Maximización de la Utilidad

Microeconomía
Eco. Douglas Ramírez

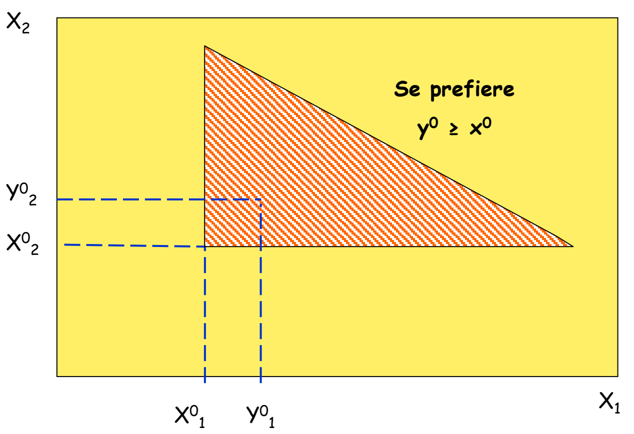
Los elementos básicos

- Hemos descrito hasta el momento los elementos básicos del problema de decisión del consumidor
  - Su conjunto de elección
  - Sus restricciones
  - Sus preferencias
- Dados unos precios y una riqueza, el comportamiento del consumidor consiste en elegir el mejor plan de consumo posible
- El i-ésimo consumidor elige un consumo $x_i \in B(p,M)$ que sea un elemento máximo de la relación de preferencia $\succsim_i$

El problema

- El problema de elección se puede transformar en otro equivalente, de más fácil manejo, a través de la descripción de los gustos del consumidor mediante una función continua que representa sus preferencias a la cual llamamos Función de Utilidad
- Mediante los axiomas se permite establecer una relación de equivalencias sobre el espacio de mercancías ($X_i \subset R^K$) donde se define, dentro del conjunto de consumo, los elementos o clases de indiferencias a las cuales se le asocia un numero real de modo que a una clase de indiferencia preferida a otra se le asocia un numero real mayor.

Los bienes económicos



El área sombreada representa las combinaciones que se prefieren ($y^0 \geq x^0$) inequívocamente a la canasta (x^0_1, x^0_2). Los individuos prefieren una cantidad mayor de cualquier bien a una menor.

La función de utilidad como preorden

- En términos más precisos, dado un conjunto completamente preordenado por una relación de preferencia se define una función de valor real que permite su representación numérica, esta representación real se designa con el nombre de Función de Utilidad
- Definición: Se dice que una función U_i: $X_i \rightarrow R$ representa el preorden de preferencias $\succsim_i$ cuando para todo x_i, $y_i \in X_i$ se verifica:
  - $U_i(x_i) \geqq U_i(y_i) \leftrightarrow x_i \succsim_i y_i$

Comentarios

- Sí *f: R → R* es una función estrictamente creciente, entonces
- : $f(U_i(x_i)) \geqq f(U_i(y_i)) \leftrightarrow U_i(x_i) \geqq U_i(y_i) \leftrightarrow x_i \succsim_i y_i$
- De modo que la composición de las funciones f y U_i también representan las mismas preferencias, lo cual implica que U_i no es más que una forma de representar la relación de preferencias ($\geq_i$) sin que sus magnitudes concretas posean significación y la magnitud $U_i(x_i) — U_i(y_i)$ nos dice que un consumo es mejor o igual que otro y por tanto se puede interpreta como una medida de "cuanto mejor"

Comentarios

- Bajo los supuestos establecidos (en particular al tomar $X_i=R^K_+$, que es un conjunto no numerable),la existencia de tal función no es un problema menor
- El supuesto de continuidad de la función de utilidad permite convertir al problema de elección de consumo en un problema de optimización clásico

$$\text{Máx. } Ui\ (xi)$$

s.a.

$$Xi \in B(p,M)$$

- La solución de este problema es la demanda del consumidor

$$X_i^d(p,M)$$

Teorema (Debreu, 1959)

- **Teorema (Debreu, 1959)**: Sea $\succsim_i$ una relación de preferencias definida sobre un subconjunto convexo de R^k. La relación de preferencia $\succsim_i$ puede representarse mediante una función de utilidad continua sí y sólo si la relación de preferencias, $\succsim_i$, es completa, transitiva y continua

