Universidad de Los Andes
Facultad de Ciencias Económicas y Sociales
Escuela de Estadística
Procesos Estocásticos
Sección 01 - A-2016
Prof. Douglas Rivas

Guía de Estudio del Tema 3. Cadenas de Markov.

Matriz de Transición de un paso.

Con la solución de esta guía se pretende que el estudiante

- Defina que es una cadena de Markov. Propiedad de Markov.
- Identifique procesos que sean Cadenas de Markov.
- Calcule la matriz de probabilidades de transición de un paso
- Calcule la probabilidad del estado del sistema.

El estudiante previamente debe tener conocimientos sobre

- Definición de un proceso estocástico, espacio paramétrico y espacio de estados.
- Operaciones sobre matrices (multiplicación)
- La formula de la esperanza matemática
- Regla multiplicativa de probabilidad y el teorema de probabilidad total
- Se les recomienda a los alumnos antes de resolver la guía tener claros los conceptos, las demostraciones y los ejemplos realizados en clase.

1. (Tomado del Karlin (3.1.1)) Una cadena de Markov $X_0, X_1, ...$ sobre los estados $0, 1, 2$ tiene la matriz de probabilidad de transición

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}7 \\ 0{,}9 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}1 \end{pmatrix} \end{array}$$

y distribución inicial $p_0 = P(X_0 = 0) = 0{,}3, p_1 = P(X_0 = 1) = 0{,}4$ y $p_2 = P(X_0 = 2) = 0{,}3$. Determine $P(X_0 = 1, X_1 = 1, X_2 = 2)$

2. (Tomado del Karlin (3.1.2)) Una cadena de Markov $X_0, X_1, ...$ tiene matriz de probabilidad de transición

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix} \end{array}$$

Determine $P(X_2 = 1, X_3 = 1/X_1 = 0)$ y $P(X_1 = 1, X_2 = 1/X_0 = 0)$

3. (Tomado del Karlin (3.1.3)) Una cadena de Markov $X_0, X_1, ...$ sobre los estados $0, 1, 2$ tiene la matriz de probabilidad de transición

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}5 \end{pmatrix} \end{array}$$

si se sabe que el proceso comienza en el estado $X_0 = 1$, determine $P(X_0 = 1, X_1 = 0, X_2 = 2)$

4. (Tomado del Karlin (3.1.4)) Una cadena de Markov $X_0, X_1, ...$ tiene matriz de probabilidad de transición

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Determine $P(X_1 = 1, X_2 = 1/X_0 = 0)$ y $P(X_2 = 1, X_3 = 1/X_1 = 0)$

5. (Tomado del Karlin (3.1.5)) Una cadena de Markov $X_0, X_1, ...$ tiene matriz de probabilidad de transición

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix} \end{array}$$

y distribución inicial $p_0 = 0{,}5, p_1 = 0{,}5$. Determine $P(X_0 = 1, X_1 = 1, X_2 = 0)$ Y $P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0)$

6. (Tomado del Karlin (Prob 1.3)) Considere una sucesión de items de un proceso productivo, cada uno de los cuales es considerado como bueno o defectuoso. Suponga que un item bueno es seguido de otro bueno con probabilidad α y es seguido de uno defectuoso con probabilidad $1 - \alpha$. De manera similar, un item defectuoso es seguido de otro defectuoso con probabilidad β y es seguido por uno bueno con probabilidad $1 - \beta$. Si el primer item es bueno, ¿cuál es la probabilidad de que el primer defectuoso aparezca en el quinto item?

