo de una forma cuadrática

- Sí F sólo puede tomar valores positivos(salvo para el vector nulo) se dice que la forma cuadrática es <u>definida positiva</u> y se nota F>0, por ejemplo $3x^2+5y^2$
- Sí F sólo puede tomar valores negativos(excluido el vector nulo) se dice que la forma cuadrática es <u>definida negativa</u> y se nota F<0, por ejemplo $-x^2-4y^2$
- Sí una forma cuadrática X^TAX es definida positiva, entonces $X^T(-A)X$ es definida negativa

Signo de ..

- Si una forma cuadrática F nunca toma valores negativos y se anula para algún vector no nulo, se dice que es semidefinida positiva y se nota $F \geq 0$; ejemplo: $F = 4X^2 + Y^2 - 4XY + 3Z^2 = (2X - Y)^2 + 3Z^2$, se anula para el vector $(1,2,0)^T$
- Si una forma cuadrática F nunca toma valores positivos y se anula para algún vector no nulo, se dice que es semidefinida negativa y se nota $F \leq 0$; ejemplo: $F = -5X^2 - Y^2 + 6YZ - 9Z^2 = -5X^2 - (Y - 3Z)^2$, se anula para el vector $(0,3,1)^T$



Signo de ..

- Sí una forma X^TAX es semidefinida positiva, $X^T(-AX)$ es semidefinida negativa
- Sí una forma X^TAX es semidefinida negativa, $X^T(-AX)$ es semidefinida positiva
- Se dice que una forma es indefinida si es positiva para algunos vectores y negativas para otros; por ejemplo: $F=3X^2-Y^2$
- La matriz simétrica A asociada a la forma F tiene el mismo signo que F

Invarianza del signo

- Una forma cuadrática no cambia de signo si se expresa en términos de un nuevo conjunto de variables, siempre que la transformación de variables sea no singular
- Sí $X^T AX>0$ y R es no singular, hacemos $X=RY \rightarrow X^T=Y^T R^T$, reemplazando : $Y^T R^T ARY= Y^T BY$, donde $B=R^T AR$

Condición de segundo orden

- Una función será estrictamente convexa si la forma cuadrática asociada a la matriz Hessiana es definida positiva
- Una función será estrictamente cóncava si la forma cuadrática asociada a la matriz Hessiana es definida negativa
- Sí la forma cuadrática asociada al Hessino evaluada en el punto crítico es definida positiva, dicho punto será un mínimo y una función convexa
- Sí la forma cuadrática asociada al Hessino evaluada en el punto crítico es definida negativa, dicho punto será un máximo y una función cóncava

En términos analíticos: sea $f(x_1,\ldots,x_n)$ una función en un abierto convexo de R^n

$$Sí\ (x_1,\ldots,x_2)Hf(x_1,\ldots,x_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ es definida positiva} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f \text{ es estrictamnete convexa} \Rightarrow \left(x_1^*,\ldots,x_2^*\right) \text{mínimo}$$

$$Sí\ (x_1,\ldots,x_2)Hf(x_1,\ldots,x_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ es definida negativa} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f \text{ es estrictamnete cóncava} \Rightarrow \left(x_1^*,\ldots,x_2^*\right) \text{máximo}$$

En términos analíticos: sea $f(x_1,\ldots,x_n)$ una función en un abierto convexo de R^n

$$Sí\ (x_1,\ldots,x_2)Hf(x_1,\ldots,x_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ es semidefinida positiva} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f \text{ convexa} \Rightarrow \left(x_1^*,\ldots,x_2^*\right) \text{ puede ser un máximo ,mínimo o un punto de silla}$$

$$Sí\ (x_1,\ldots,x_2)Hf(x_1,\ldots,x_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ es semidefinida negativa} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f \text{ cóncava} \Rightarrow \left(x_1^*,\ldots,x_2^*\right) \text{ puede ser un máximo ,mínimo o un punto de silla}$$

$$Sí\ (x_1,\ldots,x_2)Hf(x_1,\ldots,x_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ es indefinida } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f \text{ es estrictamnete convexa} \Rightarrow \left(x_1^*,\ldots,x_2^*\right) \text{ un punto de silla}$$

Clasificación de la forma cuadrática

- Si realizamos la clasificación de la forma cuadrática atendiendo al signo de sus menores principales se tiene que
- $D_1>0$, $D_2>0$, $D_3>0$, … ➔ DP
- $D_1<0$, $D_2>0$, $D_3<0$, … ➔ DN
- $D_i \geq 0$ ➔ SDP
- Todos los menores de orden i x i tienen el mismo signo $(-1)^i$ ➔ SDN
- Restos de los casos ➔ Indefinida

Elementos del problema

- Los elementos generales de un programa de optimización son:
- Función Objetivo: $f(X_1, \ldots, X_n)$ es la función a optimizar (máximo o mínimo)
- Conjunto asequible o de posibilidades: es el conjunto de puntos que satisfacen la restricción o restricciones. La solución del problema no es cualquier combinación de $(X_1, \ldots, X_n)$ sino aquella combinación que satisface(n) la(s) restriccion(es)
- Variables de elección $(X_1, \ldots, X_n)$: variables para las cuales se quiere conocer el valor que optimiza la función objetivo