Existencia de una función de utilidad

- Suponga que las preferencias $\succsim_i$ son completas, reflexivas, transitivas y estrictamente monótonas.
- Entonces existe una función de utilidad continua U: $R^K_+ \rightarrow R$ la cual representa estas preferencias
- <u>Definición</u>: Una función U: $X \rightarrow R$ es una función de utilidad que representa una relación de preferencias $\succsim_i$ si para todo x e y ϵ X

$$x \succsim_i y \leftrightarrow \mathbf{U(x)PU(y)}$$

Definición

- Se supone que las preferencias de los individuos se representan por medio de una función de utilidad de la forma

$$\text{Utilidad} = U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

  - Donde $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ son las cantidades consumidas de cada uno de los n bienes que podrían consumirse en un periodo.
- Esta función es única salvo una transformación que preserve el orden de las preferencias

Notación

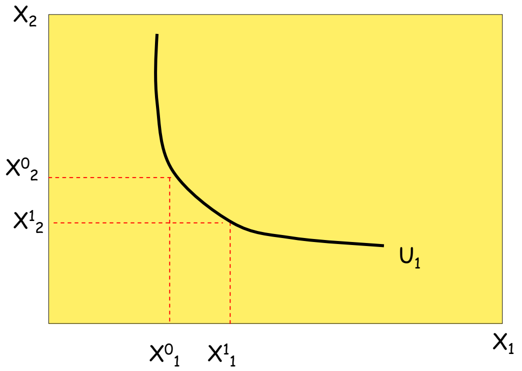
- La función de utilidad se utiliza para representar la forma en que una persona ordena determinadas cesta de bienes de las cuales puede disponer en un determinada fecha y lugar
  - Utilidad $=U(x_1,x_2)$
- A veces resulta útil emplear otros argumentos en la función de utilidad como por ejemplo:
  - Utilidad $=U(W)$; Donde la riqueza no aporta utilidad por sí misma sino por el consumo cuando se gasta
  - Utilidad $=U(C, H)$; Donde C representa consumo y H horas de Ocio
  - Utilidad $=U(C_1,C_2)$; Donde el C_1 representa el consumo presente y C_2 el consumo futuro

Las curvas de indiferencia y la RMS

- Una curva de indiferencia (o una superficie de indiferencia) muestra un conjunto de cestas de consumo entre las que el individuo es indiferente ya que todas las cestas reportan el mismo nivel de utilidad
- La pendiente en un punto de la curva de indiferencia de bienes es negativa y se denomina Relación Marginal de Sustitución entre bienes.
- La RMS muestra la tasa o relación de intercambio que una personas esta dispuesta a hacer por un bien en términos de otro disfrutando del mismo nivel de bienestar

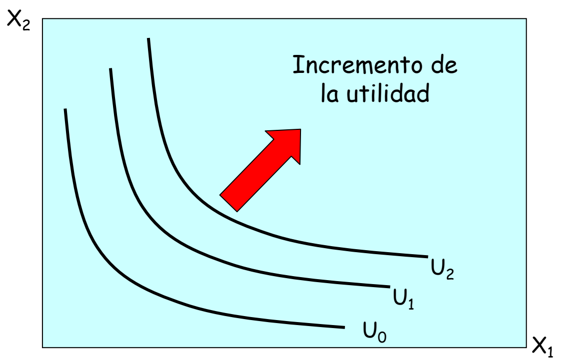
$$RMS = -\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{\bar{U}=\bar{U}_0}$$

Una Curva de Indiferencia



La curva U_1 representa las combinaciones que reportan la misma utilidad al individuo. Su pendiente representa la tasa a la cual esta dispuesto a intercambiar un bien por otro manteniendo el mismo nivel de bienestar. Esta pendiente que mide la relación de intercambio en valor absoluto se denomina relación marginal de sustitución

Mapa de Curvas de Indiferencia



Existe una curva de indiferencia que pasa por cada punto del plano. Cada una de estas curvas indican las combinaciones de consumo que reportan un determinado nivel de bienestar al individuo. Los movimientos en sentido noroeste indican niveles de bienestar mayores

La tasa marginal de sustitución

- Sea $U(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ una función de utilidad. Suponga que se incrementa la cantidad consumida del bien i y esto afecta la cantidad consumida del bien j manteniendo el nivel de utilidad constante, esto se mide a través de la Tasa Marginal de Sustitución entre bienes (en este caso entre el bien i y el bien j)

$$\frac{\partial U(X)}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial U(X)}{\partial x_j} dx_j = 0$$

Tasa Marginal de Sustitución entre bien i y el bien j

$$\frac{dx_j}{dx_i} = -\frac{\frac{\partial U(X)}{\partial x_i}}{\frac{\partial U(X)}{\partial x_j}}$$

