CAPÍTULO 1

ALGEBRA MATRICIAL

1.1. Introducción.

Definición 1.1.1 (Matriz) *Definimos una matriz como un arreglo rectangular de elementos, llamados escalares, sobre un álgebra F. Más que hacer referencia especifica al álgebra F, se asumirá que ésta es el álgebra de los números reales a menos que se establezca lo contrario. Por lo tanto, un escalar será siempre un escalar a menos que se establezca lo contrario.*

Notación

1. Las matrices se denotan con letras mayúsculas. Por ejemplo, $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{X}, ...$

2. Los elementos de la matriz, escalares, se denotan con letras minúsculas con 2 subíndices, es decir, a_{ij} donde i se refiere a la fila y j a la columna. Algunas veces se escribe

$$\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$$

3. El conjunto de los números reales se denota con $\mathbb{R}$ o E_1.

4. La traspuesta de $\boldsymbol{A}$ se denota por $\boldsymbol{A}'$

5. Si $\boldsymbol{A}$ tiene inversa, la inversa se denota por $\boldsymbol{A}^{-1}$

6. El determinantre de $\boldsymbol{A}$, se denota por $|\boldsymbol{A}|$ o $det(\boldsymbol{A})$

7. La matriz identidad se denota por $\mathbf{I}$. Se usa $\mathbf{I}_n$ para denotar una matriz $n \times n$
8. El tamaño de una matriz es el número de sus filas por el número de columnas. Por ejemplo, la matriz $\boldsymbol{A}_{m\times n}$, es una matriz con m filas y n columnas.
9. Sean $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ y $\boldsymbol{B}_{n\times p}$, el producto de $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ se denota como $\boldsymbol{AB}$
10. Sean $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ y $\boldsymbol{B}_{n\times p}$, la suma de $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ se denota como $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$
11. Sean $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ y k un escalar, el producto de k y $\boldsymbol{A}$ se denota como $k\boldsymbol{A}$.
12. La matriz diagonal $\boldsymbol{D}$ se define como una matriz cuadrada cuyos elementos fuera de la diagonal son cero, esto es, si $\boldsymbol{D} = [d_{ij}]$, entonces $d_{ij} = 0$ si y sólo si $i \neq j$.

1.2. Inversa de una matriz

Definición 1.2.1 (Matriz inversa) *Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz cuadrada. Si existe una matriz $\boldsymbol{B}$ tal que $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$, entonces $\boldsymbol{B}$ es llamada la inversa de $\boldsymbol{A}$ y se denota por $\boldsymbol{A^{-1}}$. Si $\boldsymbol{A}$ tiene inversa, $\boldsymbol{A}$ es llamada no singular; si $\boldsymbol{A}$ no tiene inversa, $\boldsymbol{A}$ es llamada singular.*

Teorema 1.2.1 (La inversa $\boldsymbol{A^{-1}}$ es única) *Si $\boldsymbol{A}$ es una matriz que tiene una inversa, la inversa es única.*

Prueba 1.2.1 *Sea $\boldsymbol{B}$ la matriz inversa de $\boldsymbol{A}$, entonces $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$. Suponga que $\boldsymbol{C}$ es otra inversa de $\boldsymbol{A}$, entonces $\boldsymbol{CA} = \boldsymbol{I}$, lo cual implica que $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}$.*

Teorema 1.2.2 *Si $\boldsymbol{A}$ tiene una inversa, entonces $\boldsymbol{A^{-1}}$ tiene una inversa $(\boldsymbol{A^{-1}})^{-1} = \boldsymbol{A}$*

Prueba 1.2.2 *Sea $\boldsymbol{B}$ la matriz inversa de $\boldsymbol{A}$, entonces $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A^{-1}}$ y $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$. Sea $\boldsymbol{C}$ la inversa de $\boldsymbol{B}$ entonces $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}^{-1}$ y $\boldsymbol{BC} = \boldsymbol{I}$, por lo tanto $\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{A^{-1}})^{-1}$ y $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}$, así $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A^{-1}})^{-1}$*

Teorema 1.2.3 *Si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son matrices no singulares $n \times n$, entonces $\boldsymbol{AB}$ tiene una inversa $(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A^{-1}}$: Esto puede extenderse a un número finito de matrices no singulares $n \times n$.*

Prueba 1.2.3 *Sea $\boldsymbol{CD}$ la inversa de $\boldsymbol{AB}$, entonces $(\boldsymbol{CD})(\boldsymbol{AB}) = \boldsymbol{I}$, entonces $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{DA})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$. Si $\boldsymbol{D}$ es la inversa de $\boldsymbol{A}$ entonces $\boldsymbol{DA} = \boldsymbol{I}$, por consiguiente $\boldsymbol{CB} = \boldsymbol{I}$, así $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A^{-1}}$ y $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}^{-1}$. Por lo tanto, $\boldsymbol{CD} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A^{-1}}$.*

Teorema 1.2.4 *Si* $\boldsymbol{A}$ *es no singular y* k *es un escalar diferente de cero, entonces*

$$(k\boldsymbol{A})^{-1} = \frac{1}{k}\boldsymbol{A^{-1}}$$

1.3. Determinante de una matriz

Definición 1.3.1 (Determinante de una matriz) *El determinante es una función que a cada matriz cuadrad* $\boldsymbol{A}n \times n$ *le asigna un número, si los elementos de la matriz* $\boldsymbol{A}$ *son reales, el número que se asigna es un real y se denota por* $det(\boldsymbol{A})$ *ó* $|\boldsymbol{A}|$.

