Procesos Estocásticos

Tema 1. Clase 3

Douglas Rivas

Escuela de Estadística

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
VENEZUELA

Visto en la clase anterior...

Visto en la clase anterior...

✓ Trayectoria de un proceso estocástico

Visto en la clase anterior...

✓ Trayectoria de un proceso estocástico
- Fijar ω

Visto en la clase anterior...

✓ Trayectoria de un proceso estocástico

- Fijar ω
- Fijar t

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
VENEZUELA

Visto en la clase anterior...

✓ Trayectoria de un proceso estocástico
  - Fijar ω
  - Fijar t

Visto en la clase anterior...

- ✓ Trayectoria de un proceso estocástico
  - Fijar ω
  - Fijar t
- ✓ Clasificación de los procesos estocásticos

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
VENEZUELA

Distribución de orden k de un proceso estocástico

Recordemos que...

Un proceso estocástico $\{X_t, t \in T\}$ es una sucesión de variables aleatorias $(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_k})$

Distribución de orden k de un proceso estocástico

Recordemos que...

Un proceso estocástico $\{X_t, t \in T\}$ es una sucesión de variables aleatorias $(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_k})$

Por lo visto en teoría II...

Un vector aleatorio que es a u vez una sucesión de variables aleatorias $(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_k})$ tiene asociada una función de distribución conjunta $F(x_1, x_2, ..., x_k; t_1, t_2, ..., t_k)$

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
VENEZUELA

Distribución de orden k de un proceso estocástico

Recordemos que...

Un proceso estocástico $\{X_t, t \in T\}$ es una sucesión de variables aleatorias $(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_k})$

Por lo visto en teoría II...

Un vector aleatorio que es a u vez una sucesión de variables aleatorias $(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_k})$ tiene asociada una función de distribución conjunta $F(x_1, x_2, ..., x_k; t_1, t_2, ..., t_k)$

Por lo tanto

La Función de Distribución de orden k del proceso estocástico $\{X_t, t \in T\}$, es la función de distribución conjunta del vector aleatorio $(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_k})$, es decir $F(x_1, x_2, ..., x_k; t_1, t_2, ..., t_k)$

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
VENEZUELA

Distribución de orden k de un proceso estocástico

Ejemplo

Consideremos el lanzamiento de una moneda varias veces. Cada vez que la moneda cae cara la partícula se mueve una posición hacia atrás, en caso contrario se mueve una posición hacia adelante. Sea $p = P[\{sello\}]$. Sea X_n la posición de la partícula en el tiempo $n = 2$. Estamos interesados en hallar la función de masa de probabilidad de orden j del proceso.

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
VENEZUELA

Distribución de orden k de un proceso estocástico

Ejemplo

Consideremos el lanzamiento de una moneda varias veces. Cada vez que la moneda cae cara la partícula se mueve una posición hacia atrás, en caso contrario se mueve una posición hacia adelante. Sea $p = P[\{sello\}]$. Sea X_n la posición de la partícula en el tiempo $n = 2$. Estamos interesados en hallar la función de masa de probabilidad de orden j del proceso.

¿Qué queremos hallar?

Como $n = 2$ nos interesa modelar la posición de la partícula una vez que la moneda ha sido lanzada dos veces, es decir $P[X_2 = x]$.

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
VENEZUELA

Distribución de orden k de un proceso estocástico

Ejemplo

Consideremos el lanzamiento de una moneda varias veces. Cada vez que la moneda cae cara la partícula se mueve una posición hacia atrás, en caso contrario se mueve una posición hacia adelante. Sea $p = P[\{sello\}]$. Sea X_n la posición de la partícula en el tiempo $n = 2$. Estamos interesados en hallar la función de masa de probabilidad de orden j del proceso.

¿Qué queremos hallar?

Como $n = 2$ nos interesa modelar la posición de la partícula una vez que la moneda ha sido lanzada dos veces, es decir $P[X_2 = x]$.

Definimos

- ✓ Ω.

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES VENEZUELA

Distribución de orden k de un proceso estocástico

Ejemplo

Consideremos el lanzamiento de una moneda varias veces. Cada vez que la moneda cae cara la partícula se mueve una posición hacia atrás, en caso contrario se mueve una posición hacia adelante. Sea $p = P[\{sello\}]$. Sea X_n la posición de la partícula en el tiempo $n = 2$. Estamos interesados en hallar la función de masa de probabilidad de orden j del proceso.