La tasa marginal de sustitución

- La tasa marginal de sustitución no depende de la forma funcional de que representa las preferencias.
- Sea V(U) una transformación monótona de la utilidad.
- La tasa marginal de sustitución de esta transformación de la función de utilidad es:

$$V(U(X))$$

$$\frac{dx_j}{dx_i} = -\frac{V'(U(X))\,\frac{\partial U(X)}{\partial x_i}}{V'(U(X))\,\frac{\partial U(X)}{\partial x_j}} = -\frac{\partial U(X)/\partial x_i}{\partial U(X)/\partial x_j}$$

Convexidad de las curvas de indiferencias

- Otra manera de formular la relación marginal decreciente se basa en el concepto de convexidad.
- Se dice que un conjunto es convexo si dos puntos cualesquiera de ese conjunto pueden unirse por medio de una combinación lineal (o una línea recta en el plano) contenida totalmente dentro del conjunto
- El supuesto de la RMS decreciente equivale a decir que más es preferido a menos, o en términos de la figura anexa (figura (a)) que se prefiere cualquier combinación de X e Y a la combinación X*, Y*

Convexidad

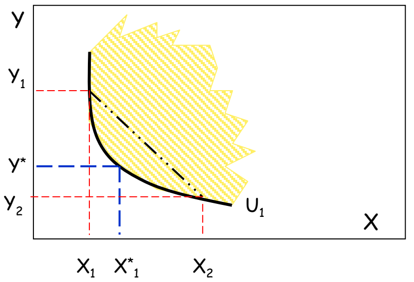


Figura (a)

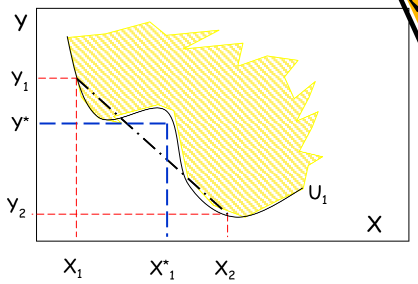


Figura (b)

En la figura (a) la curva de indiferencia es convexa ya que cualquier línea que une dos puntos situados por encima de U_1 también se encuentran por encima de U_1. En la figura (b) esto no ocurre y la curva representada no tiene en todos sus puntos una RMS decreciente

Ejemplo 1

- Sea la función de utilidad $U(x,y) = x^{\frac{3}{8}} y^{\frac{5}{8}}$
  - La utilidad marginal $U_x = \partial U/\partial x = \frac{3}{8} x^{-\frac{5}{8}} y^{\frac{5}{8}}$
    - La utilidad marginal $U_y = \partial U/\partial x = \frac{5}{8} x^{\frac{3}{8}} y^{-\frac{3}{8}}$
    - $RMS = -(dy/dx) = U_x/U_y = 3/5(y/x)$
- Observe que una transformación monótona de esta función de utilidad no afecta la RMS, por ejemplo utilizamos el logaritmo natural.
  - $LU(x,y) = \frac{3}{8} \ln(x) + \frac{5}{8} \ln(y)$
    - La utilidad marginal $U_x = \partial U/\partial x = \frac{3}{8} x^{-1}$
    - La utilidad marginal $U_y = \partial U/\partial x = \frac{5}{8} y^{-1}$
    - $RMS = -(dy/dx) = U_x/U_y = 3/5(y/x)$

Preferencias Homotéticas

- Las funciones de utilidad tipo Cobb-Douglas, Sustitutos Perfectos, Complementarios Perfectos y Tipo CES son funciones de utilidad Homotéticas ya que su relación marginal de sustitución dependen del cociente entre las cantidades de los dos bienes y no de las cantidades totales de los bienes.
- En el caso de los sustitutos perfectos la RMS es la misma en todos los puntos
- En el caso de los complementarios perfectos la RMS es infinita cuando $y/x > \beta/\alpha$, indefinida cuando $y/x = \beta/\alpha$ y cero cuando $y/x < \beta/\alpha$

M2

Diapositiva 20

M2 Recuerden que definimos complementarios perfectos como U(x,y)= min [x/α, y/β] si la hubiésemos definido como U(x,y)= min [αx/, βy/] , como lo hace Nicholson sería lo contrario ver Nicholson p.62
En ese caso la RMS es infinita cuando y/x >α/β, indefinida cuando y/x =α/β y cero cuando y/x <α/β
Marcos, 14/10/2006

Preferencias Homotéticas

- En el caso de la Cobb-Douglas y en la función CES la RMS puede encontrarse a través de las utilidades marginales
  - Sea $U(x,y) = x^{\alpha} y^{\beta}$
  - $Ux = \partial U/\partial x = \alpha x^{\alpha-1} y^{\beta}$
  - $Uy = \partial U/\partial y = \beta x^{\alpha} y^{\beta-1}$
  - $RMS = -(dy/dx) = U_x / U_y = [\alpha/\beta](y/x)$
- Sí las preferencias sólo dependen del cociente entre los bienes esto significa que si se prefiere (x_1,y_1) a (x_2,y_2) entonces se preferirá siempre (kx_1,ky_1) a (kx_2,ky_2), siendo k una constante positiva. Entonces las preferencias se denominan homotéticas.