1.3.1. Cálculo del determinante de una matriz

Definición 1.3.2 *Si* $\boldsymbol{A}$ *es una matriz de tamaño 1, es decir* $\boldsymbol{A} = [a]$, *entonces* $det(\boldsymbol{A}) = a$.

Definición 1.3.3 *Si* $\boldsymbol{A}$ *es una matriz* 2×2, *es decir* $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, *entonces* $det(\boldsymbol{A})$ *se define como*

$$det(\boldsymbol{A}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Definición 1.3.4 *El determinante de una matriz* 3×3 *es*

$$det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

Para calcular dicho determinante se usa comúnmente la regla de Sarrus. La cual consiste en copiar la primera y segunda columna de la matriz y colocarlas inmediatamente a la derecha de la matriz. Luego se calcula la suma de los productos de las diagonales a la derecha menos los productos de las diagonales hacia la izquierda.
Para calcular el determinante de matrices de tamaños superiores se deben tomar en cuenta las siguientes definiciones.

Definición 1.3.5 (Menor complementario) *Sea* $\boldsymbol{A}$ *una matriz cuadrada y* a_{ij} *el elemento ubicado en la fila* i *y la coluimna* j *de* $\boldsymbol{A}$. *El menor complementario de* a_{ij} *se define como* *el determinante de la matriz que se obtiene al eliminar la fila i y la columna j de $\boldsymbol{A}$, y se denota por M_{ij}. Por ejemplo sea*

$$det(\boldsymbol{A}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

entonces

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}$$

Definición 1.3.6 *Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz cuadrada, se define el cofactor de un elemento a_{ij} como el número $C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$. Es decir, el cofactor no es mas que el menor complementario correspondiente acompañado de un sigma mas o menos dependiendo de la fila y columna en la que se encuentre el elemento en cuestión. Por ejemplo*

$$C_{23} = (-1)^5 M_{23} = -M_{23}$$

1.3.2. Propiedades

Teorema 1.3.1 *Si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son matrices $n \times n$, entonces*

$$det(\boldsymbol{AB}) = [det(\boldsymbol{A})][det(\boldsymbol{B})]$$

Este resultado se puede extender a un número finito de matrices.

Teorema 1.3.2 *Sea A_{ij} el cofactor de a_{ij}, entonces*

$$det(\boldsymbol{A}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

Para algún i.

Teorema 1.3.3 *Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz $n \times n$; $|A| = 0$ si y sólo si $\boldsymbol{A}$ es una matriz singular.*

1.4. Traspuesta de una matriz

Definición 1.4.1 *Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz. La traspuesta de $\boldsymbol{A}$, denotada por $\boldsymbol{A}'$, es la matriz con las filas y las columnas intercambiada. Si $\boldsymbol{A}$ tiene tamaño $m \times n$, entonces $\boldsymbol{A}'$ tiene tamaño $n \times m$.*

1.4.1. Propiedades

Teorema 1.4.1 *Si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son matrices $m \times n$, y a y b son escalares, entonces*

$$(a\boldsymbol{A})' = (\boldsymbol{A}a)' = \boldsymbol{A}'a = a\boldsymbol{A}'$$

$$(a\boldsymbol{A} + b\boldsymbol{B})' = a\boldsymbol{A}' = b\boldsymbol{B}'$$

Teorema 1.4.2 *Si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son matrices tales que $\boldsymbol{AB}$ está definida, entonces*

$$(\boldsymbol{AB})' = \boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'$$

Teorema 1.4.3 *Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz cuadrad. La inversa de la traspuesta de $\boldsymbol{A}$ es igual a la traspuesta de la inversa de $\boldsymbol{A}$, es decir*

$$(\boldsymbol{A}')-1 = (\boldsymbol{A^{-1}})'$$

1.5. Matriz Simétrica

Definición 1.5.1 *Si $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}'$, entonces $\boldsymbol{A}$ es un matriz simétrica. Esto implica que $\boldsymbol{A}$ debe ser cuadrada.*

1.5.1. Propiedades

Teorema 1.5.1 *Si $\boldsymbol{A}$ es cualquier matriz, entonces $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{AA}'$ son simétricas.*

1.6. Rango de una matriz

Definición 1.6.1 *Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz $n \times m$, se dice que $\boldsymbol{A}$ es de rango r si el tamaño de la submatriz cuadrada no singular mas grande es r.*

1.6.1. Propiedades

Teorema 1.6.1 *Si las matrices $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son no singulares, entonces para cualquier matriz $\boldsymbol{C}$, las matrices $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{AC}, \boldsymbol{CB}$ y $\boldsymbol{ACB}$ tienen el mismo rango (Asumiendo que todo los productos están definidos).*

Teorema 1.6.2 *Si $\boldsymbol{A}$ es una matriz $m \times n$ de rango r, entonces existen matrices no singulares $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{Q}$ tales que*

$$PAQ = \begin{cases} \boldsymbol{I}, & m = n = r; \\ \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}, & m = r < n; \\ \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}, & m > r = n; \\ \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}, & m > r \text{ y } n > r. \end{cases}$$

donde $\boldsymbol{I}$ es $r \times r$.