7. (Tomado del Karlin 3.2.4) Una cadena de Markov $X_0, X_1, ...$ tiene la matriz de probabilidad de transición

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}5 \end{pmatrix} \end{array}$$

si se sabe que el proceso comienza en el estado $X_0 = 1$, determine $P(X_2 = 2)$

8. (Tomado del Karlin 3.2.6) Una cadena de Markov $X_0, X_1, ...$ tiene matriz de probabilidad de transición

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix} \end{array}$$

y distribución inicial $p_0 = 0{,}5, p_1 = 0{,}5$. Determine $P(X_2 = 0)$ Y $P(X_3 = 0)$

9. (Tomado del Karlin Prob. 3.2.1) Considere la cadena de Markov cuya matriz de probabilidad de transición esta dada por

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & \;\;1 & \;\;2 & \;\;3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Suponga que la distribución inicial es $p_i = \frac{1}{4}$ para $i = 0, 1, 2, 3$. Demostrar que $P(X_n = k) = \frac{1}{4}, k = 0, 1, 2, 3$ para todo n. Se puede deducir un resultado general para este ejemplo.

10. (Tomado del Karlin Prob. 3.2.4) Suponga que X_n es una cadena de Markov de dos estados cuya matriz de probabilidad de transición es

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & \quad 1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\beta & \beta \end{pmatrix} \end{array}$$

Entonces $Z_n = (X_{n-1}, X_n)$ es una cadena de Markov que tiene los cuatro estados $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ y $(1, 1)$. Determine la matriz de probabilidad de transición.

11. (Tomado del Feldman 5.1) Jesús y Pedro tienen cada uno 2 bolívares en sus bolsillos. Ellos han decidido jugar la moneda, es decir, cada uno de ellos lanza una moneda, si caen con la misma cara, Jesús le gana a Pedro la moneda, de lo contrario Pedro le gana a Jesús la moneda. El juego termina cuando uno de ellos tengo los 4 bolívares y el otro este quebrado, aunque ellos no lo saben las 4 monedas están sesgadas. La probabilidad de lanzar una cara es 0.6, y la probabilidad de sello es 0.4. Sea X una cadena de Markov donde X_n denota la cantidad que Jesús tiene después del n-ésimo lanzamiento de las monedas.

    a) Escriba la matriz de Markov.

    b) ¿Cuál es la probabilidad de que Jesús tenga 4 bolívares después del segundo lanzamiento?

    c) ¿Cuál es la probabilidad de que Pedro este quebrado después del tercer lanzamiento?

    d) ¿Cuál es la probabilidad de que el juego termine antes del tercer lanzamiento?

12. (Tomado del Feldman 5.2) Al inicio de cada semana, la condición de una máquina esta determinada al medir la cantidad de corriente eléctrica que usa. De acuerdo a su lectura de amperage, la máquina se categoriza a estar en uno de los siguientes cuatro estados: baja, media, alta, falla. Una máquina en el estado bajo tiene probabilidad de 0.05, 0.03 y 0.02 de ir al estado medio, alto o falla, respectivamente, al inicio de la próxima semana. Una máquina en el estado medio tiene probabilidad de 0.99 y 0.06 de estar en el estado alto o falla, respectivamente, al inicio de la próxima semana (este no puede, por sí mismo ir al estado baja). Y, una máquina en el estado alto tiene probabilidad de estar en el estado falla al inicio de la próxima semana (este no puede, por sí mismo, ir al estado baja o medio). Si un máquina esta en el estado falla al inicio de la semana, ella es inmediatamente llevada a reparación, por lo tanto ella comenzará en el estado baja al inicio de la próxima semana. Sea X una cadena de Markov donde X_n es el estado de la máquina al inicio de la semana n.

    a) Escriba la matriz de Markov.

    b) Una máquina nueva siempre comienza en el estado baja. ¿Cual es la probabilidad de que la máquina este en el estado falla tres semanas después de que era nueva?.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que una máquina tenga al menos una falla tres semanas después de que era nueva?.