Preferencias No Homotéticas

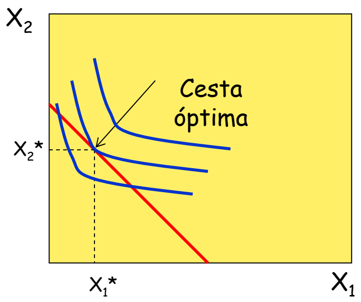
- Consideremos la función de <u>utilidad de preferencias cuasilineales</u>
  - Sea $U(x,y) = x + \ln(y)$
  - $Ux = \partial U/\partial x = 1$
  - $Uy = \partial U/\partial y = 1/y$
  - $RMS = -(dy/dx) = U_x / U_y = y$
- La cantidad consumida de y es independiente de la cantidad consumida de x
- La RMS disminuye si disminuye la cantidad elegida de y

Comportamiento del consumidor

- Conocidas las preferencias y las restricciones presupuestaria, bajo la hipótesis de racionalidad el consumidor elegirá la canasta más preferida entre todas las alternativas disponibles
- Sea M una cantidad fija de riqueza o dinero disponible para el consumidor
- Sea el vector de precios de los bienes 1 y 2 $\mathbf{p}=(p_1,p_2)$ y sea el vector de canastas $\mathbf{x}=(x_1,x_2)$
- Sea el conjunto presupuestario del consumidor $B=\{x \in X: \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leqq M\}$

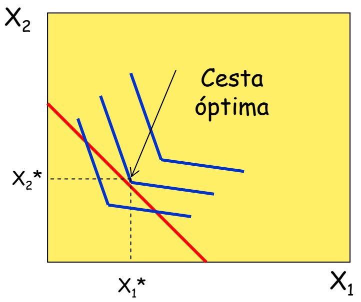
Elección Óptima

Elección Óptima



La posición óptima es donde la curva de indiferencia <u>es tangente</u> a la recta presupuestaria

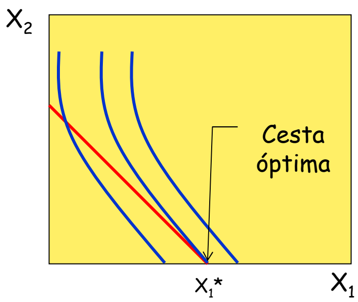
Gustos con Vértice



La posición óptima es donde la curva de indiferencia <u>no es tangente</u> a la recta presupuestaria

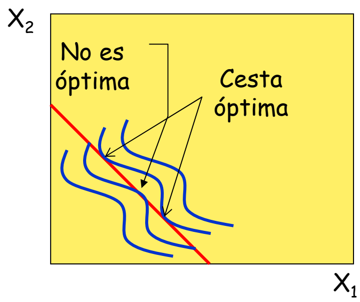
Elección Óptima

Óptima de esquina



El consumo óptimo implica consumir 0 unidades del bien 2. La curva de indiferencia no es tangente

Mas de una tangencia



Hay tres tangencias y sólo dos puntos óptimos, por lo que la condición de tangencia es necesaria más no suficiente

El problema del consumidor

- El problema de maximización del consumidor se puede escribir como:
- Máx. $U=(x_1,x_2)$
- Sujeto a: $p \bullet x \leqq M$ }
- Para que este problema tenga solución requiere que la función objetiva sea continua y que la restricción sea cerrada y acotada
- Por los axiomas asumidos la función de utilidad es continua y el conjunto presupuestario es cerrado para todo precio e ingreso positivo ($p_i > 0$ para todo $i=1 \ldots k$ y para $M \geqq 0$)
- Veamos algunos ejemplos de solución

RMS=p_1/p_2

- La condición de que la relación marginal de sustitución (RMS) debe ser igual a la pendiente de la recta presupuestaria en un óptimo interior, es evidente desde el punto de vista gráfico ¿pero que significa desde el punto de vista económico?
- La RMS mide la razón de intercambio manteniendo el mismo nivel de utilidad y el mercado ofrece una relación de intercambio de $-p_1/p_2$: si renuncia a una unidad del bien 1, puede comprar p_1/p_2 unidades del bien 2