Corolario 1.6.2.1 *Si $\boldsymbol{A}$ es una matriz $m \times n$ de rengo $r > 0$, entonces existen matrices A_L y A_R de tamaños $m \times r$ y $r \times n$, respectivamente, y de rangos r tales que $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_L \boldsymbol{A}_R$. $\boldsymbol{A}_L \boldsymbol{A}_R$ es llamada la factorización de rango completo de $\boldsymbol{A}$.*

Teorema 1.6.3 *El rango del producto de las matrices $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ no pueden exceder el rango de $\boldsymbol{A}$ ni de $\boldsymbol{B}$, es decir, $r(\boldsymbol{AB}) \leq r(\boldsymbol{A})$ ó $r(\boldsymbol{AB}) \leq r(\boldsymbol{B})$.*

Teorema 1.6.4 *Una matriz no singular $\boldsymbol{A}$ puede siempre reducirse a $\boldsymbol{I}$ por transformaciones elementales de filas (columnas).*

Teorema 1.6.5 *Si $\boldsymbol{A}$ es una matriz $n \times n$, entonces $det(\boldsymbol{A}) = 0$ si y sólo si $r(\boldsymbol{A}) < n$.*

Teorema 1.6.6 *Si $\boldsymbol{C}$ es una matriz $m \times n$ de rango r, entonces el rango de $\boldsymbol{CC}'$ y de $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}$ es r.*

1.7. Matriz Idempotente

Definición 1.7.1 *Sea $\boldsymbol{B}$ una matriz $n \times n$ tal que*

(1) $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}'$

(2) $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^2$

entonces $\boldsymbol{B}$ se define como una matriz idempotente si (2) *se satisface y una matriz simétrica idempotente si* (1) *y* (2) *se satisfacen.*

1.7.1. Propiedades

Teorema 1.7.1 *Si $\boldsymbol{B}$ es una matriz $n \times n$ idempotente de rango n, entonces $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$. Si $\boldsymbol{B}$ es una matriz simétrica idempotente de rango menor que n, entonces $\boldsymbol{B}$ es una matriz semidefinida positiva.*

Teorema 1.7.2 *Sea $\boldsymbol{B}$ una matriz $n \times n$ de rango p.*

1. *Si $\boldsymbol{B}$ es idempotente, entonces $\boldsymbol{B}$ tiene p raíces características distintas de cero y ellas son cada una igual a +1.*

2. *Si $\boldsymbol{B}$ es simétrica, entonces una condición necesaria y suficiente para que $\boldsymbol{B}$ sea idempotente es que esta tenga p raíces características distintas de cero y cada una igual a +1.*

Teorema 1.7.3 *Sea $An \times n$ una matriz simétrica idempotente. Entonces*

1. $\boldsymbol{A}'$ *es una matriz simétrica idempotente*

2. $\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ *es una matriz simétrica idempotente si $\boldsymbol{P}$ es ortogonal $n \times n$.*

3. $\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1}$ *es una matriz idempotente donde $\boldsymbol{P}$ es no singular $n \times n$.*

4. $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$ *es una matriz simétrica idempotente.*

Prueba 1.7.1 *La prueba es como sigue*

1. *Simetría: Como* $\boldsymbol{A}$ *es simétrica, entonces* $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A}$. *Ahora* $(\boldsymbol{A}')' = \boldsymbol{A}'$, *entonces* $\boldsymbol{A}'$ *es simétrica.*

   Idempotente: $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}'$

2. *Simetría:* $(\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})' = \boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{P}')' = \boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}'\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ *ya que* $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A}$.

   Idempotente: $(\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})(\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}) = \boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ *ya que* $\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{I}$.

3. *Idempotente:* $(\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1})(\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1}) = \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1}$ *ya que* $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{I}$.

4. *Simetría:* $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})' = \boldsymbol{I}' - \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$.

   Idempotente: $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$.

1.8. Traza de una matriz

Definición 1.8.1 *La traza de una matriz* $\boldsymbol{A}n \times n$, *la cual escribimos como* $tr(\boldsymbol{A})$ *se define como la suma de los elementos de la diagonal de* $\boldsymbol{A}$, *esto es,*

$$tr(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

1.8.1. Propiedades

Teorema 1.8.1 *Sean* $\boldsymbol{A}$ *y* $\boldsymbol{B}$ *matrices* $m \times n$ *y* $n \times m$ *respectivamente; entonces*

$$tr(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = tr(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})$$

Prueba 1.8.1 *Sea* $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$, *entonces* $c_{pq} = \sum_{j=1}^{n} a_{pj}b_{jq}$ *es el elemento de la fila* p *y la columna* q. *Sea* $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{G}$, *entonces* $g_{rs} = \sum_{i=1}^{m} b_{ri}a_{is}$.
Pero,

$$tr(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = \sum_{p=1}^{m} c_{pp} = \sum_{p=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{pj}b_{jp}$$

y

$$\begin{aligned} tr(\boldsymbol{BA}) &= \sum_{r=1}^{n} g_{rr} = \sum_{r=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} b_{ri}a_{is} \text{ haciendo } i=p, r=j \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{p=1}^{m} b_{jp}a_{pj} = \sum_{p=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{pj}b_{jp} = tr(\boldsymbol{AB}) \end{aligned}$$

Teorema 1.8.2 *Sea* $\boldsymbol{A}$ *una matriz* $n \times n$ *y* $\boldsymbol{P}$ *cualquier matriz* $n \times n$ *no singular, entonces*

$$tr(\boldsymbol{A}) = tr(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})$$

si $\boldsymbol{P}$ *es una matriz ortogonal, entonces*

$$tr(\boldsymbol{A}) = tr(\boldsymbol{P}'\boldsymbol{AP})$$

Prueba 1.8.2 *Por el teorema anterior*

$$tr(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}) = tr[\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{AP})] = tr[(\boldsymbol{AP})\boldsymbol{P}^{-1}] = tr(\boldsymbol{AI}) = tr(\boldsymbol{A})$$

igual con el otro.

