Unidad 2
Método gráfico de solución

Los problemas de programación lineal (PL) que sólo tengan dos variables de decisión pueden resolverse gráficamente, ya que, como se ha visto en los Antecedentes, una ecuación de dos variables corresponde a una recta en el plano y una desigualdad de dos variables corresponde a una región en el plano. La representación gráfica de los problemas de PL ofrece un medio muy efectivo para entender los distintos casos que se pueden presentar en este tipo de problemas. Aunque la mayoría de los problemas de interés práctico tienen más variables y por lo tanto no es posible su representación en R^2, al entender el significado de algunos conceptos básicos de manera gráfica, posteriormente se pueden generalizar para *n* dimensiones.

Más adelante se utilizará también la representación geométrica para introducir el concepto de *sensibilidad* o *análisis de pos-optimalidad*. Para los problemas con tres o más variables de decisión se estudiará el método Simplex; actualmente existen varias herramientas computacionales para resolver estos problemas, ya que los casos reales suelen tener decenas o centenas de variables y de restricciones. En el presente libro se presentará como herramienta de resolución la utilería Solver de la hoja de cálculo Excel.

El método gráfico consiste en encontrar en primer lugar todos los puntos que son solución del conjunto de restricciones; el conjunto de puntos solución se llama *región factible*. Posteriormente hay que determinar, de todas las posibles soluciones, cuál o cuáles de ellas optimizan la función objetivo (FO). Para entender el método se analiza el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.1

Una empresa produce dos tipos de mesas: una estilo colonial y otra estilo nórdico. Las utilidades que se obtienen de su venta son de $2 000 por la colonial y $2 200 por la nórdica. Para esta semana ya hay un pedido de 10 mesas de tipo nórdico. El gerente de producción quiere realizar la planeación de su producción semanal sabiendo que solamente cuenta con 450 horas para la construcción y 200 horas para barnizarlas. En el siguiente cuadro se indican las horas necesarias para realizar cada una de las tareas y la utilidad para ambas mesas.

Cuadro 2.1

	Colonial	*Nórdico*
Construcción	6 h	8 h
Barnizado	5 h	2 h
Utilidad unitaria	\$2 000	\$2 200

En primer lugar hay que definir las variables de decisión; en este caso se debe decidir cuántas mesas de cada tipo producir en la semana.

x_1: cantidad de mesas de tipo colonial a producir
x_2: cantidad de mesas de tipo nórdico a producir

El objetivo es maximizar la utilidad obtenida por la venta de su producción.
La FO es maximizar la utilidad:

$$\text{Máx } U = 2\,000x_1 + 2\,200x_2$$

Las restricciones son estas:

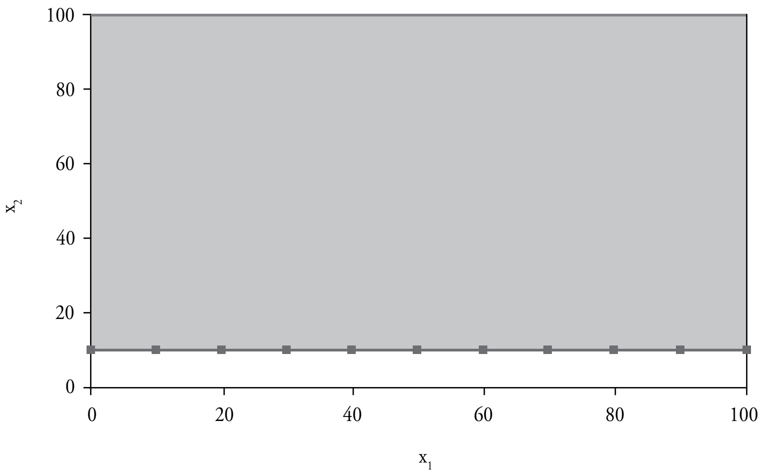
$$\begin{array}{lrl}
\textit{Pedido:} & x_2 & \geq 10 \text{ mesas nórdico} \\
\textit{Fabricación:} & 6x_1 + 8x_2 & \leq 450 \text{ horas} \\
\textit{Barnizado:} & 5x_1 + 2x_2 & \leq 200 \text{ horas} \\
 & x_1, x_2 & \geq 0
\end{array}$$

El método de solución gráfica requiere de la realización de los siguientes pasos:

Paso 1. Graficar las restricciones. Las condiciones de no negatividad nos indican que ambas variables deben ser mayores o iguales a cero, por lo que el espacio de los puntos que cumplan con las condiciones necesariamente debe estar en el primer cuadrante. La primera restricción, $x_2 \geq 10$, indica que hay que producir al menos 10 mesas de tipo nórdico pues ya hay un pedido de 10 mesas (gráfica 2.1).

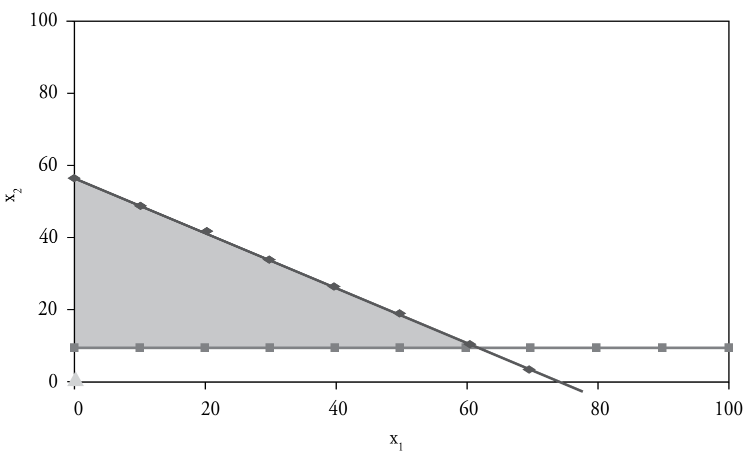
Esta restricción acota la región factible: todos los puntos pertenecientes al área sombreada cumplen con la primera restricción: ambas variables son positivas y $x_2 \geq 10$. La segunda restricción es no exceder las 450 horas disponibles para la fabricación de ambos tipos de mesas. Al agregar esta segunda restricción se reduce la región factible: sólo los puntos que aparecen sombreados en la gráfica 2.2 representan las posibles soluciones; esto es, las combinaciones del número de mesas de tipo colonial y nórdico que se pueden fabricar con las 450 horas y que por lo menos haya 10 de estilo nórdico.