¿Qué queremos hallar?

Como $n = 2$ nos interesa modelar la posición de la partícula una vez que la moneda ha sido lanzada dos veces, es decir $P[X_2 = x]$.

Definimos

✓ Ω.

Distribución de orden k de un proceso estocástico

Ejemplo

Consideremos el lanzamiento de una moneda varias veces. Cada vez que la moneda cae cara la partícula se mueve una posición hacia atrás, en caso contrario se mueve una posición hacia adelante. Sea $p = P[\{sello\}]$. Sea X_n la posición de la partícula en el tiempo $n = 2$. Estamos interesados en hallar la función de masa de probabilidad de orden j del proceso.

¿Qué queremos hallar?

Como $n = 2$ nos interesa modelar la posición de la partícula una vez que la moneda ha sido lanzada dos veces, es decir $P[X_2 = x]$.

Definimos

✓ Ω.

$$\Omega = \{ss, sc, cs, cc\}$$

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
VENEZUELA

Distribución de orden k de un proceso estocástico

Ejemplo

Consideremos el lanzamiento de una moneda varias veces. Cada vez que la moneda cae cara la partícula se mueve una posición hacia atrás, en caso contrario se mueve una posición hacia adelante. Sea $p = P[\{sello\}]$. Sea X_n la posición de la partícula en el tiempo $n = 2$. Estamos interesados en hallar la función de masa de probabilidad de orden j del proceso.

¿Qué queremos hallar?

Como $n = 2$ nos interesa modelar la posición de la partícula una vez que la moneda ha sido lanzada dos veces, es decir $P[X_2 = x]$.

Definimos

- ✓ Ω.

$$\Omega = \{ss, sc, cs, cc\}$$

- ✓ Los valores X_2

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
VENEZUELA

Distribución de orden k de un proceso estocástico

Ejemplo

Consideremos el lanzamiento de una moneda varias veces. Cada vez que la moneda cae cara la partícula se mueve una posición hacia atrás, en caso contrario se mueve una posición hacia adelante. Sea $p = P[\{sello\}]$. Sea X_n la posición de la partícula en el tiempo $n = 2$. Estamos interesados en hallar la función de masa de probabilidad de orden j del proceso.

¿Qué queremos hallar?

Como $n = 2$ nos interesa modelar la posición de la partícula una vez que la moneda ha sido lanzada dos veces, es decir $P[X_2 = x]$.

Definimos

- ✓ Ω.

$$\Omega = \{ss, sc, cs, cc\}$$

- ✓ Los valores X_2

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
VENEZUELA

Distribución de orden k de un proceso estocástico

Ejemplo

Consideremos el lanzamiento de una moneda varias veces. Cada vez que la moneda cae cara la partícula se mueve una posición hacia atrás, en caso contrario se mueve una posición hacia adelante. Sea $p = P[\{sello\}]$. Sea X_n la posición de la partícula en el tiempo $n = 2$. Estamos interesados en hallar la función de masa de probabilidad de orden j del proceso.

¿Qué queremos hallar?

Como $n = 2$ nos interesa modelar la posición de la partícula una vez que la moneda ha sido lanzada dos veces, es decir $P[X_2 = x]$.

Definimos

✓ Ω.

$$\Omega = \{ss, sc, cs, cc\}$$

✓ Los valores X_2

$$X_2 = \{-2, 0, 2\}$$

Distribución de orden k de un proceso estocástico

Ejemplo

Consideremos el lanzamiento de una moneda varias veces. Cada vez que la moneda cae cara la partícula se mueve una posición hacia atrás, en caso contrario se mueve una posición hacia adelante. Sea $p = P[\{sello\}]$. Sea X_n la posición de la partícula en el tiempo $n = 2$. Estamos interesados en hallar la función de masa de probabilidad de orden j del proceso.

¿Qué queremos hallar?

Como $n = 2$ nos interesa modelar la posición de la partícula una vez que la moneda ha sido lanzada dos veces, es decir $P[X_2 = x]$.