Teorema 1.8.3 *Sea* $\boldsymbol{A}$ *una matriz* $n \times n$ *con raíces características* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$*, entonces*

$$tr(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Esto es, la suma de los elementos de la diagonal de una matriz $n \times n$ *es igual a la suma de las raíces características de la matriz.*

Prueba 1.8.3 *Sea* $\boldsymbol{P}$ *una matriz no singular tal que* $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{T}$ *donde* $\boldsymbol{T}$ *es una matriz triangular con raíces características* λ_i *sobre la diagonal (*$\boldsymbol{P}$ *y* $\boldsymbol{T}$ *pueden no ser matrices reales), entonces*

$$tr(\boldsymbol{A}) = tr(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}) = tr(\boldsymbol{T}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Teorema 1.8.4 *Si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son matrices $n \times n$ y a y b son escalares, entonces*

$$tr(a\boldsymbol{A} + b\boldsymbol{B}) = atr(\boldsymbol{A}) + btr(\boldsymbol{B})$$

Prueba 1.8.4 *Sea $\boldsymbol{C} = a\boldsymbol{A} + b\boldsymbol{B}$, entonces $tr(\boldsymbol{C}) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii}$ donde $c_{ii} = aa_{ii} + bb_{ii}$ entonces*

$$tr(a\boldsymbol{A} + b\boldsymbol{B}) = \sum_{i=1}^{n} aa_{ii} + bb_{ii} = a\sum_{i=1}^{n} a_{ii} + b\sum_{i=1}^{n} b_{ii} = atr(\boldsymbol{A}) + btr(\boldsymbol{B})$$

Teorema 1.8.5 *Si $\boldsymbol{A}$ es una matriz $n \times n$ y $\boldsymbol{A}^2 = m\boldsymbol{A}$, entonces*

$$tr(\boldsymbol{A}) = mr(\boldsymbol{A})$$

Si $\boldsymbol{A}$ es idempotente, entonces $m = 1$ y $tr(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A})$.

Teorema 1.8.6 *Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz $m \times n$, entonces $tr(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}') = tr(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}^2$ y $tr(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}') = tr(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}) = 0$ si y sólo si $\boldsymbol{A} = 0$*

Prueba 1.8.5

$$\begin{aligned} tr(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}) &= tr\left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\right\} \\ &= tr\left\{\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m} a_{i1}^2 & & \cdots & \\ a_{12} & \sum_{i=1}^{m} a_{i2}^2 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & \cdots & \sum_{i=1}^{m} a_{in}^2 \end{pmatrix}\right\} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}^2 \end{aligned}$$

Por el teorema 1.8.2 $tr(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}') = tr(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})$.
Como $tr(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}^2 = 0$ sólo si $a_{ij} = 0, \quad \forall ij$ con lo cual $\boldsymbol{A} = 0$.

Teorema 1.8.7 *Si $\boldsymbol{A}$ es una matriz $n \times n$, entonces $tr(\boldsymbol{A}) = tr(\boldsymbol{A}')$*

Prueba 1.8.6 *$tr(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Sea $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}'$, entonces $tr(\boldsymbol{B}) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii}$, como $b_{ii} = a'_{ii} = a_{ii}$, entonces $tr(\boldsymbol{A}') = tr(\boldsymbol{B}) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = tr(\boldsymbol{A})$.*

Teorema 1.8.8 *Si $\boldsymbol{A}$ es una matriz $n \times n$ y $\boldsymbol{A}^-$ es la g-inversa de $\boldsymbol{A}$, entonces*

$$tr(\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A}) = tr(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-) = r(\boldsymbol{A})$$

1.9. Formas Cuadráticas

Definición 1.9.1 *Una función $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ de n variables reales $x_1, x_2, ..., x_n$ se define a ser una forma cuadrática si la función es definida por*

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$$

La matriz $\boldsymbol{A}$ es definida a ser la matriz de la forma cuadrática.

Teorema 1.9.1 *La matriz de una forma cuadrática puede seleccionarse siempre a ser simétrica.*

Debido a este teorema, toda forma cuadrática aquí será considerada a tener una matriz simétrica a menos que se establezca lo contrario.
En una forma cuadrática, $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$, es a menudo necesario cambiar las variables x_i por las variables y_i en el conjunto de ecuaciones lineales $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{X}$, donde $\boldsymbol{C}^{-1}$ es una matriz no singular $n \times n$. Cuando esto se hace, la forma cuadrática $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ será

$$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y})'\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{Y}'\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}$$

donde $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$. En este caso se dice que $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son congruentes.