13. (Tomado del Feldman 5.3) Estamos interesados en el movimiento de pacientes dentro de un hospital. Para propósitos de nuestro análisis, consideramos que el hospital tiene tres diferentes tipos de cuartos: cuidado general, cuidado especial y cuidado intensivo. Basado en datos pasados, 60 % de los pacientes que llegan son admitidos inicialmente en el cuarto de cuidado general, 30 % en el de cuidado especial y el 10 % en cuidado intensivo. Un paciente en cuidado general tiene 55 % de ser dado de alta al día siguiente, un 30 % de permanecer en cuidado general y un 15 % de ser movido al cuarto de cuidado especial. Un paciente de cuidado especial tiene 10 % de ser dado de alta al siguiente día, un 20 % de ir a cuidado general, un 10 % de ser llevado a cuidado intensivo y un 5 % de morir durante el día. Un paciente en cuidado intensivo nunca será dado de alta al día siguiente, las probabilidades de ir a cuidado general, cuidado especial o permanecer en cuidado intensivo son 5 %, 30 % o 55 %, respectivamente. Sea X una cadena de Markov donde X_0 es el tipo de cuarto que un paciente inicialmente admitido usa, y X_n es la categoría del cuarto que esta usando el paciente al final del día n. Escriba la matriz de Markov para X.

14. El ascensor de un edificio con planta baja y dos pisos realiza viajes de un a otro piso. El piso en el que finaliza el viaje n-ésimo del ascensor sigue una cadena de Markov. Se sabe que la mitad de los viajes que parten de la planta baja se dirigen a cada uno de los otros dos pisos, mientras que si un viaje comienza en el primer piso, sólo el 25 % de las veces finaliza en el segundo. Por último, si un trayecto comienza en el segundo piso, siempre finaliza en la planta baja. Calcular la matriz de probabilidades de transición de la cadena.

15. En una comunidad hay 3 supermercados (S_1, S_2, S_3) existe la movilidad de un cliente de uno a otro. El 1 de septiembre, 1/4 de los clientes va al S_1, 1/3 al S_2 y 5/12 al S_3 de un total de 10.000 personas. Cada mes el S_1 retiene el 90 % de sus clientes y pierde el 10 % que se va al S_2. Se averiguó que el S_2 solo retiene el 5 % y pierde el 85 % que va a S_1 y el resto se va a S_3, el S_3 retiene solo el 40 %, pierde el 50 % que va al S_1 y el 10 % va al S_2.

    a) Establecer la matriz de transición

    b) ¿Cuál es la proporción de clientes para los supermercados el 1 de noviembre?

16. **Respuesta Inmune:** Un estudio sobre la respuesta inmune en conejos clasificó los conejos en cuatro grupos, de acuerdo a la fuerza de la respuesta. De una semana a la otra, lo conejos cambian la clasificación de un grupo a otro, de acuerdo a la siguiente matriz de transición

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & \frac{2}{7} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \end{array}$$

    a) ¿Qué proporción de conejos en el grupo 1 estarán en el grupo 1 cinco semanas después?

    b) En la primera semana, habían 9 conejos en el primer grupo, 4 en el segundo, y ninguno en tercero o cuarto grupo. ¿Cuántos ratones se esperan en cada grupo después de 4 semanas?

17. **Tendencia en las elecciones:** A finales de junio en las elecciones presidenciales, 40 % de los votantes se registraron como oficialista, 45 % como opositor, y 15 % como independientes. En un periodo de un mes, el 80 % de los oficialistas se mantuvieron como oficialista, mientras que el 15 % se cambio a opositor y el 5 % a independiente. El 70 % de los opositores se mantuvieron

como tal y el 20 % se cambiaron a oficialistas. El 60 % de los independientes se matuvieron como independientes y el restante se dividió en igual porcentaje. Asumiendo que esta tendencia continua.

- Escriba la matriz de transición de estados.
- Escriba el vector de probabilidades iniciales.
- Hallar el porcentaje de cada tipo de votante al final de cada uno de los siguientes meses: julio, agosto, septiembre, Octubre.