Definimos

- ✓ Ω.

$$\Omega = \{ss, sc, cs, cc\}$$

- ✓ Los valores X_2

$$X_2 = \{-2, 0, 2\}$$

Por lo tanto

$$P[X_2 = x] = \begin{cases} (1-p)^2, & \text{si } x = -2; \\ 2p(1-p), & \text{si } x = 0; \\ p^2, & \text{si } x = 2. \end{cases}$$

Primer y Segundo Momento de un Proceso Estocástico

Momentos

- ✓ Primer Momento:

Primer y Segundo Momento de un Proceso Estocástico

Momentos

- ✓ Primer Momento:

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
VENEZUELA

Primer y Segundo Momento de un Proceso Estocástico

Momentos

✓ Primer Momento: $m_X(t) = E[X_t]$.

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
VENEZUELA

Primer y Segundo Momento de un Proceso Estocástico

Momentos

- ✓ Primer Momento: $m_X(t) = E[X_t]$.
- ✓ Funciones del segundo momento

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
VENEZUELA

Primer y Segundo Momento de un Proceso Estocástico

Momentos

- ✓ Primer Momento: $m_X(t) = E[X_t]$.
- ✓ Funciones del segundo momento

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
VENEZUELA

Primer y Segundo Momento de un Proceso Estocástico

Momentos

- ✓ Primer Momento: $m_X(t) = E[X_t]$.
- ✓ Funciones del segundo momento
  - Autocorrelación:

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
VENEZUELA

Primer y Segundo Momento de un Proceso Estocástico

Momentos

- ✓ Primer Momento: $m_X(t) = E[X_t]$.
- ✓ Funciones del segundo momento
  - Autocorrelación:

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
VENEZUELA

Primer y Segundo Momento de un Proceso Estocástico

Momentos

- ✓ Primer Momento: $m_X(t) = E[X_t]$.
- ✓ Funciones del segundo momento
  - Autocorrelación: $R_X(t_1, t_2) = E[X_{t_1}, X_{t_2}]$

Primer y Segundo Momento de un Proceso Estocástico

Momentos

- ✓ Primer Momento: $m_X(t) = E[X_t]$.
- ✓ Funciones del segundo momento
  - Autocorrelación: $R_X(t_1, t_2) = E[X_{t_1}, X_{t_2}]$
  - Autocovarianza:

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
VENEZUELA

Primer y Segundo Momento de un Proceso Estocástico

Momentos

- ✓ Primer Momento: $m_X(t) = E[X_t]$.
- ✓ Funciones del segundo momento
  - Autocorrelación: $R_X(t_1, t_2) = E[X_{t_1}, X_{t_2}]$
  - Autocovarianza:

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES VENEZUELA

Primer y Segundo Momento de un Proceso Estocástico

Momentos

✓ Primer Momento: $m_X(t) = E[X_t]$.

✓ Funciones del segundo momento

- Autocorrelación: $R_X(t_1, t_2) = E[X_{t_1}, X_{t_2}]$
- Autocovarianza:
  $Cov_X(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_X(t_2)$

Primer y Segundo Momento de un Proceso Estocástico

Momentos

- ✓ Primer Momento: $m_X(t) = E[X_t]$.
- ✓ Funciones del segundo momento
  - Autocorrelación: $R_X(t_1, t_2) = E[X_{t_1}, X_{t_2}]$
  - Autocovarianza: $Cov_X(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_X(t_2)$
  - Coeficiente de correlación:

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
VENEZUELA

Primer y Segundo Momento de un Proceso Estocástico

Momentos

- ✓ Primer Momento: $m_X(t) = E[X_t]$.
- ✓ Funciones del segundo momento
  - Autocorrelación: $R_X(t_1, t_2) = E[X_{t_1}, X_{t_2}]$
  - Autocovarianza: $Cov_X(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_X(t_2)$
  - Coeficiente de correlación:

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
VENEZUELA

Primer y Segundo Momento de un Proceso Estocástico

Momentos

- ✓ Primer Momento: $m_X(t) = E[X_t]$.
- ✓ Funciones del segundo momento
  - Autocorrelación: $R_X(t_1, t_2) = E[X_{t_1}, X_{t_2}]$
  - Autocovarianza:
    $Cov_X(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_X(t_2)$
  - Coeficiente de correlación:
    $\rho_X(t_1, t_2) = \frac{Cov_X(t_1,t_2)}{[Cov_X(t_1,t_1)Cov_X(t_2,t_2)]^{1/2}}$