La demanda del consumidor

- La elección óptima de los bienes dado un conjunto de precios y renta, se denomina <u>cesta demandada</u> del consumidor y cuando varia los precios y/o la renta, también varía la elección óptima
- **Def.:** La función de demanda es aquella que relaciona la elección óptima de las cantidades demandadas, con los diferentes valores de precio y renta
- A cada conjunto de precios como de renta le corresponde una combinación de diferentes bienes
- Cada preferencia da lugar a funciones de demanda distintas

Sustitutos perfectos

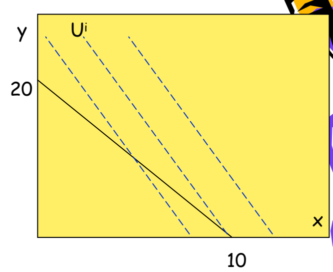
- Un consumidor dispone de una renta de 400 u.m. para gastar en los bienes x e y, a los precios p_x=40 y p_y=20. Sus preferencias por estos bienes se representa por
  - U(x,y)=3x+y
- Calcule las funciones de demanda y determine el equilibrio
- <u>Solución</u>
- El problema del consumidor es
  - Max U(x,y)=3x+y
  - S.A. x p_x+y p_y=M
- Como las preferencias son de sustitutos perfectos y, por tanto, no son preferencias regulares, la condición de tangencia no será condición ni necesaria ni suficiente de optimalidad

Cuando el consumidor sustituye los bienes a una tasa constante, la RMS entre los mismos no depende de los niveles de consumo, la forma de la función de demanda está determinado por los valores que tomen la RMS y el cociente de precios así se tiene:

$$\left.\begin{matrix} x^d = \frac{M}{p_x} \\ y^d = 0 \end{matrix}\right\} Sí \ \frac{p_x}{p_y} < \left|RMS_{y,x}\right|$$

$$\left.\begin{matrix} x^d = 0 \\ y^d = \frac{M}{p_x} \end{matrix}\right\} Sí \ \frac{p_x}{p_y} > \left|RMS_{y,x}\right|$$

$$(x,y) \in \{p_x x + p_y y = M\} Sí \ \frac{p_x}{p_y} = \left|RMS_{y,x}\right|$$

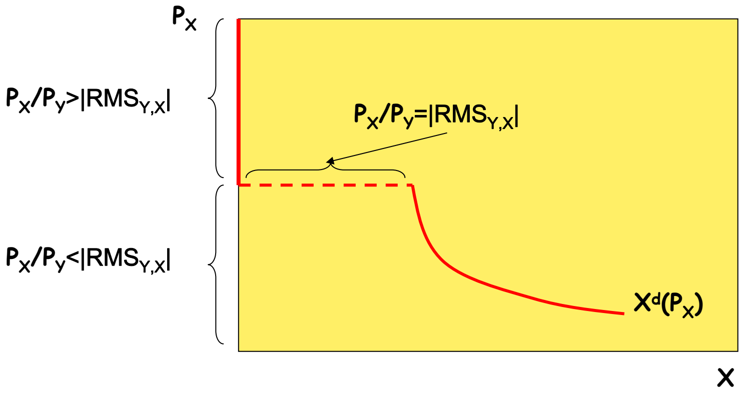


Las funciones de demanda vendrán dadas por

$$\left.\begin{matrix} U(x,y) = 3x + y \Rightarrow \left|RMS_{y,x}\right| = 3 \\ 40x + 20y = 400 \Rightarrow \frac{p_x}{p_y} = \frac{40}{20} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{p_x}{p_y} < \left|RMS_{y,x}\right| \left\{\begin{matrix} x^d = \frac{M}{p_x} & si \ \frac{p_x}{p_y} < 3 \\ y^d = 0 & si \ \frac{p_x}{p_y} < 3 \end{matrix}\right.$$

Las cantidades demandas son x^d=M/px=400/40=10 para Y^d=0

Funciones de demanda

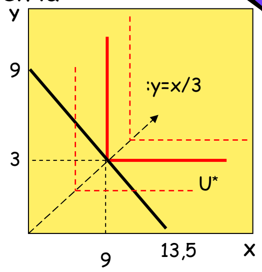


Complementarios perfectos

- Suponga el caso que consume verdura y pescado pero el consumo de verdura (x) siempre triplica al consumo de pescado (y). Este consumidor dispone de 135 u.m. y se enfrenta a los precios px=10 y py=15
- Obtenga la recta de balance, las funciones de demanda y las cantidades demandas para los precios y renta que enfrenta
- <u>Solución</u>
- El problema del consumidor es
  - Max U(x,y)= min {x, 3y}
  - S.A. 10x+15y=135
  - Las preferencias no son regulares y sus curvas de indiferencias no son estrictamente convexas respecto al origen, sino que tienen forma de L. Por tanto la tangencia entre la RMS y la pendiente de la RB no serán condición necesaria ni suficiente de optimalidad