Gráfica 2.1



En general, cada restricción acota el área de las posibles soluciones; aun así, el número de soluciones posibles es muy grande; si se consideran variables reales, hay infinitas soluciones. Hay algunas excepciones que se verán más adelante.

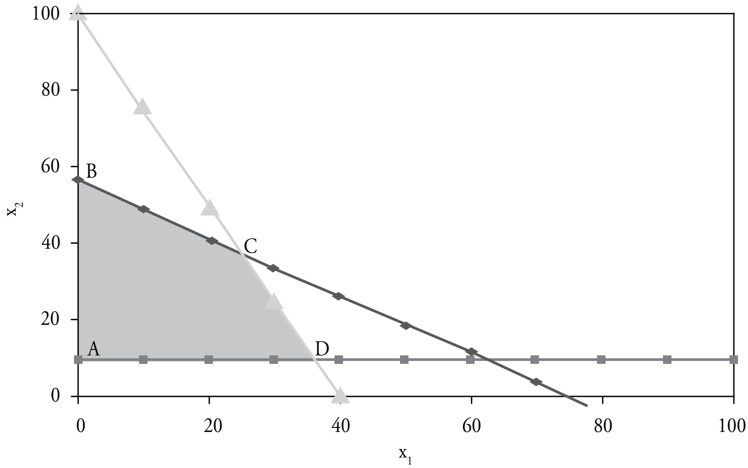
Gráfica 2.2



Por último hay que introducir la restricción que indica la cantidad de horas con que se cuenta para barnizar las mesas producidas: $5x_1 + 2x_2 \leq 200$.

La nueva restricción reduce nuevamente la región factible. Es posible construir 40 mesas coloniales y 20 nórdicas, para las que se requieren (6 (40)) + (8 (20)) = 400 horas de trabajo ≤ 450 horas disponibles sin embargo 40 mesas coloniales requieren de 200 horas de barnizado (cada una consume 5 horas), pero no alcanza el tiempo para barnizar las 20 mesas nórdicas (gráfica 2.3).

Gráfica 2.3



El conjunto de las posibles soluciones del problema se reduce a los puntos pertenecientes al polígono determinado por los vértices A, B, C y D, que es la región factible.

Paso 2. Evaluación de las posibles soluciones. Para esto debe evaluarse la función de utilidad para cada una de las posibles soluciones. En el cuadro 2.2 se muestran los resultados para algunas de estas posibles soluciones.

Se puede observar que cuanto mayor sea el número de mesas, aumenta la utilidad. También vemos que en cuanto aumenta el número de mesas tipo colonial, disminuye el número máximo de mesas tipo nórdico que se pueden fabricar. Para garantizar que el resultado sea el óptimo, sería necesario calcular la función de utilidad para cada uno de los puntos solución, que en este sencillo caso llegan a algunos cientos de puntos.

Paso 3. Evaluación de los vértices. Afortunadamente no es necesario evaluar todas las soluciones ya que para todo problema de PL, y dado que el área factible siempre es una figura convexa, se puede comprobar que la FO toma su valor máximo o mínimo en un vértice, o un lado del área que representa el conjunto de soluciones. La región factible tiene cuatro vértices:

A = (0, 10); B = (0, 56.25); C = (25, 37.5); D = (36, 10)

Cuadro 2.2

Colonial	*Nórdica*	*Utilidad*	*Colonial*	*Nórdica*	*Utilidad*	*Colonial*	*Nórdica*	*Utilidad*
0	10	22 000	15	10	52 000	25	10	72 000
0	11	24 200	15	11	54 200	25	11	74 200
0	12	26 400	15	12	56 400	25	12	76 400
0	13	28 600	15	13	58 600	25	13	78 600
0	14	30 800	15	14	60 800	25	14	80 800
0	15	33 000	15	15	63 000	25	15	83 000
0	16	35 200	15	16	65 200	25	16	85 200
0	.....	.....	15	.....	.....	25	.....	.....
0	.....	.....	15	.....	.....	25	.....	.....
0	.....	.....	15	.....	.....	25	36	129 200
0	.....	.....	15	44	126 800	25	37	131 400
0	55	121 000	15	45	129 000	25		
0	56	123 200	15			25		

Cuadro 2.3

	Colonial	*Nórdico*	*Utilidad*
A	0	10	22 000
B	0	56.25	123 000
C	25	37.5	132 500
D	36	10	94 000

En el cuadro 2.3 se calcula la utilidad para los puntos A, B, C y D. Se observa que la solución óptima es producir a la semana 25 mesas coloniales y 37.5 nórdicas (no se pueden fabricar 37.5 a la semana, pero sí 150 al mes), obteniendo la utilidad máxima equivalente $132 500 por semana.

Paso 3 bis. Graficación de la función de utilidad. Aunque en este caso son sólo cuatro vértices, en otros problemas pueden ser muchos más; por ello, en lugar de tener que analizar todos ellos, se puede encontrar el vértice solución utilizando la información de la FO. Como el valor de la FO no es conocido,

$$\text{Máx } U = 2\,000x_1 + 2\,200x_2$$

se asigna cierto valor a la utilidad; por ejemplo, si se pretendieran ganar $22 000, entonces:

