Universidad de Los Andes
Facultad de Ciencias Económicas y Sociales
Escuela de Estadística
Procesos Estocásticos
Sección 01 - B-2015
Prof. Douglas Rivas

Guía de Estudio del Tema 3. Cadenas de Markov (Segunda parte)

1. Demostrar la propiedad de los conjuntos cerrados, es decir

$$\textbf{Para todo } n > 0 \textbf{ y para todo } i \in \mathbb{C}\textbf{, se tiene } \sum_{j\in\mathbb{C}}^{n} p_{ij}^{(n)} = 1$$

2. Se consideran cuatro cadenas de Markov, cada una con espacio de estado $E = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ y con matrices de transición respectivas P_1, P_2, P_3, P_4 dadas por

$$P_1 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} \end{array} \qquad P_2 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$P_3 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad P_4 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Determinar las clases de estas cadenas.

3. Determinar las clases de la cadena de Markov que admite la siguiente matriz de transición

$$P_3 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & E_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \end{array} & \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/4 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \end{array}$$

4. Demostrar que todos los estados de una clase de equivalencia tienen el mismo período.

5. Determinar el período de los estados para las siguientes cadenas de markov

a)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} E_0 & E_1 & E_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} E_0 \\ E_1 \\ E_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

6. Determinar el período de los estados de la siguiente cadena de Markov

$$\begin{array}{c} \\ E_0 \\ E_1 \\ \vdots \\ E_{n-1} \\ E_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} E_0 & E_1 & E_2 & \cdots & E_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

7. Demuestre que $i \to j$, si y sólo si, $f_{ij} > 0$

8. Encuentre las clases de comunicación de la siguiente cadena de Markov. Encuentre además los periodos, y clasifique cada clase de comunicación como transitoria o recurrente

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$$

9. Demuestre que todo estado absorbente es recurrente.

10. Determine las clases de comunicación de las siguientes cadenas de Markov y clasifique éstas como recurrentes o transitorias.

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

11. Dibuje un diagrama de transición de una cadena de Markov tal que
    a) Todos sus estados sean recurrentes.
    b) Todos sus estados sean transitorios.
    c) Tenga igual número de estados transitorios y recurrentes

12. Demuestre que si i es un estado recurrente e $i \to j$, entonces $j \to i$.

13. Encuentre todas las distribuciones estacionarias, si existen, para cada una de las siguientes cadenas de Markov.

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

14. Determine si existe alguna distribución estacionaria para la siguiente matriz estocástica. En caso afirmativo encuentre todas las distribuciones estacionarias

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & p \\ 1-p & p & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

15. Demuestre que la siguiente cadena de Markov tiene un número infinito de distribuciones estacionarias

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

16. Calcule la distribución límite, cuando existe, de las siguientes cadenas de Markov

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$