Cuando el individuo consume siempre conjuntamente dos bienes en una determinada proporción constante, para obtener la función de demanda basta con sustituir la expresión que indica la proporcionalidad constante entre el consumo de ambos bienes en la recta presupuestaria

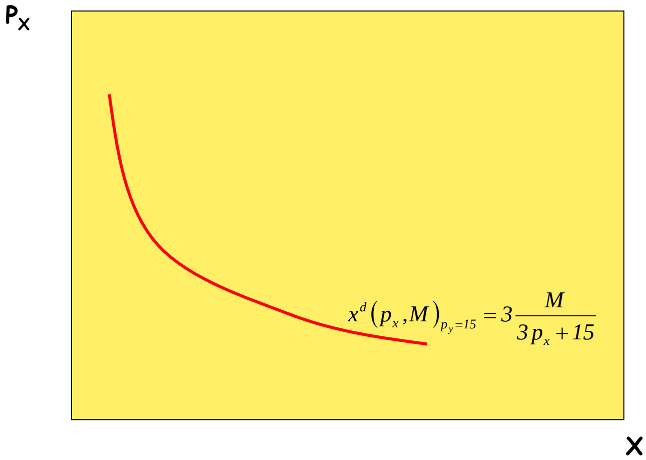
$$\left.\begin{matrix} y = \tfrac{1}{3}x \\ p_x x + p_y y = M \end{matrix}\right\} \Rightarrow p_x x + p_y \tfrac{1}{3} x = M \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x^d = 3\dfrac{M}{3p_x + P_y} \\ y^d = \dfrac{M}{3p_x + P_y} \end{matrix}\right.$$



El óptimo se encuentra en sobre la curva de indiferencia más alejada del origen que "toque" a la recta de balance, los óptimos se encuentran en el vértice de una curva de indiferencia

La combinación de consumo óptimo para los precios e ingresos dados es x*=9 , y*=3 , la utilidad obtenida es U(9,3)=min{9,9}=9

Funciones de demanda



Demanda con derivadas

- Supongamos ahora que las preferencias vienen descritas por la siguiente función de utilidad
- $U(x,y)=5xy^2$
- Sí la renta del consumidor es de 900 u.m., y los precios del bien x es 10 y el del bien y es de 5, obtenga las funciones de demanda de ambos bienes y el equilibrio del consumidor
- <u>Solución</u>
- El problema del consumidor es
- Max U(x,y)
- S.A. $p_x x + p_y y \leq M$

En nuestro ejercicio
el problema toma la forma de

$$\left.\begin{array}{l}\underset{x,y}{Max}\, U(x,y)=5xy^2 \\ s.a. 10x+5y\leq 900\end{array}\right\}$$

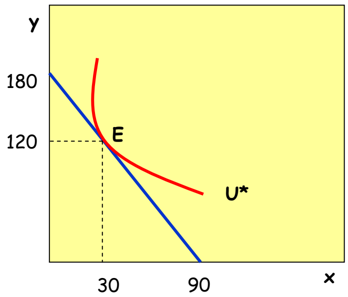
La pendiente de la recta de presupuesto

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{RB} = -\frac{p_x}{p_y} = -2$$

Siendo las cantidades máximas
de consumo de cada bien

$$x^{max} = \frac{M}{p_x} = 90,\ y^{max} = \frac{M}{p_y} = 180$$

En este caso las curvas de indiferencias son estrictamente convexas respecto al origen y el equilibrio será en el punto de tangencia entre la recta de balance y una curva de indiferencia, ya que las preferencias son regulares y corresponde a la función Cobb-Douglas



La condiciones de primer orden (CPO) de este problema serán dos: La condición de tangencia y la saturación de l restricción (si las preferencias presentan no saciabilidad, el consumidor se situará siempre sobre su recta presupuestaria, gastando toda su renta)

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{RB} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\bar{U}} \Rightarrow -\frac{p_x}{p_y} = RMS_{y,x} \equiv \frac{\partial U/\partial x}{\partial U/\partial y} \equiv -\frac{UMg_x}{UMg_y}$$