$$U = 2\,000x_1 + 2\,200x_2 = 22\,000$$

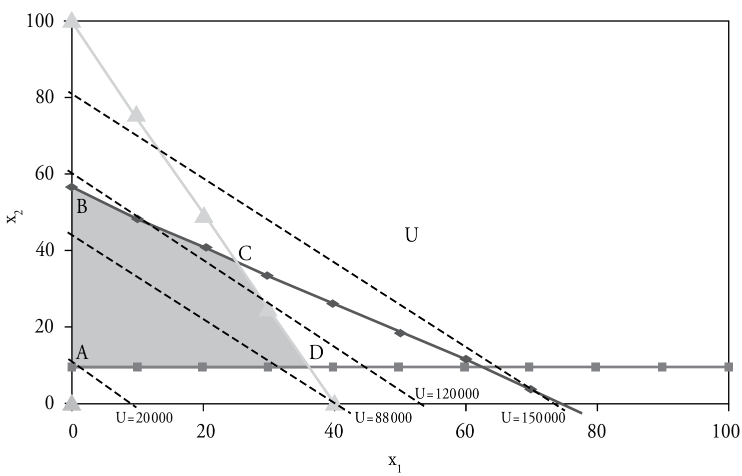
y se grafica sobre la región factible la recta correspondiente; esta recta pasa exactamente sobre el vértice A de la región. También se puede graficar la recta correspondiente a una utilidad de $88 000 o $120 000 o cualquier otra cantidad:

$$U = 2\,000x_1 + 2\,200x_2 = 88\,000$$
$$U = 2\,000x_1 + 2\,200x_2 = 120\,000$$
$$U = 2\,000x_1 + 2\,200x_2 = 165\,000$$

Cada recta corresponde a las distintas combinaciones de valores (x_1, x_2) para los que el valor de la utilidad es el mismo. Se observa que todas las líneas de utilidad son paralelas y que a medida que la utilidad aumenta, la ordenada al origen de la recta aumenta. Habrá una recta según incrementa el valor de la utilidad, que pasará por solamente un vértice de la región factible. Este vértice es justamente el punto óptimo.

Aquí es fácil entender por qué la solución óptima siempre está en alguno de los vértices de la región que delimita el conjunto de soluciones posibles. Por ejemplo, la recta correspondiente a la utilidad de $150 000 no toca a la región factible, por lo tanto no es posible obtener tal utilidad con las restricciones del problema.

Gráfica 2.4



La solución óptima de los problemas de PL siempre está en alguno de los vértices de la región que delimita el conjunto de soluciones posibles.

En este caso, el último punto correspondiente a la región factible que toca la FO es el punto C = (25, 37.5), que corresponde a una utilidad máxima de $132 500 por semana, como se había visto en el paso 3.

Soluciones múltiples

Hay ocasiones en que el problema tiene más de una solución óptima. Consideremos que permanecen las restricciones del problema anterior, pero que debido a la competencia de los productos importados es necesario reducir los precios y que la utilidad de la mesa estilo colonial disminuye a $1 500 por mesa y a $2 000 la del estilo nórdico.

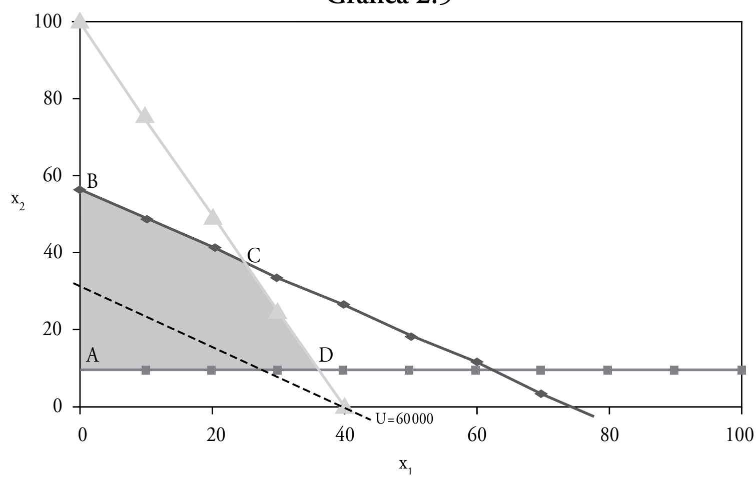
En este caso la gráfica del conjunto de soluciones posibles es la misma, pero aquí la FO es:

$$\text{Máx } U = 1\,500x_1 + 2\,000x_2$$

Nuevamente habrá que asignarle un valor de utilidad; por ejemplo, $60 000.[1]

$$U = 1\,500x_1 + 2\,000x_2 = 60\,000$$

Gráfica 2.5



[1] Es conveniente asignar un número múltiplo de ambos coeficientes de la FO; en este caso 60 000 es múltiplo de 1 500 y de 2 000.

En este caso, la FO es paralela a uno de los bordes de la región factible, el que corresponde a la restricción de las horas disponibles para la producción. Ahora la recta de mayor utilidad, que tiene puntos pertenecientes al conjunto de las posibles soluciones, coincide con dicho borde. Todos los puntos del segmento de la recta comprendidos entre los vértices B y C son soluciones equivalentes que dan la máxima utilidad. El tomador de decisiones podrá ahora escoger entre todas estas la que considere más apropiada.

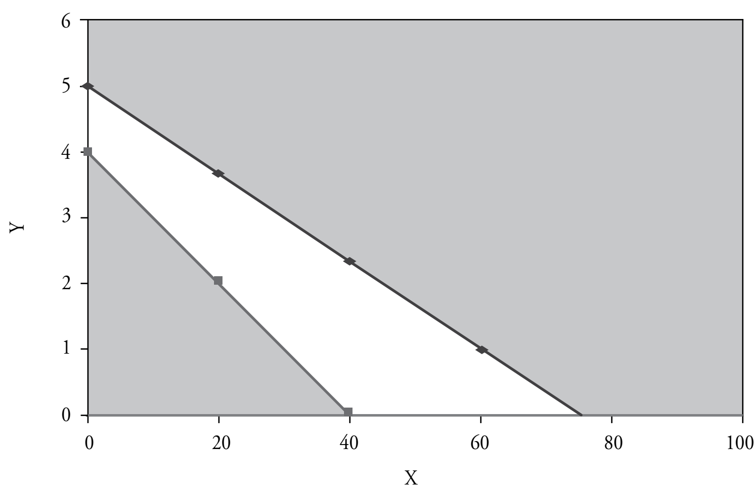
La solución óptima de los problemas de PL será múltiple cuando la FO sea paralela a alguna de las rectas de las restricciones. En ese caso, los dos vértices y todos los puntos entre ellos serán solución óptima del problema.