1.10. Derivada de funciones lineales y cuadráticas

Definición 1.10.1 (Derivada de una función con respecto a un vector) *Sea $f(\boldsymbol{x})$ una función de n variables reales independientes $x_1, x_2, ..., x_n$. La derivada de $f(\boldsymbol{x})$ con* *respecto al vector* $\boldsymbol{x}$*, donde*

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

es denotado por $\frac{\partial f(x)}{\partial \boldsymbol{x}}$ *y se define por*

$$\frac{\partial f(x)}{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.10.1 *Sea* $f(x) = 6x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_3^2$, $-\infty < x_i < \infty$, *entonces*

$$\frac{\partial f(x)}{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x_1 - 2x_2 \\ -2x_1 \\ 6x_3 \end{pmatrix}$$

Teorema 1.10.1 (Derivada de una función lineal) *Sea* $l(x)$ *una función lineal de* n *variables independientes definida por* $l(x) \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a}_i x_i = \boldsymbol{a}'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{a}$ *donde* $\boldsymbol{a}' = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ *y los* a_i *son constantes. Entonces*

$$\frac{\partial l(x)}{\partial \boldsymbol{x}} = \boldsymbol{a}$$

Prueba 1.10.1

$$\frac{\partial l(x)}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial l(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial l(x)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial l(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}(a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n) \\ \frac{\partial}{\partial x_2}(a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n}(a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{a}$$

Teorema 1.10.2 (Derivada de una función cuadrática) *Sea $q(x)$ una forma cuadrática en las n variables reales independientes $x_1, x_2, ..., x_n$ definida por*

$$q(x) = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$$

donde $\boldsymbol{A}$ es una matriz simétrica de constantes. Entonces

$$\frac{\partial q(x)}{\partial \boldsymbol{x}} = 2\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$$

Prueba 1.10.2

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j & \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j & \cdots & \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\
&= x_1 \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j + x_2 \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j + \cdots + x_n \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j \\
&= \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_i x_j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{X}\boldsymbol{A}'\boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{X}} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{X}\boldsymbol{A}'\boldsymbol{X}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \boldsymbol{X}\boldsymbol{A}'\boldsymbol{X}}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \boldsymbol{X}\boldsymbol{A}'\boldsymbol{X}}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j \\ \frac{\partial}{\partial x_2}\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n}\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}(a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + ... + a_{1n}x_1x_n + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + ... + a_{2n}x_1x_n + a_{n1}x_nx_1 + ... + a_{nn}x_n^2) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n}(a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + ... + a_{1n}x_1x_n + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + ... + a_{2n}x_1x_n + a_{n1}x_nx_1 + ... + a_{nn}x_n^2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 + ... + a_{n1}x_n \\ a_{11}x_1 + 2a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + a_{21}x_1 + a_{32}x_3 + ... + a_{n2}x_n \\ \vdots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + ... + 2a_{nn}x_n + a_{n1}x_1 + a_{n2}x_x + ... + a_{(n-1)n}x_{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2a_{11}x_1 + 2a_{12}x_2 + 2a_{13}x_3 ... + 2a_{1n}x_n \\ 2a_{21}x_1 + 2a_{22}x_2 + 2a_{23}x_3 ... + 2a_{2n}x_n \\ \vdots \\ 2a_{n1}x_1 + 2a_{n2}x_2 + 2a_{n3}x_3 ... + 2a_{nn}x_n \end{pmatrix} \\
&= 2\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 2\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}
\end{aligned}$$

1.11. Inversa Generalizada

En la sección 1.2 se definió la inversa de una matriz y se discutieron varias propiedades. Se estableció que si una matriz $\boldsymbol{A}$ tiene inversa, la matriz debe ser cuadrada y el determinante debe ser cero. La teoría de modelos lineales, la cual incluye una gran parte de estadística teórica y aplicada, envuelve las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales de la forma

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{g} \tag{1.11.1}$$

y funciones de las soluciones.
Si $\boldsymbol{A}$ es una matriz $n \times n$ no singular, la solución al sistema de ecuaciones de la ecuación

1.11.1 existe, es única y esta dada por $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A^{-1}g}$. Sin embargo, hay casos donde $\boldsymbol{A}$ no es una matriz cuadrada y otras situaciones donde $\boldsymbol{A}$ es una matriz cuadrada pero es singular. En estas situaciones todavía puede haber una solución para el sistema, y una teoría unificada para tratar tales situaciones puede ser deseable. Una de tales teorías envuelve el uso de inversa generalizada, la cuál es discutida en esta sección.
Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz $m \times n$ de rango r. Se investiga una matriz denotada por $\boldsymbol{A}^-$ la cual tiene muchas de las propiedades que la inversa de la matriz $\boldsymbol{A}$ debería si la inversa existe.

Definición 1.11.1 (Inversa Generalizada) *Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz $m \times n$. Si una matriz denotada por $\boldsymbol{A}^-$ existe la cual satisface las 4 condiciones siguientes, será definida como una inversa generalizada de $\boldsymbol{A}$*

1. $\boldsymbol{AA}^-$ *es simétrica;*
2. $\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A}$ *es simétricas;*
3. $\boldsymbol{AA}^-\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$*;*
4. $\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{AA}^- = \boldsymbol{A}^-$*.*

Se usa la terminología "$g - inversa$" para inversa generalizada.
Si $\boldsymbol{A}$ es no singular, es claro que $\boldsymbol{A^{-1}}$ satisface las condiciones de una $g - inversa$. Sin embargo, si $\boldsymbol{A}$ es una matriz cuadrada y singular, o si $\boldsymbol{A}$ es una matriz no cuadrada, entonces el problema se trata como si una matriz $\boldsymbol{A}^-$ existe la cual satisface las condiciones de la definición 1.11.1. A continuación se demuestra que para cada matriz $\boldsymbol{A}$, una matriz $g-inversa$ existe y es única. También se establecen y se prueban varias propiedades de esta $g-inversa$.