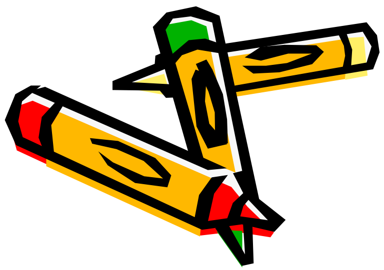
Tipos de Problemas …

Optimización con restricciones de igualdad:

$$\begin{cases} \underset{x_1,\ldots,x_n}{Opt} \; f(x_1,\ldots,x_n) \\ s.a. \\ g_1(x_1,\ldots,x_n) = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_p(x_1,\ldots,x_n) = b_p \end{cases}$$

Optimización con restricciones de desigualdad:

$$\begin{cases} \underset{x_1,\ldots,x_n}{Opt} \; f(x_1,\ldots,x_n) \\ s.a. \\ g_1(x_1,\ldots,x_n) \leq b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_p(x_1,\ldots,x_n) \leq b_p \end{cases}$$



Resolución Gráfico Analítica

Función Objetivo

$$y = f(x_1, x_2)$$

$$f : \underset{(x_1, x_2)}{R^2} \to \underset{y}{R}$$

Variables de elección

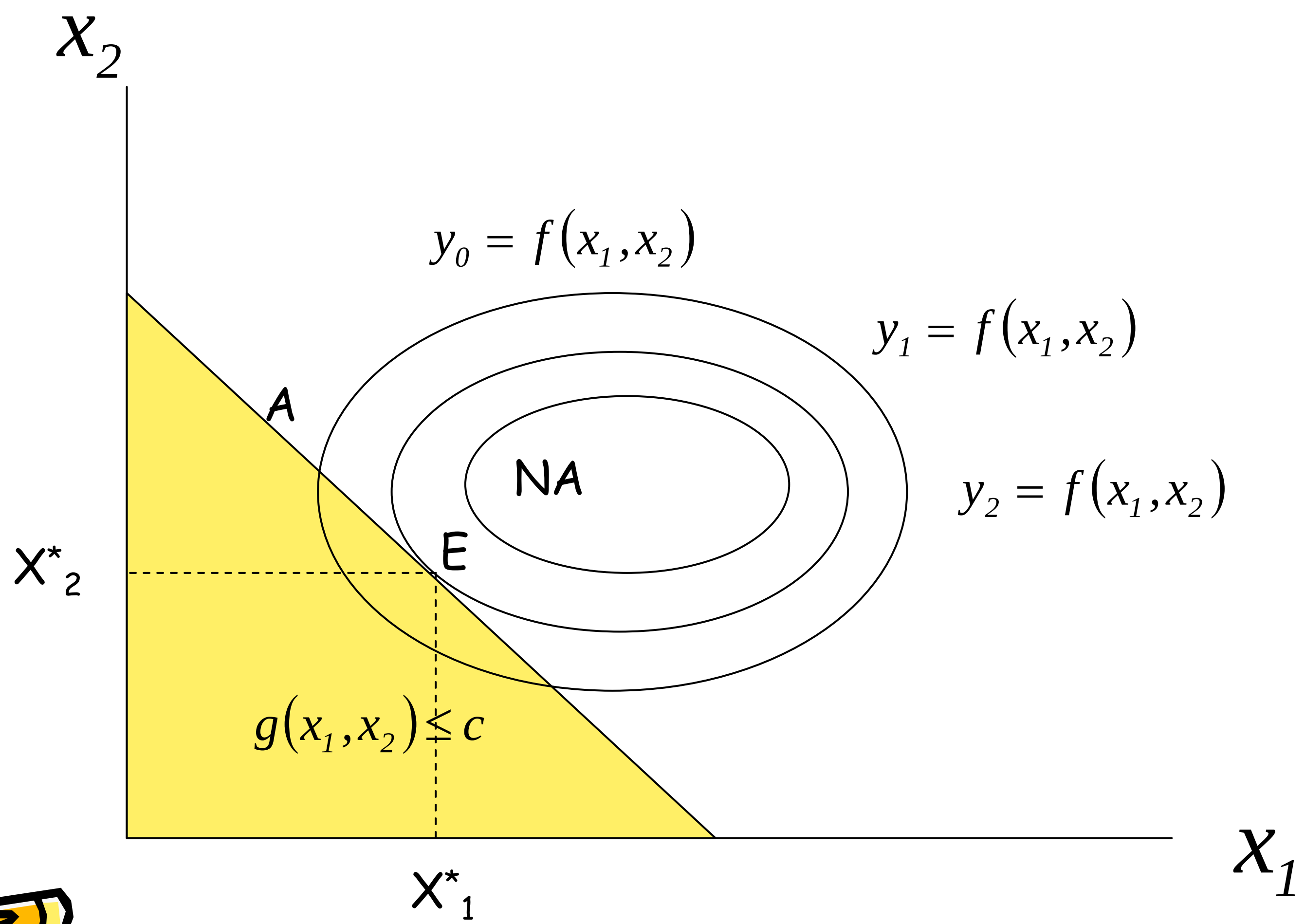
$$(x_1, x_2)$$

Restricciones

$$g(x_1, x_2) \leq c$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Resolución Gráfico Analítica



Repaso de Matemáticas 1

Microeconomía

Douglas Ramírez