Problemas sin solución

El sistema de ecuaciones correspondiente a las restricciones de un problema puede no tener puntos que satisfagan simultáneamente todas las restricciones si ninguno de los puntos que satisfacen una de las restricciones, satisfacen otra de éstas. Esto se debe generalmente a un planteamiento inadecuado del problema. En tal caso, se dice que el problema no tiene solución factible. Un ejemplo así sería:

Restricción 1: $4x + 3y \geq 15$
Restricción 2: $6x + 3y \leq 12$
$x, y \geq 0$

Gráfica 2.6. No existe región factible



Soluciones no acotadas

En ciertos casos el espacio de soluciones es *no acotado*, y es posible que el problema *tenga o no tenga solución*. Dependerá de la FO del problema, tanto de la pendiente de la FO como de la dirección de optimización, según se trate de maximizar o minimizar el objetivo que se persigue. El ejemplo 2.2 analizará esta situación.

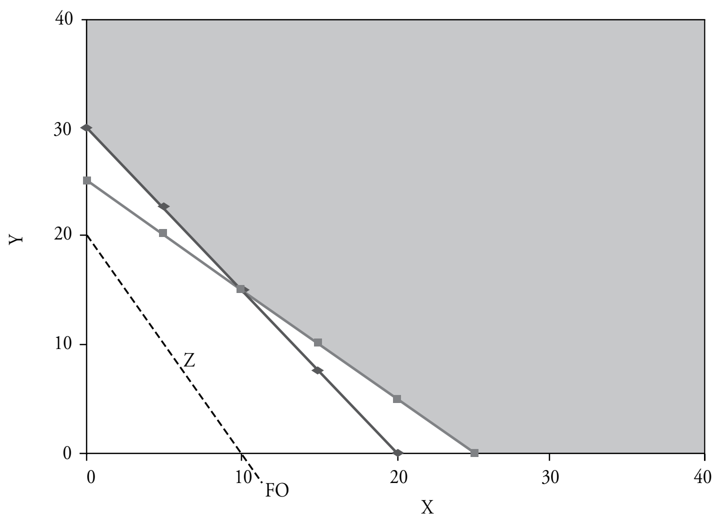
Ejemplo 2.2

Encuentre la solución óptima del siguiente modelo de PL:

$$
\begin{aligned}
&\text{Máx } z = 6x + 3y \\
&\text{s.a.} \\
&\quad 3x + 2y \geq 60 \\
&\quad 4x + 4y \geq 100 \\
&\quad x, y \geq 0
\end{aligned}
$$

Si se grafica la recta de la FO para z = 100 y luego se le desplaza para valores crecientes (gráfica 2.7), no habrá nada que la limite, ya que la región factible es *no acotada*. Aquí la FO puede crecer de manera ilimitada. Generalmente los problemas reales no son así; en este ejemplo es posible que falte alguna restricción. Si se tratara de la utilidad generada por la venta de determinados productos, la utilidad aumenta a medida que se produce y se vende más, pero esto no es infinito; la demanda del mercado es finita, y si se produce por encima de ésta, no se podrá vender. Faltaría entonces una restricción que especificara la demanda máxima.

Gráfica 2.7. Solución no acotada



Pero no siempre es así; hay casos en los que la región factible es no acotada pero el problema sí tiene solución finita, como se verá en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.3

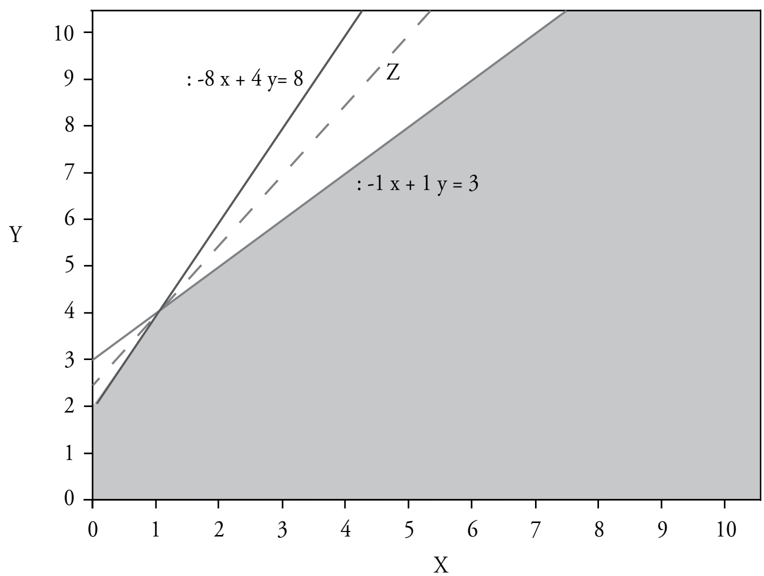
Encuentre la solución óptima del siguiente modelo de PL:

$$\text{Máx } z = -3x + 2y$$

s.a.

$$\begin{aligned} -8x + 4y &\leq 8 \\ -x + y &\leq 3 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

Gráfica 2.8. Región factible no acotada y solución finita



Aunque el conjunto de soluciones posibles es ilimitado, hay una solución única, pues la FO toma su máximo valor en el punto (1, 4), donde z = 5.

Problemas de minimización

Cuando se trata de minimizar el valor de la FO, deben graficarse las restricciones para encontrar el conjunto de posibles soluciones que determina la región factible, de la misma manera que para el caso de maximizar. Para encontrar el o los puntos óptimos, es necesario dar un valor a la FO y graficarla. Como ahora lo que interesa es minimizar, habrá que determinar en qué sentido se desplaza la recta al disminuir el valor de la FO. El último punto que toque dicha recta, perteneciente a la región factible, será el punto buscado.