18. **Cadena de Ehrenfest:** El modelo para la cadena de Ehrenfest consiste en 2 cajas que contienen un total de n bolas , donde n es cualquier entero mayor o igual 2. En cada turno, una bola es seleccionada aleatoriamente desde una de las cajas y movida a la otra caja. Sea el estado de la cadena de Markov el número de bolas en la primera caja.

    a) Verifique de la probabilidad de ir del estado i al estado j está dada por

    $$p_{ij} = \begin{cases} \frac{i}{n}, & i \geq 1 \text{ y } j = i - 1; \\ 1 - \frac{i}{n}, & i \leq n - 1 \text{ y } j = i + 1; \\ 1, & i = 0 \text{ y } j = 1 \text{ o } i = n \text{ y } j = n - 1; \\ 0, & \text{Otro caso.} \end{cases}$$

    b) Verifique que la matriz de transición de estados está dada por

    $$\mathbf{P} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{n} & 0 & 1 - \frac{1}{n} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{2}{n} & 0 & 1 - \frac{2}{n} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

    c) Escriba la matriz de transición para el caso $n = 2$.

19. **Caminata aleatoria:** Muchos fenómenos pueden verse como ejemplos de una caminata aleatoria. Considere el siguiente ejemplo sencillo. Un guardia de seguridad puede pararse al frente de cualquiera de tres puertas de un edificio, y cada minuto el decide si se mueve a otra puerta seleccionada aleatoriamente. Si el esta en la puerta del medio, él tiene el mismo chance de quedarse donde esta, o moverse a la puerta de la derecha o a la de la izquierda. Si el esta en una de las puertas de las esquina el tiene el mismo chance de quedarse donde esta o moverse a la puerta del medio.

    a) Verifique que la matriz de transición de estados está dada por

    $$\mathbf{P} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} I & M & D \end{array} \\ \begin{array}{c} I \\ M \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

Respuestas

1. $P(X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 2) = 0$

2. $P(X_2 = 1, X_3 = 1/X_1 = 0) = 0{,}12$ y $P(X_1 = 1, X_2 = 1/X_0 = 0) = 0{,}12$

3. $P(X_0 = 1, X_1 = 0, X_2 = 2) = 0{,}03$

4. $P(X_1 = 1, X_2 = 1/X_0 = 0) = 0{,}02$ y $P(X_2 = 1, X_3 = 1/X_1 = 0) = 0{,}02$

5. $P(X_0 = 1, X_1 = 1, X_2 = 0) = 0{,}025$ y $P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0) = 0{,}0075$

6. $P(X_5 = 0, X_4 = 1, X_3 = 1, X_2 = 1|X_1 = 1) = (1-\alpha)\alpha^3$

7. $P(X_2 = 2) = 0{,}35$

8. $P(X_2 = 0) = 0{,}42$ Y $P(X_3 = 0) = 0{,}34$

9. Es una demostración. Observen que la matriz es doblemente estocástica y están premultiplicando por un vector igualmente probable.

10.
$$\mathbf{P} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\beta & \beta \\ \alpha & 1-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\beta & \beta \end{pmatrix} \end{array}$$

11. *a*)
$$\mathbf{P} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}48 & 0 & 0{,}52 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}48 & 0 & 0{,}52 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}48 & 0 & 0{,}52 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

   b) $P(X_2 = 4) = 0{,}2704$

   c) $P(X_3 = 4, X_2 = 3, X_1 = 2) = 0{,}2704$

   d) 0.5008

12. SR

13.
$$\mathbf{P} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} s & g & e & i & m \end{array} \\ \begin{array}{c} s \\ g \\ e \\ i \\ m \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}55 & 0{,}30 & 0{,}15 & 0 & 0 \\ 0{,}10 & 0{,}20 & 0{,}55 & 0{,}10 & 0{,}05 \\ 0 & 0{,}05 & 0{,}30 & 0{,}55 & 0{,}10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

14.
$$\mathbf{P} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

15. a)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} S_1 & S_2 & S_3 \end{array} \\ \mathbf{P} = \begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}85 & 0{,}05 & 0{,}10 \\ 0{,}50 & 0{,}10 & 0{,}40 \end{pmatrix} \end{array}$$

b) 81.6 % para el supermercado 1, 9.6 % para el 2 y 8.8 % para el 3

16. a) 0.1859

b) 2.34, 2.62, 3.47 y 4.56.

17. SR