Primer y Segundo Momento de un Proceso Estocástico

Momentos

- ✓ Primer Momento: $m_X(t) = E[X_t]$.
- ✓ Funciones del segundo momento
  - Autocorrelación: $R_X(t_1, t_2) = E[X_{t_1}, X_{t_2}]$
  - Autocovarianza: $Cov_X(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_X(t_2)$
  - Coeficiente de correlación: $\rho_X(t_1, t_2) = \frac{Cov_X(t_1,t_2)}{[Cov_X(t_1,t_1)Cov_X(t_2,t_2)]^{1/2}}$

✓ Se usa el prefijo auto porque la función es calculada para dos valores del mismo proceso $\{X_t, t \in T\}$

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
VENEZUELA

Primer y Segundo Momento de un Proceso Estocástico

Momentos

- ✓ Primer Momento: $m_X(t) = E[X_t]$.
- ✓ Funciones del segundo momento
  - Autocorrelación: $R_X(t_1, t_2) = E[X_{t_1}, X_{t_2}]$
  - Autocovarianza: $Cov_X(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_X(t_2)$
  - Coeficiente de correlación: $\rho_X(t_1, t_2) = \frac{Cov_X(t_1,t_2)}{[Cov_X(t_1,t_1)Cov_X(t_2,t_2)]^{1/2}}$

- ✓ Se usa el prefijo auto porque la función es calculada para dos valores del mismo proceso $\{X_t, t \in T\}$

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
VENEZUELA

Primer y Segundo Momento de un Proceso Estocástico

Momentos

- ✓ Primer Momento: $m_X(t) = E[X_t]$.
- ✓ Funciones del segundo momento
  - Autocorrelación: $R_X(t_1, t_2) = E[X_{t_1}, X_{t_2}]$
  - Autocovarianza: $Cov_X(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_X(t_2)$
  - Coeficiente de correlación: $\rho_X(t_1, t_2) = \frac{Cov_X(t_1,t_2)}{[Cov_X(t_1,t_1)Cov_X(t_2,t_2)]^{1/2}}$

- ✓ Se usa el prefijo auto porque la función es calculada para dos valores del mismo proceso $\{X_t, t \in T\}$
- ✓ La función $R_{X,Y}(t_1, t_2) = E[X_{t_1} Y_{t_2}]$ donde $\{Y_t, t \in T*\}$ es otro proceso estocástico, es llamada la **Función de Correlación Cruzada**

Primer y Segundo Momento de un Proceso Estocástico

Primer y Segundo Momento de un Proceso Estocástico

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES VENEZUELA

Ejemplo

Sea Y una variable aleatoria que se distribuye $U(0,1)$. Definamos el proceso estocástico$\{X_t, t \geq 0\}$ por

$$X_t = e^Y t,\ t \geq 0$$

Vamos a calcular la función de densidad de primer proceso, la media y la función de autocorrelación.

Primer y Segundo Momento de un Proceso Estocástico

Ejemplo

Sea Y una variable aleatoria que se distribuye $U(0,1)$. Definamos el proceso estocástico$\{X_t, t \geq 0\}$ por

$$X_t = e^Y t, \; t \geq 0$$

Vamos a calcular la función de densidad de primer proceso, la media y la función de autocorrelación.

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
VENEZUELA

Primer y Segundo Momento de un Proceso Estocástico

Ejemplo

Sea Y una variable aleatoria que se distribuye $U(0,1)$. Definamos el proceso estocástico$\{X_t, t \geq 0\}$ por

$$X_t = e^Y t,\ t \geq 0$$

Vamos a calcular la función de densidad de primer proceso, la media y la función de autocorrelación.

Nuevamente recordando teoría II...

$$f_{X_t}(x) = \frac{1}{x},\ \forall x \in (t, te)$$

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
VENEZUELA

Primer y Segundo Momento de un Proceso Estocástico

Ejemplo

Sea Y una variable aleatoria que se distribuye $U(0,1)$. Definamos el proceso estocástico$\{X_t, t \geq 0\}$ por

$$X_t = e^Y t, \; t \geq 0$$

Vamos a calcular la función de densidad de primer proceso, la media y la función de autocorrelación.