Teorema 1.11.1 *Si una $g-inversa$ de una matriz $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ existe, esta tiene tamaño $n \times m$.*

Prueba 1.11.1 *La prueba se sigue del hecho de que $\boldsymbol{AA}^-$ es simétrica y por lo tanto cuadrada, es decir, $\boldsymbol{AA}^-$ es una matriz $m \times m$ por lo tanto la columna de $\boldsymbol{A}^-$ debe ser m y para que el producto este definido $\boldsymbol{A}^-$ debe tener n filas. Así, $\boldsymbol{A}^-$ es un matriz $n \times m$.*

Teorema 1.11.2 *Si $\boldsymbol{A}$ es la matriz nula de tamaño $m \times n$, entonces $\boldsymbol{A}^-$ es la matriz nula $n \times m$.*

Prueba 1.11.2 *Claramente $\boldsymbol{A}^- = 0$ satisface las condiciones de la definición 1.11.1 si $\boldsymbol{A} = 0$.*

Teorema 1.11.3 *Para cada matriz* $\boldsymbol{A}$ *existe una matriz* $\boldsymbol{A^-}$ *que satisface las condiciones de la definición 1.11.1, es decir, cada matriz tiene una* $g-inversa$*.*

Prueba 1.11.3 *Si* $\boldsymbol{A}=0$*, entonces por el teorema 1.11.2* $\boldsymbol{A^-}=0$*.*
Asumamos $\boldsymbol{A}\neq 0$*. Usando el corolario 1.6.2.1, si* $\boldsymbol{A}$ *tiene rango* $r>0$*, esta puede factorizarse como, digamos*

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_L\boldsymbol{A}_R=\boldsymbol{B}\boldsymbol{C} \tag{1.11.2}$$

donde $\boldsymbol{B}$ *es una matriz* $m\times r$ *de rango* r *y* $\boldsymbol{C}$ *es una matriz* $r\times n$ *de rango* r*. Note que* $\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B}$ *y* $\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}'$ *son ambas no singulares. Si se define* Av^- *como*

$$\boldsymbol{A}^-=\boldsymbol{C}'(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}')^{-1}(\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}' \tag{1.11.3}$$

es fácil mostrar que esta satisface las condiciones de la definición 1.11.1. Note también que si $\boldsymbol{A}$ *es real, entonces* $\boldsymbol{A}^-$ *es real.*

La factorización de $\boldsymbol{A}$ en 1.11.2 no es única; sin embargo, la g-inversa $\boldsymbol{A}^-$ es única, esto se ve en el siguiente teorema.

Teorema 1.11.4 *Para cada matriz* $\boldsymbol{A}$ *existe una única matriz* $\boldsymbol{A^-}$ *que satisface las condiciones de la definición 1.11.1, es decir, cada matriz tiene una única* $g-inversa$*.*

Prueba 1.11.4 *Asumamos que* $\boldsymbol{A^-}_1$ *y* $\boldsymbol{A^-}_2$ *son 2* $g-inversas$ *de una matriz* $\boldsymbol{A}$*. Esto significa que* $\boldsymbol{A^-}_1$ *y* $\boldsymbol{A^-}_2$ *cada una satisface las condiciones de la definición 1.11.1. Se demostrará que cuando este es el caso, se sigue que* $\boldsymbol{A^-}_1=\boldsymbol{A^-}_2$*.*
Primero se demostrará que $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_1^-=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_2^-$*. Por el item 3 de la definición 1.11.1 se tiene que* $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_1^-\boldsymbol{A}$*. Multiplicando a la derecha por* $\boldsymbol{A}_2^-$ *se obtiene*

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_2^-=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_1^-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_2^-$$

Por el item 1 de la definición 1.11.1 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_1^-$ *y* $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_2^-$ *son simétricos y por lo tanto* $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_1^-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_2^-$ *es simétrico, es decir*

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_1^-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_2^-=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_1^-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_2^-)'$$

de allí se obtiene que

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_2^-=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_1^-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_2^-=[(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_1^-)(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_2^-)]'=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_2^-)'(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_1^-)'=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_2^-)(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_1^-)=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_1^-)$$

ya que de manera similar por el item 3 se obtiene que $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_2^-\boldsymbol{A}$ *lo cual implica que* $Av\boldsymbol{A}_1^- = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_2^-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_1^-$.
Por lo tanto,

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_1^- = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_2^-$$

y por simetría $\boldsymbol{A}_2^-\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_1^-\boldsymbol{A}$.
Por el item 4 se obtiene que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}_1^- &= \boldsymbol{A}_1^-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_1^- = \boldsymbol{A}_1^-(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_1^-) = \boldsymbol{A}_1^-(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_2^-) = (\boldsymbol{A}_1^-\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}_2^- \\ &= (\boldsymbol{A}_2^-\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}_2^- = \boldsymbol{A}_2^-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_2^- = \boldsymbol{A}_2^- \end{aligned}$$

entonces $\boldsymbol{A}_1^- = \boldsymbol{A}_2^-$ *y esto completa la prueba.*

Teorema 1.11.5 *La* $g-inversa$ *de la traspuesta de* $\boldsymbol{A}$ *es la traspuesta de la* $g-inversa$ *de* $\boldsymbol{A}$*, es decir*

$$(\boldsymbol{A}')^- = (\boldsymbol{A}^-)'$$

Prueba 1.11.5 *La prueba consiste en demostrar que* $(\boldsymbol{A}^-)'$ *es la* $g-inversa$ *de* $\boldsymbol{A}'$ *y ya que la* $g-inversa$ *de* $\boldsymbol{A}'$ *es única, se sigue que* $(\boldsymbol{A}')^- = (\boldsymbol{A}^-)'$.
Sea