La primera ecuación es la condición de tangencia: en el óptimo deben coincidir las pendientes de la recta balance (precios relativos) y la curva de indiferencia (RMS). Si las pendientes no son iguales, el consumidor puede aumentar su nivel de utilidad reorganizando su consumo y la situación no es un óptimo. La segunda condición es la restricción del problema, el consumidor en equilibrio deberá estar gastando toda su renta, de forma que la restricción presupuestaria se cumpla con estricta igualdad. En nuestro caso tenemos

$$-\frac{p_x}{p_y} = RMS_{y,x} \equiv -\frac{\partial U/\partial x}{\partial U/\partial y} \Rightarrow -2 = -\frac{5y^2}{10xy} = -\frac{y}{2x}$$

Tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, cuya resolución nos permite obtener el equilibrio del consumidor

$$\left.\begin{array}{l} -2 = -\dfrac{y}{2x} \\ 10x + 5x = 900 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} 4x = y \\ 10x + 20x = 900 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x^* = 30 \\ y^* = 120 \end{array}$$

Las condiciones de segundo orden para un máximo exigen que el siguiente hessiano orlado sea una forma cuadrática definida negativa

$$\begin{vmatrix} 0 & -p_x & -p_y \\ -p_x & \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \\ -p_y & \dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} \end{vmatrix} = p_x p_y \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + p_y p_x \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - p_y^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - p_x^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} > 0$$

$$p_x p_y 10y + p_y p_x 10y - p_x^2 10x = 2 p_x p_y 10y - p_x^2 10x = p_x\left(2 p_y 10y - p_x 10x\right) > 0$$

Con los datos del ejercicio tenemos que se cumple la condición de segundo orden ya que:

$$2p_y 10y - p_x 10x > 0$$
$$10y^* - 10x^* = 1200 - 300 = 900 > 0$$

La función de demanda de un bien refleja la cantidad demandada de dicho bien para cada nivel de renta, precio propio del bien y el precio de los demás bienes, dadas las preferencias del consumidor. Entonces podemos expresar la función de demanda como:

$$x^d = x^d(M, p_x, p_y)$$

Podemos calcular las funciones de demanda de x e y utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange:

$$\left.\begin{array}{l} \underset{x,y}{Max}\, U(x,y) = 5xy^2 \\ s.a.\, p_x x + p_y y = 900 \end{array}\right\}$$

Podemos calcular las funciones de demanda de x e y utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange:

$$\left.\begin{array}{l} \underset{x,y}{Max}\, U(x,y) = 5xy^2 \\ s.a.\, p_x x + p_y y = 900 \end{array}\right\}$$

Construimos el lagrangiano de es problema y maximizamos:

$$\underset{x,y,\lambda}{Max}\, L(x,y,\lambda) = 5xy^2 + \lambda(M - p_x x - p_y y)$$

Las condiciones de primer orden de este problema serán:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow 5y^2 - \lambda p_x = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0 \Rightarrow 10yx - \lambda p_y = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow M - p_x x - p_y y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda = \dfrac{5y^2}{p_x} \\ \lambda = \dfrac{10xy}{p_y} \\ p_x x + p_y y = M \end{array}\right.$$

Las condiciones de primer orden de este problema serán:

$$\left.\begin{array}{r}\lambda = \dfrac{5y^2}{p_x} \\ \lambda = \dfrac{10xy}{p_y} \\ p_x x + p_y y = M\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c}\dfrac{\lambda}{\lambda} = \dfrac{\dfrac{5y^2}{p_x}}{\dfrac{10xy}{p_y}} \Rightarrow 5p_y y^2 = 10 p_x xy \\ p_x x + p_y y = M\end{array}\right\}$$

Observese que el cociente de las dos primeras condiciones puede interpretarse como la condición de tangencia. La última condición sería simplemente la saturación de la restricción presupuestaria.

Operando estas condiciones se tiene:

$$M = 3p_x x \Rightarrow x^d = \frac{M}{3p_x}$$
$$M = \tfrac{3}{2} p_y y \Rightarrow y^d = \frac{2M}{3p_y}$$

La función indirecta de utilidad

- Los valores óptimos de las demandas obtenidas pueden introducirse en la función inicial de utilidad para obtener la función indirecta de utilidad

$$U\left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_k^*\right) = U\left[x_1^*(M, p_1, p_2, \ldots, p_k), \ldots, x_k^*(M, p_1, p_2, \ldots, p_k)\right]$$
$$utilidad\ \max ima = V\left(M, p_1, p_2, \ldots, p_k\right)$$

El individuo desea maximizar la utilidad, dada la restricciones, el nivel óptimo depende indirectamente de los precios de los bienes y de la renta del individuo. Esta dependencia se refleja en la Función Indirecta de Utilidad V(M, p_1,p_2, …, p_k). Sí cambian los precios o la renta, también resultaría afectado el nivel de utilidad que puede obtenerse. Este enfoque indirecto resulta útil para ver como afectan los cambios en el bienestar del consumidor (en la teoría de la empresa los costos)