Nuevamente recordando teoría II...

$$f_{X_t}(x) = \frac{1}{x}, \; \forall x \in (t, te)$$

Ahora recordando teoría I...

$$E[X_t] = t(e-1), \; t \geq 0$$

$$R_X(t, t+s) = \frac{t(t+s)}{2}[e^2 - 1], \; \forall s, t \geq 0$$

Primer y Segundo Momento de un Proceso Estocástico

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
VENEZUELA

Primer y Segundo Momento de un Proceso Estocástico

Ejemplo

Ensayos independientes para los cuales la probabilidad de éxito es la misma para cada uno de estos ensayos son llamados ensayos Bernoulli. Por ejemplo, podemos lanzar un dado independientemente un número indefinido de veces y definir un éxito cuando cae el "6". Un proceso Bernoulli, es una sucesión $X_1, X_2, ...$ de variables aleatorias Bernoulli asociadas con ensayos Bernoulli. Esto es, $X_k = 1$ si el k-esimo ensayo es un éxito y $x_k = 0$ en otro caso.

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
VENEZUELA

Primer y Segundo Momento de un Proceso Estocástico

Ejemplo

Ensayos independientes para los cuales la probabilidad de éxito es la misma para cada uno de estos ensayos son llamados ensayos Bernoulli. Por ejemplo, podemos lanzar un dado independientemente un número indefinido de veces y definir un éxito cuando cae el "6". Un proceso Bernoulli, es una sucesión $X_1, X_2, \ldots$ de variables aleatorias Bernoulli asociadas con ensayos Bernoulli. Esto es, $X_k = 1$ si el k-esimo ensayo es un éxito y $x_k = 0$ en otro caso.

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
VENEZUELA

Primer y Segundo Momento de un Proceso Estocástico

Ejemplo

Ensayos independientes para los cuales la probabilidad de éxito es la misma para cada uno de estos ensayos son llamados ensayos Bernoulli. Por ejemplo, podemos lanzar un dado independientemente un número indefinido de veces y definir un éxito cuando cae el "6". Un proceso Bernoulli, es una sucesión $X_1, X_2, \ldots$ de variables aleatorias Bernoulli asociadas con ensayos Bernoulli. Esto es, $X_k = 1$ si el k-esimo ensayo es un éxito y $x_k = 0$ en otro caso.

Primer Momento...

$$E[X_k] = p$$

Funciones del segundo momento

✓ $R_X(k_1, k_2) = p^2$

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
VENEZUELA

Primer y Segundo Momento de un Proceso Estocástico

Ejemplo

Ensayos independientes para los cuales la probabilidad de éxito es la misma para cada uno de estos ensayos son llamados ensayos Bernoulli. Por ejemplo, podemos lanzar un dado independientemente un número indefinido de veces y definir un éxito cuando cae el "6". Un proceso Bernoulli, es una sucesión $X_1, X_2, \ldots$ de variables aleatorias Bernoulli asociadas con ensayos Bernoulli. Esto es, $X_k = 1$ si el k-esimo ensayo es un éxito y $x_k = 0$ en otro caso.

Primer Momento...

$$E[X_k] = p$$

Funciones del segundo momento

- ✓ $R_X(k_1, k_2) = p^2$
- ✓ $R_X(k, k) = p$

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
VENEZUELA

Primer y Segundo Momento de un Proceso Estocástico

Ejemplo

Ensayos independientes para los cuales la probabilidad de éxito es la misma para cada uno de estos ensayos son llamados ensayos Bernoulli. Por ejemplo, podemos lanzar un dado independientemente un número indefinido de veces y definir un éxito cuando cae el "6". Un proceso Bernoulli, es una sucesión $X_1, X_2, ...$ de variables aleatorias Bernoulli asociadas con ensayos Bernoulli. Esto es, $X_k = 1$ si el k-esimo ensayo es un éxito y $x_k = 0$ en otro caso.

Primer Momento...

$$E[X_k] = p$$

Funciones del segundo momento

- ✓ $R_X(k_1, k_2) = p^2$
- ✓ $R_X(k, k) = p$
- ✓ $Cov_X(k_1, k_2) = \begin{cases} p^2 - p * p = 0, & \text{si } k_1 \neq k_2; \\ p - p^2 = p(1-p), & \text{si } k_1 = k_2 = k. \end{cases}$

Primer y Segundo Momento de un Proceso Estocástico

Actividad

TRAER RESUELTOS LOS EJERCICIOS 4, 5, 6, 7, 8 y 9