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$$

como en la ecuación 1.11.2, se obtiene

$$\boldsymbol{A}^- = \boldsymbol{C}'(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}')^{-1}(\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}' \tag{1.11.4}$$

además

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{C}'\boldsymbol{B}'$$

y

$$(\boldsymbol{A}^-)' = (\boldsymbol{B}')'[\boldsymbol{B}'(\boldsymbol{B}')]^{-1}[(\boldsymbol{C}')'\boldsymbol{C}']^{-1}(\boldsymbol{C}')' = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B})^{-1}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}')^{-1}\boldsymbol{C}$$

tomando la traspuesta de $\boldsymbol{A}^-$ *en 1.11.4 se obtiene como en la ecuación 1.11.2, se obtiene*

$$(\boldsymbol{A}^-)' = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B})^{-1}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}')^{-1}\boldsymbol{C}$$

por lo tanto,

$$(\boldsymbol{A}')^- = (\boldsymbol{A}^-)'$$

y ya que la g-inversa de una matriz es única, el teorema es probado.

Teorema 1.11.6 *La $g-inversa$ de $\boldsymbol{A}^-$ es igual a $\boldsymbol{A}$, es decir $(\boldsymbol{A}^-)^- = \boldsymbol{A}$*

Prueba 1.11.6 *Por la definición 1.11.1 la $g-inversa$ satisface los siguientes resultados*

1. $\boldsymbol{A}^-(\boldsymbol{A}^-)^- = [\boldsymbol{A}^-(\boldsymbol{A}^-)^-]'$
2. $(\boldsymbol{A}^-)^-\boldsymbol{A}^- = [(\boldsymbol{A}^-)^-\boldsymbol{A}^-]'$
3. $\boldsymbol{A}^-(\boldsymbol{A}^-)^-\boldsymbol{A}^- = \boldsymbol{A}^-$
4. $(\boldsymbol{A}^-)^-\boldsymbol{A}^-(\boldsymbol{A}^-)^- = (\boldsymbol{A}^-)^-$

Pero si se sustituye $\boldsymbol{A}$ por $(\boldsymbol{A}^-)^-$, las 4 ecuaciones anteriores son exactamente las de la definición 1.11.1. Por lo tanto, $\boldsymbol{A}$ es la única $g-inversa$ de $\boldsymbol{A}^-$, es decir $(\boldsymbol{A}^-)^- = \boldsymbol{A}$

Teorema 1.11.7 *El rango de la $g-inversa$ de $\boldsymbol{A}$ es igual al rango de $\boldsymbol{A}$.*

Prueba 1.11.7 *Si se aplica el teorema 1.6.3 a $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$, se obtiene que*

$$r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A}) \leq r(\boldsymbol{A}^-)$$

Pero como $\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^- = \boldsymbol{A}^-$, se obtiene que

$$r(\boldsymbol{A}^-) = r(\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-) \leq r(\boldsymbol{A})$$

por lo tanto,

$$r(\boldsymbol{A}^-) = r(\boldsymbol{A})$$

Corolario 1.11.7.1 *Si el rango de la matriz $\boldsymbol{A}$ es igual a r, el rango de cada una de las matrices siguientes es igual a r: $\boldsymbol{A}^-, \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-, \boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-$.*

Prueba 1.11.8 *Sólo falta probar $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-$ y $\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A}$*

- *Para* $\boldsymbol{AA^-}$*. Se sabe que* $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{AA^-A}$ *entonces*

$$r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{AA^-A}) \leq r(\boldsymbol{AA^-})$$

  como $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A^-})$ *se tiene que*

$$r(\boldsymbol{A^-}) = r(\boldsymbol{A^-AA^-}) \leq r(\boldsymbol{AA^-})$$

  por lo tanto, $r(\boldsymbol{AA^-}) = r(\boldsymbol{A})$*.*

- *Igual para* $\boldsymbol{A^-A}$*.*

Teorema 1.11.8 *Si* $\boldsymbol{A}$ *e una matriz simétrica, la* $g - inversa$ *de* $\boldsymbol{A}$ *es también simétrica; esto es, si* $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}'$ *entonces* $\boldsymbol{A^-} = (\boldsymbol{A^-})'$*.*

Prueba 1.11.9 *Por el teorema 1.11.5, se obtiene que* $(\boldsymbol{A}')^- = (\boldsymbol{A^-})'$*, pero ya que* $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}'$*, se obtiene que* $\boldsymbol{A^-} = (\boldsymbol{A^-})'$*.*

Los próximos teoremas dan la forma de la $g - inversa$ de matrices especiales

Teorema 1.11.9 *Si la matriz* $\boldsymbol{A}$ *es no singular, entonces* $\boldsymbol{A^{-1}} = \boldsymbol{A^-}$*.*