Ejemplo 2.4

Una empresa ensambladora de productos de comunicación debe programar su producción semanal. Debido a problemas de liquidez, le interesa minimizar sus costos semanales, ya que le pagan la producción 20 días después de entregada. Actualmente está armando dos artículos diferentes, el T14 y el B2; ambos artículos deben ser armados y probados por personal especializado. La empresa compradora requiere no menos de 100 aparatos semanales; del modelo B2 debe entregar no menos que la cuarta parte de los que entregue del T14, pero en ningún caso deben superar en más de 150 al número de equipos T14. En el cuadro 2.4 se indica el tiempo que requieren los especialistas para armar y probar cada equipo, expresado en minutos, así como la disponibilidad de tiempo.

Cuadro 2.4

Equipos	*T14*	*B2*	*Disponibilidad*
Armados	10 min	12 min	55 h
Pruebas	30 min	6 min	100 h
Costos	\$100	\$60	

Variables de decisión:

T: número de artículos T14 a producir
B: número de artículos B2 a producir

El objetivo es minimizar los costos y el problema tiene 5 restricciones:

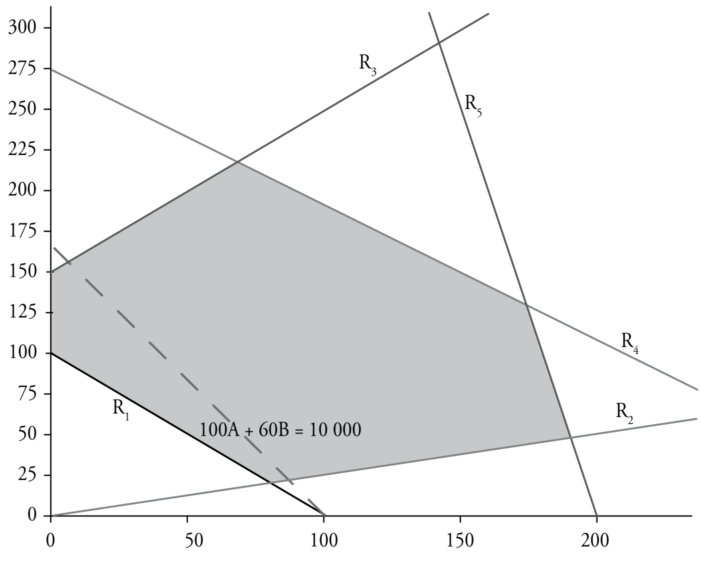
Mín C = 100 T + 60 B

Restricciones:
Pedido: T + B ≥ 100 mínimo de equipos
Mínimo de B2: B ≥ ¼ T mínimo de equipos B2
Máximo de B2: B ≤ T + 150 máximo de equipos B2
Armado: 10 T + 12 B ≤ 55 (60) minutos
Pruebas: 30 T + 6 B ≤ 100 (60) minutos
T, B ≥ 0

Si reordenamos las ecuaciones, el modelo queda así:

Mín C = 100 T + 60 B
s.a.
R1: T + B ≥ 100
R2: -¼ T + B ≥ 0
R3: - T + B ≤ 150
R4: 10 T + 12 B ≤ 3 300
R5: 30 T + 6 B ≤ 6 000
T, B ≥ 0

Gráfica 2.9
Problema 2.3



La gráfica 2.9 del conjunto de soluciones tiene seis vértices. Al desplazar la FO en la dirección de minimización, el último punto que toca es (0, 100); esto indica que para satisfacer todas las restricciones, pero con el mínimo costo, deben producirse solamente 100 artículos del tipo B2, con lo que sus costos serán de $6 000.

Para ver que efectivamente se están satisfaciendo todas las restricciones es importante analizar los seis vértices de la región factible. Esto se hará en el siguiente apartado, después de introducir un nuevo concepto muy importante en PL: la *holgura*.

Holguras y excedencias

La holgura es la cantidad de un recurso que sobra después de haber realizado las actividades que permiten optimizar el objetivo planteado. En el problema, se cuenta con 55 horas, equivalentes a 3 300 minutos para armar los equipos. La ecuación $10\,T + 12\,B \leq 3\,300$ indica la cantidad de minutos empleados dependiendo de la cantidad de artículos armados. Si la solución es (0, 100), o sea, producir solamente 100 equipos B2, se emplearán 1 200 minutos de los 3 300, por lo que sobran 2 100 minutos. Este sobrante es la holgura correspondiente al tiempo de armado. Si consideramos el caso del área de pruebas: $30\,T + 6\,B \leq 6\,000$, se utilizarán 600 de los 6 000 minutos disponibles, y queda un sobrante de 5 400 minutos de tiempo de armado.

La primer restricción indica que se deben producir al menos 100 artículos, y como efectivamente éstos se están produciendo tal restricción no tiene holgura.

La segunda restricción, $-\frac{1}{4}\,T + B \geq 0$, debe satisfacerse para cumplir con la condición que pide que el número de artículos B2 sea por lo menos igual a ¼ de los artículos T14 que se produzcan. Como ¼ de cero es cero y se están produciendo 100, se está cumpliendo con dicho requisito sobradamente, con 100 unidades más de lo que pide la condición; esta es la holgura correspondiente a dicha restricción. Por último, $-\,T + B \leq 150$ indica que el número de artículos B2 no debe de exceder al número de artículos T14 en más de 150; en este caso, $-0 + 100 \leq 150$; la holgura entonces es de 50, ya que faltarían 50 unidades de B2 para llegar al límite impuesto.

Características de la holgura

- La holgura está asociada a cada una de las restricciones
- La holgura se mide en las mismas unidades que la restricción correspondiente
- Cuando la restricción es del tipo ≥, se suele llamar excedencia a la holgura.
- Las holguras siempre deben ser positivas
- El valor de las holguras depende del punto en que se calculen, generalmente son los vértices de la región factible
- Siempre interesan las holguras de cada restricción para el punto solución

---

En el cuadro 2.5 se muestran las holguras de cada restricción para cada uno de los vértices de la región activa.