Definiciones

- La función indirecta de utilidad $V(p_x,p_y,M)$, nos da la utilidad máxima alcanzable a los precios y renta dados y se denomina función indirecta de utilidad y se representa como
  $V(p_x,p_y,M) = \text{Máx. } U(x^*,y^*)$;
  s.a.; $p_x x^* + p_y y^* \leqq M$
- La función que relaciona los precios (P_{i}) e ingresos (m), con la cesta demandada se denomina función de demanda Marshalliana (ordinaria) del consumidor se representa de la siguiente forma $x^*=x(p_x,p_y,M)$, $y^*=y(p_x,p_y,M)$,

Propiedades de la función indirecta de utilidad

- La función indirecta de utilidad $V(\boldsymbol{p},M)$ expresa la máxima utilidad alcanzable dado el vector de precios ($\boldsymbol{p}$) y la renta (M) disponible

1. $V(\boldsymbol{p},M)$ es no decreciente en precios, tal que si $\mathbf{p}' \geqq \mathbf{p}$, entonces $V(\boldsymbol{p}',M) \leqq V(\boldsymbol{p},M)$
2. $V(\boldsymbol{p},M)$ es homogénea de grado cero en $(\boldsymbol{p},M)$
3. $V(\boldsymbol{p},M)$ es cuasiconvexa en $\boldsymbol{p}$, tal que si $\{\boldsymbol{p}: V(\boldsymbol{p},M) \leqq k\}$ es convexa para todo k
4. $V(\boldsymbol{p},M)$ es continua para todo $p \gg 0$, $M>0$

Identidad de Roy

- Sí $x^d_i(\boldsymbol{p},M)$ es la función de demanda ordinaria o Marshalliana entonces

$$x_i^d(M, p_1, p_2, \dots, p_k) = -\frac{\dfrac{\partial V(M, p_1, p_2, \dots, p_k)}{\partial p_i}}{\dfrac{\partial V(M, p_1, p_2, \dots, p_k)}{\partial M}}$$

Para todo i= 1, 2, …, k

Suponiendo que esta bien definida el lado derecho de la ecuación y que los precios y la renta son estrictamente positivos

Suponga que el problema del consumidor es

$$\left.\begin{array}{l} \underset{x,y}{Max}\, U(x,y) = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} \\ p_x x + p_y y \le M \end{array}\right\}$$

Formulamos el Lagrange y maximizamos, se tiene

$$L(x,y,\lambda) = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} + (M - p_x x - p_y y)$$

De las condiciones de primer orden se obtienen las demandas

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial L}{\partial x} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} - \lambda p_x = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x} = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} - \lambda p_y = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x} = M - p_x x - p_y y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\frac{y}{x} = \frac{p_y}{p_x}\right\} \begin{array}{l} x = \dfrac{M}{2p_x} \\ y = \dfrac{M}{2p_y} \end{array}$$

Introduciendo esto resultados en la función de utilidad

$$U(x^*,y^*)=V(p_x,p_y,M)=\left(\frac{M}{2p_x}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{M}{2p_y}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{M}{2p_x^{\frac{1}{2}}p_y^{\frac{1}{2}}}$$

Cuando M=2, $p_x=\frac{1}{4}$ y $p_y=1$, la utilidad máxima que se alcanza

$$V=\frac{2}{2\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}(1)^{\frac{1}{2}}}=2$$

Aplicando el Lema de Roy se tiene

$$x^d=-\frac{\frac{dV}{dp_x}}{\frac{dV}{dM}}=-\frac{-\frac{1}{4}\frac{M}{p_x^{\frac{3}{2}}p_y}}{\frac{1}{2p_x^{\frac{1}{2}}p_y^{\frac{1}{2}}}}=\frac{1}{2}\frac{M}{p_x^{\frac{1}{2}}}$$

Tarea

- Suponga que el gobierno evalúa introducir un impuesto de suma fija sobre la renta de $0,5 u.m., o un impuesto sobre el bien x de $0,25. En ambos casos se recauda el mismo monto ya que si el precio del bien x aumenta de 0,25 a 0,50 el consumo del bien x se reduce en 2
- Utilizando la función indirecta de utilidad, deducida anteriormente. evalué cual de las dos medidas afecta menos el bienestar del consumidor
- Entregar a la preparadora el viernes 20/10/2006

Maximización de la Utilidad

Microeconomía

Eco. Douglas Ramírez