Prueba 1.11.10 *Para probar que esto es cierto hay que ver que* $\boldsymbol{A^{-1}}$ *cumple las condiciones de la definición 1.11.1*

1. $\boldsymbol{AA^{-1}} = \boldsymbol{I}$ *la cual es simétrica;*
2. $\boldsymbol{A^{-1}A} = \boldsymbol{I}$ *la cual es simétrica;*
3. $\boldsymbol{AA^{-1}A} = \boldsymbol{IA} = \boldsymbol{A}$
4. $\boldsymbol{A^{-1}AA^{-1}} = \boldsymbol{IA^{-1}} = \boldsymbol{A^{-1}}$

Teorema 1.11.10 *Si* $\boldsymbol{A}$ *es simétrica idempotente, entonces* $\boldsymbol{A^-} = \boldsymbol{A}$*, esto es, si* $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}'$ *y* $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^2$*, entonces* $\boldsymbol{A^-} = \boldsymbol{A}$*.*

Teorema 1.11.11 *Si* $\boldsymbol{A}$ *es una matriz* $m \times n$ *de rango* m*, entonces* $\boldsymbol{A^-} = \boldsymbol{A}'(\boldsymbol{AA}')^{-1}$ *y* $\boldsymbol{AA^-} = \boldsymbol{I}$*. Si el rango de* $\boldsymbol{A}$ *es* n*, entonces* $\boldsymbol{A^-} = (\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}'$ *y* $\boldsymbol{A^-A} = \boldsymbol{I}$

Teorema 1.11.12 *Las matrices* $\boldsymbol{AA^-}, \boldsymbol{A^-A}, \boldsymbol{I} - \boldsymbol{AA^-}, \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A^-A}$ *son todas simétricas idempotentes.*

Prueba 1.11.11 *Se probará primera la simetría y luego la idempotencia.*
Simetría:

1. $(\boldsymbol{AA^-})' = (\boldsymbol{A^-})'\boldsymbol{A}' = (\boldsymbol{A}')^{-1}\boldsymbol{A}' = (\boldsymbol{A^-})'[(\boldsymbol{A^-})^-]'$, *se cumple por la condición 1 de 1.11.1;*
2. $\boldsymbol{A^-A}$ *es simétrica;*
3. $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{AA^-})' = \boldsymbol{I}' - (\boldsymbol{AA^-})' = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{AA^-}$
4. $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A^-A})' = \boldsymbol{I}' - (\boldsymbol{A^-A})' = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A^-A}$

Idempotencia:

1. $(\boldsymbol{AA^-})(\boldsymbol{AA^-}) = \boldsymbol{AA^-AA^-} = \boldsymbol{AA^-}$ *ya que* $\boldsymbol{A^-AA^-} = \boldsymbol{A^-}$*;*
2. $(\boldsymbol{A^-A})(\boldsymbol{AA}) = \boldsymbol{A^-AA^-A} = \boldsymbol{A^-A}$ *ya que* $\boldsymbol{AA^-A} = \boldsymbol{A}$*;*
3. $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{AA^-})(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{AA^-}) = \boldsymbol{I}-\boldsymbol{AA^-}-\boldsymbol{AA^-}-\boldsymbol{AA^-}+\boldsymbol{AA^-AA^-} = \boldsymbol{I}-2\boldsymbol{AA^-}+\boldsymbol{AA^-} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{AA^-}$*;*
4. $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A^-A})(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A^-A}) = \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A^-A}-\boldsymbol{A^-A}-\boldsymbol{A^-A}+\boldsymbol{A^-AA^-A} = \boldsymbol{I}-2\boldsymbol{A^-A}+\boldsymbol{A^-A} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A^-A}$.

Nota 1.11.1 *No siempre es cierto que* $(\boldsymbol{GH})^- = \boldsymbol{H^-G^-}$ *para todas las matrices* $\boldsymbol{G}$ *y* $\boldsymbol{H}$*. Sin embargo, para ciertas matrices esta ecuación es correcta. Ahora se establecen algunos teoremas relacionados con este asunto.*

Teorema 1.11.13 *Sea* $\boldsymbol{B}$ *una matriz* $m \times r$ *de rango* r*,* $(r > 0)$*, y sea* $\boldsymbol{C}$ *una matriz* $r \times m$ *de rango* r*, entonces* $(\boldsymbol{CB})^- = \boldsymbol{C^-B^-}$*.*

Prueba 1.11.12 *Por el teorema 1.11.11, se obtiene que*

$$\boldsymbol{C}^- = \boldsymbol{C}'(\boldsymbol{CC}')^{-1} \quad y \quad \boldsymbol{B}^- = (\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}'$$

Por lo tanto,

$$\boldsymbol{C}^{-}\boldsymbol{B}^{-} = \boldsymbol{C}'(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}')^{-1}(\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}'$$

Por la ecuación 1.11.3

$$\boldsymbol{C}'(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}')^{-1}(\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{A}^{-} = (\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})^{-}$$

Teorema 1.11.14 $(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})^{-} = \boldsymbol{A}^{-}(\boldsymbol{A}')^{-}$ *para cualquier matriz* $\boldsymbol{A}$.

Teorema 1.11.15 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{-} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}$ *y* $(\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{-} = \boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A}$ *para cualquier matriz* $\boldsymbol{A}$.