Cuadro 2.5

	T	*B*	*H1*	*H2*	*H3*	*H4*	*H5*	*Costo*	*Restricciones*
						mín	*mín*	*$*	
I	0	100	0	100	50	2 100	5 400	6 000	R1 y eje T = 0
II	0	150	50	150	0	1 500	5 100	9 000	R3 y eje T = 0
III	68.15	218.2	186.4	201.1	0	-0.01	2 645	19 900	R3 y R4
IV	174	130	204	86.5	194	0	0	25 200	R4 y R5
V	190.6	47.62	138.2	-0.03	293	822.6	0	21 917	R5 y R2
VI	80	20	0	0	210	2 260	3 480	9 200	R1 y R2

La fila I del cuadro corresponde a la solución óptima del problema: se producen solamente 100 unidades del artículo B2 con un costo de $6 000. En las columnas de H1 a la H5 se muestran los valores de las holguras de cada una de las restricciones R1 a la R5, en cada uno de los puntos vértice de la región factible. Es importante observar que en cada fila hay uno o más valores de holgura igual a cero. Estos valores corresponden exactamente a las restricciones en cuya intersección se encuentra el vértice; por ejemplo, el punto IV ocurre en la intersección de las rectas correspondientes a las restricciones R4 y R5, y justamente los valores H4 = H5 = 0. Para las rectas que no pasan por ese vértice, las holguras toman valores necesariamente > 0.

Restricciones activas, pasivas y redundantes

Una vez que se encuentra la solución óptima, que corresponde necesariamente a uno o dos vértices, se puede determinar cuáles son aquellas restricciones que se cumplen de manera exacta, esto es, no hay sobrantes de ese recurso; por lo tanto, la holgura correspondiente será igual a cero. Aquellas restricciones que tengan holgura cero en el punto solución se llaman *restricciones activas*. Al resto de las restricciones se les llama *pasivas*.

Es importante en todo problema determinar cuáles son las restricciones activas pues son éstas las que limitan el valor de la FO. En el problema anterior se pretendían disminuir los costos todo lo que fuera posible. En el punto solución la única restricción activa es la primera, que nos dice que se deben producir al menos 100 artículos; como debemos satisfacer esta condición, y se están fabricando solamente estos 100 artículos, el costo no puede bajar de $6 000. Si se pudieran fabricar tan sólo 90, se podría mejorar el costo, por lo tanto es esta la condición que impide mejorar el objetivo.

Las *restricciones pasivas* no son tan importantes, pues si alguna de ellas se modifica en una cantidad menor a la holgura, la solución no cambiará. Por ejemplo, si se dispusiera de 2 000 minutos para el armado de los artículos en vez de los 3 300 minutos actuales, la solución no cambiaría pues se necesitan 12 (100) = 1 200 minutos para poder llevar a cabo la producción planeada.

Dentro de las restricciones pasivas hay restricciones que delimitan el contorno de la región factible o conjunto solución, y hay otras que están fuera de esta área. A las últimas se les llama *restricciones redundantes*. Si bien las restricciones redundantes no afectan para nada al problema, nunca deben retirarse, ya que algún cambio en ciertos parámetros del problema puede hacer que esta restricción llegue incluso a ser una restricción activa. En el estudio de la sensibilidad esta clasificación tomará un papel destacado.

Ejemplo 2.5

Para el siguiente problema se quiere encontrar la solución óptima, determinar que tipo de restricción es cada una y cuáles son las holguras en el puntos solución (gráfica 2.10).

$$
\begin{array}{ll}
 & \text{Máx } z = 4x + 8y \\
 & \text{s.a.} \\
R1: & 4x + 12y \le 65 \\
R2: & -3x + 10y \le 70 \\
R3: & 10x + 5y \le 50 \\
R4: & x \le 4 \\
 & x, y \ge 0
\end{array}
$$

El valor máximo de z es 42, que se obtienen en el punto (2.75, 4.5), correspondiente al punto de intersección entre las rectas R1 y R3. Por lo tanto ambas restricciones son activas, y la holgura correspondiente es cero ya que

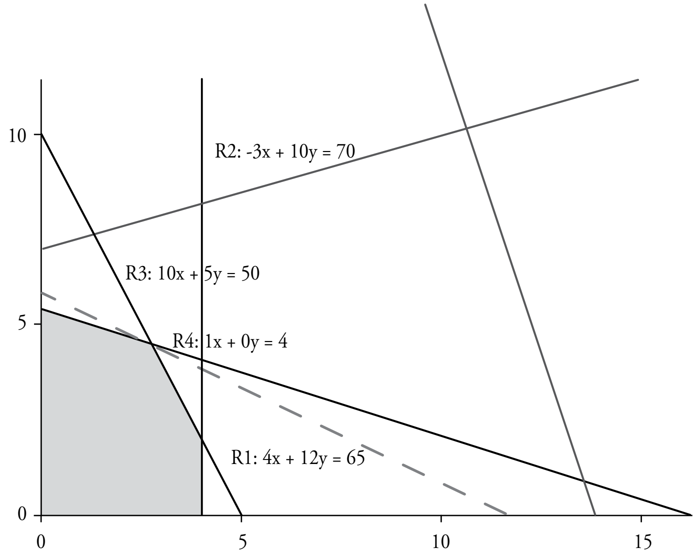
$$4\,(2.75) + 12\,(4.5) = 65 \text{ y } 10\,(2.75) + 5\,(4.5) = 50$$

por lo que no sobra nada de estos recursos. La restricción R4 forma parte del contorno, pero su holgura es positiva ya que $2.75 \le 4$ por lo que H4 = 1.25. La restricción R2 es redundante pues no forma parte del contorno y la holgura:

$$-3\,(2.75) + 10\,(4.5) = 53.25 \le 70$$

o sea, sobran 16.75 unidades del recurso dos.

Gráfica 2.10



Problemas con restricciones "igual a"

En todos los ejemplos presentados hasta aquí las restricciones estaban expresadas como desigualdades: ≥ o ≤ . En algunas ocasiones es necesario satisfacer exactamente alguna condición; esto da lugar a restricciones representadas por ecuaciones o igualdades. El modelo de PL y los métodos de resolución para estos modelos contemplan esta posibilidad. En el ejemplo 2.6 se muestra este caso.

