Universidad de Los Andes
Facultad de Ciencias Económicas y Sociales
Escuela de Estadística
Teoría Estadística IV
Sección 01
Prof. Douglas Rivas

Guía de Estudio del Tema 3.1 Estimación de los Parámetros de un Modelo de Regresión Lineal. Mínimos Cuadrados

Con la solución de esta guía se pretende que el estudiante

- Estime los parámetros de un modelo de regresión lineal usando el método de los mínimos cuadrados.
- Conozca y pruebe las propiedades de los estimadores.
- A partir de los estimadores de mínimos cuadrados del modelo de regresión lineal múltiple determine los estimadores del modelo de regresión lineal simple.
- Entienda la importancia del Teorema de Gauss-Markov.
- Interpretación geométrica del método de mínimos cuadrados.

El estudiante previamente debe tener conocimientos sobre

- Conocimiento básico de algebra matricial: Traspuesta, multiplicación de matrices, rango de una matriz, rango completo, inversa de una matriz.
- Derivada de una forma lineal y una forma cuadrática.
- Combinación lineal.

1. Explique en que consiste el método de los mínimos cuadrados.
2. Considere el modelo de regresión lineal simple $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i$, $i = 1, ..., n$.
   a) Obtener los estimadores de mínimos cuadrados de los parámetros del modelo, indicando los supuestos necesarios para obtenerlos.
   b) Demostrar que dichos estimadores son insesgados.
   c) Demostrar que
      1) $var(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$
      2) $var(\hat{\beta}_0) = \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right]$
   d) Suponga que n es par y los n valores de x_i pueden seleccionarse dentro del intervalo desde a hasta b. Demostrar que $var(\hat{\beta}_1)$ es mínimo si $n/2$ de los valores de x_i son iguales a a y $n/2$ de los valores son iguales a b.
   e) Demostrar que $SCE = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$ se puede escribir como $SCE = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 + \frac{[\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})]^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$
3. Considere el modelo de regresión lineal múltiple $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$.
   a) Especifique los elementos del modelo.

b) Determine el estimador de mínimos cuadrados de $\boldsymbol{\beta}$

c) Pruebe que dicho estimador es insesgado. Establezca el supuesto necesario.

d) Demuestre que $cov(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \sigma^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}$

e) Explique por qué el estimador de $\boldsymbol{\beta}$ es considerado una función lineal de $\boldsymbol{y}$

f) Determine el estimador de mínimos cuadrados de σ^2

g) Pruebe que dicho estimador es insesgado.

h) ¿Cuál es el estimador de $cov(\hat{\boldsymbol{\beta}})$?

i) Demuestre que $(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})'(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} - \hat{\boldsymbol{\beta}}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}$.

j) Demuestre que $SCE = \boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} - \hat{\boldsymbol{\beta}}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$

k) Demuestre que $(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})'(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})'(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) + (\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})$

4. Dado el estimador de mínimos cuadrados de un modelo de regresión lineal, $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\varepsilon})$, $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}$. Demostrar que las ecuaciones de β_0 y β_1 en el caso de un modelo de regresión lineal simple son las siguientes

$$\hat{\beta}_1 = \frac{n\sum_{i=1}^n x_i y_i - (\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n y_i)}{n\sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n)^2} \qquad \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1\bar{x}$$

5. Dado que la $cov(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \sigma^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}$. Demuestre que en el caso de un modelo de regresión lineal simple la $cov(\hat{\boldsymbol{\beta}})$ está dada por

$$cov(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2/n & -\bar{x} \\ -\bar{x} & 1 \end{pmatrix}$$

6. Enuncie el teorema de Gauss-Markov. ¿Se necesita el supuesto de normalidad para asegurar que los estimadores de mínimos cuadrados son BLUEs?, ¿cuáles son los supuestos?, ¿De no cumplirse los supuestos que podrá ocurrir con $\hat{\boldsymbol{\beta}}$.