Ejemplo 2.6

Una persona acaba de cobrar una gratificación especial de $75 000, cantidad muy superior a sus gastos habituales. Como no va a utilizar todo el dinero inmediatamente, ha decidido invertir una parte en pagarés a 90 días y dejar el resto en una cuenta maestra. Los rendimientos que ofrece el banco son 1% anual en la cuenta maestra y 6.25% en pagarés a 90 días siempre que se deposite al menos $30 000. Para poder realizar gastos extraordinarios, esta persona decide que no más de 2/3 de su dinero puede ser invertido en pagarés. ¿Cuánto le conviene colocar en cada instrumento para maximizar la utilidad?

El problema tiene dos incógnitas o variables de decisión:

C: cantidad de dinero a dejar en la cuenta
P: cantidad de dinero a invertir en el pagaré

El objetivo es maximizar el rendimiento; como no se indica otra cosa, se tratará de maximizar el rendimiento anual:

$$\text{Máx } z = 0.01\ C + 0.0625\ P$$

Pero las inversiones están sujetas a restricciones; en primer lugar, esta persona decide que no más de 2/3 de su dinero puede ser invertidos en pagarés:

$$P \leq 2/3\ (75\,000) = 50\,000$$

Por otro lado, el banco paga 6.25% de rendimiento solamente si el pagaré es de al menos $30 000:

$$P \geq 30\,000$$

Y hay una tercera restricción, ya que la cantidad de dinero total es de $75 000:

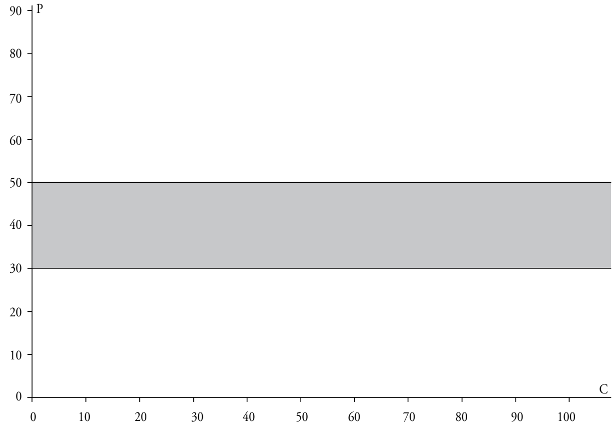
$$P + C = 75\,000$$

El modelo queda expresado así:

$$\begin{aligned} &\text{Máx } z = 0.01\ C + 0.0625\ P \\ &\text{s.a.} \\ &\quad P \quad\ \leq 50\,000 \\ &\quad P \quad\ \geq 30\,000 \\ &\quad P + C = 75\,000 \\ &\quad P, C \geq 0 \end{aligned}$$

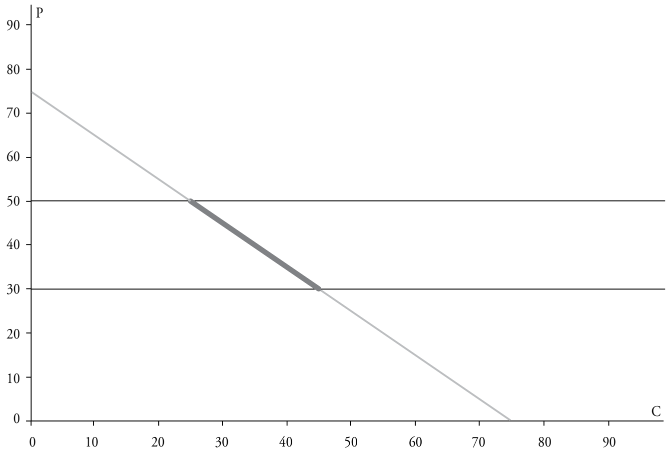
Las dos primeras restricciones delimitan una región factible no acotada que se presenta en la gráfica 2.11.

Gráfica 2.11



Al agregar la tercer restricción, P + C = 75 000, los únicos puntos que cumplen las tres restricciones son los puntos de la región anterior, pero que pertenecen a la recta correspondiente a la tercera restricción. La región factible queda reducida a un segmento de recta. El punto óptimo corresponderá a aquel punto de la recta que maximice la FO. El punto óptimo se encuentra en el vértice (25, 50), por lo tanto, para maximizar el rendimiento debe dejar $25 000 en la cuenta corriente y colocar $50 000 en un pagaré a 90 días, con lo que obtendrá $3 375 de intereses anuales.

Gráfica 2.12



Lecturas complementarias

Eppen y otros (2000), especialmente el capítulo 4, secciones 4.1 a 4.8. Arreola y Arreola (2003), capítulo 6.

Problemas de la unidad 2

Problema 2.1

Grafique la región factible para los siguientes conjuntos de restricciones:

a) $x_1 \leq 280$
$x_2 \leq 180$
$2x_1 + 1.2x_2 \leq 600$
$x_1 , x_2 \geq 0$

b) $x_1 + 7x_2 \geq 7$
$-10x_1 + 5x_2 \leq 10$
$x_1 + x_2 \leq 6$
$x_1 , x_2 \geq 0$

c) $-4x_1 + 2x_2 \leq 6$
$-x_1 + 3x_2 \geq 3$
$x_1 + 2x_2 \leq 10$
$8x_1 + 6x_2 \leq 48$
$x_1 , x_2 \geq 0$

d) $x_2 \geq 20$
$x_1 + 1.2x_2 \geq 36$
$3x_1 + x_2 \geq 60$
$x_1 , x_2 \geq 0$

e) $2x_1 + 1.2x_2 \leq 12$
$-2x_1 + 3x_2 \leq 6$
$2x_1 + 4x_2 \leq 16$
$x_2 \geq 20$
$x_1 , x_2 \geq 0$

f) $x_1 + 7x_2 \geq 7$
$-10x_1 + 5x_2 \leq 10$
$x_1 + x_2 \leq 6$
$2x_1 + 3x_2 = 6$
$x_1 , x_2 \geq 0$

Problema 2.2

Para cada uno de los ejercicios anteriores, encuentre el punto óptimo con cada una de las siguientes posibles funciones objetivo.

Max $z = 25x_1 + 25x_2$
Max $z = 2x_1 + 10x_2$
Max $z = 18x_1 + x_2$
Max $z = 20x_1 + 24x_2$
Max $z = 5x_1$
Min $z = 2x_1 + 10x_2$
Min $z = 150x_1 + 150x_2$

Sobre la gráfica de la región factible dibuje la FO y desplácela hasta el vértice solución; verifique el resultado obtenido evaluando la FO en cada uno de los vértices. Analize en cada caso qué ocurre al cambiar la pendiente de la FO.

Problema 2.3

Si se considera el problema Problema 1.1 del capítulo anterior: *a)* ¿qué pasaría si se tienen $260 000 para la realización de la campaña publicitaria, ¿cuál sería la solución recomendada? *b)* ¿Cuánto se incrementará la audiencia por cada $1 000 extra?

Problema 2.4

Si se considera el problema Problema 1.3 del capítulo anterior: *a)* ¿cuántas horas hombre sobran? *b)* Si se aumenta el precio de venta de la moto especial a $8 500, ¿cual sería la solución óptima y cuál la utilidad obtenida?

Problema 2.5

Un municipio dispone de un presupuesto de $480 millones para ampliar su servicio de drenaje y agua potable. Dispone también de 16 mil horas hombre para la realización del trabajo. La ampliación de cada kilómetro de la red de drenaje requiere de 200 horas y cuesta $5 millones, mientras que para hacer un kilómetro de la red de agua potable se necesitan 150 horas y $6 millones. Formule un modelo de PL que maximice el beneficio social. Se requiere satisfacer inmediatamente las necesidades apremiantes: 10 km de la red de agua potable y 15 km de drenaje, que se destruyeron por una inundación. Si bien es cierto que para medir el beneficio social se utilizan criterios discutibles, el municipio ha estimado que dicho beneficio será de $8 millones por cada kilómetro de drenaje y de $10 millones por kilómetro de red de agua potable construida. ¿Cuántos kilómetros de cada servicio debe construir el municipio para maximizar el beneficio social?[2]

Problema 2.6

Se desea maximizar el beneficio social en un hospital que brinda dos servicios: consulta externa (A) y hospitalización (B). Se estima que cada consulta externa representa un beneficio social de $800, y cada hospitalización, $10 000 en promedio. Para brindar

[2] Los problemas 2.5 y 2.6 formaron parte del curso de "Programación Lineal" que la maestra Myriam Cardozo impartió en la década de 1990 para los alumnos de la licenciatura en Políticas Públicas del Centro de Investigación y Docencia (CIDE).

estos servicios se utiliza el personal médico y los servicios de apoyo, como enfermería, laboratorio y recursos financieros. En el siguiente cuadro se indican los recursos necesarios para brindar una acción de consulta externa o de hospitalización:

Cuadro 2.6

Acción	*Médico*	*Servicios*	*Costo*
A	0.5 hrs	0.2 hrs	\$500
B	2.0 hrs	0.5 hrs	\$12 000

El hospital cuenta con 400 horas del personal médico, 150 horas de servicios y \$2 000 000 semanales. *a)* Determine qué cantidades de consultas externas e internaciones deben realizarse para maximizar el beneficio social. *b)* ¿Le convendría al hospital contratar otro médico con lo cual incrementaría en 40 horas este recurso? ¿Cuál sería el beneficio en este caso?

Problema 2.7

Un agricultor desea maximizar su utilidad y debe decidir cómo sembrar; los cultivos posibles son maíz y frijol. Cuenta con 200 ha y sabe que el rendimiento del maíz es de 5 t/ha, mientras que el frijol le da 2 t/ha. Para consumo de su granja necesita al menos 100 toneladas de maíz. Cuenta con 1 000 horas de trabajo; cada hectárea de maíz requiere 8 horas y cada hectárea de frijol requiere 4 horas. El precio de venta del maíz es de 1 000 \$/t, y el de frijol es de 2 000 \$/t. Plantee el problema como un modelo de PL. *a)* Encuentre la solución gráficamente si se pretende maximizar el ingreso. *b)* ¿Cuántas horas de trabajo extra le convendría contratar si tuviera que pagar 100 \$/h?

Respuesta a los problemas de la unidad 2

Problema 2.3. *a)* Con \$260 000 convendría contratar 26 anuncios en radio con lo que se lograría una audiencia de 312 000 personas. *b)* Por cada \$1 000 agregados a la campaña se obtiene una audiencia de 1 200 personas más.

Problema 2.4. *a)* Sobran 2 526 horas hombre. *b)* Si la moto especial incrementa su precio a \$8 500, la solución óptima es producir 100 motos básicas y 395 especiales, con lo que se obtendría la ganancia de \$50 000 después de cubrir costos fijos y variables, con un costo variable de \$3 407 500, y se necesitarían solamente 7 125 horas hombre.

Problema 2.5. Se debería construir 15 km de drenaje y 67.5 km de agua potable con lo que se obtendría un beneficio social de \$795 millones.

Problema 2.6. *a)* Para maximizar el beneficio social deben efectuarse 160 consultas externas y 160 internaciones, lo que reditúa a la comunidad $1 728 000. *b)* Si el hospital aumentara su capacidad médica en 40 horas semanales obtendría un beneficio extra equivalente a $36 800.

Problema 2.7. *a)* Le conviene sembrar 50 ha de maíz y 150 ha de frijol, por lo que obtendrá un ingreso de $750 000 además de 100 toneladas de maíz. *b)* No le conviene contratar mano de obra ya que para este plan de producción requiere las 1 000 horas hombre que tiene y las 200 hectáreas, por lo que no tiene dónde sembrar más.