Universidad de Los Andes
Facultad de Ciencias Económicas y Sociales
Escuela de Estadística
Procesos Estocásticos
Sección 01 - A-2016
Prof. Douglas Rivas

Guía de Estudio del Tema 3. Cadenas de Markov.

Matriz de transición de n pasos

Con la solución de esta guía se pretende que el estudiante

- Defina que es una cadena de Markov. Propiedad de Markov.
- Identifique procesos que sean Cadenas de Markov.
- Calcule la matriz de probabilidades de transición de n pasos.
- Calcule la probabilidad del estado del sistema en cualquier paso.
- Determine valores esperados asociados con una cadena de Markov.

El estudiante previamente debe tener conocimientos sobre

- Definición de un proceso estocástico, espacio paramétrico y espacio de estados.
- Operaciones sobre matrices (multiplicación)
- La formula de la esperanza matemática
- Regla multiplicativa de probabilidad y el teorema de probabilidad total
- Se les recomienda a los alumnos antes de resolver la guía tener claros los conceptos, las demostraciones y los ejemplos realizados en clase.

1. (Tomado del Karlin 3.2.1) Una cadena de Markov $\{X_n\}$ sobre los estados $0, 1, 2$ tiene matriz de probabilidad de transición

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}7 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}3 \end{pmatrix} \end{array}$$

   a) Calcule la matriz de transición de dos pasos $\mathbf{P}^2$.
   b) ¿Cuál es la $P(X_3 = 1/X_1 = 0)$? Rpta: **0.13**
   c) ¿Cuál es la $P(X_3 = 1/X_0 = 0)$? Rpta: **0.124**

2. (Tomado del Karlin 3.2.2) Una partícula se mueve a través de los estados $0, 1, 2$ de acuerdo a un proceso de Markov cuya matriz de probabilidad de transición es

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

   Sea X_n la posición de la partícula en el n-ésimo movimiento. Calcule $P(X_n = 0/X_0 = 0)$ para $n = 0, 1, 2, 3, 4$ Rpta: **n=0 es 1, n=1 es 0, n=2 es 0.5, n=3 es 0.25, n=4 es 3/8**

3. (Tomado del Karlin 3.2.3) Una cadena de Markov $\{X_n\}$ tiene matriz de probabilidad de transición

$$\begin{array}{c} \\ \mathbf{P} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix} \end{array}$$

Determine las probabilidades condicionales $P(X_3 = 1/X_0 = 0)$ y $P(X_4 = 1/X_0 = 0)$ Rpta: **0.264; 0.2540**

4. (Tomado del Karlin 3.2.5) Una cadena de Markov $X_0, X_1, ...$ tiene matriz de probabilidad de transición

$$\begin{array}{c} \\ \mathbf{P} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Determine $P(X_1 = 1/X_0 = 0)$, $P(X_2 = 1/X_1 = 0)$, $P(X_3 = 1/X_1 = 0)$, $P(X_2 = 1/X_0 = 0)$. Rpta: **0.1; 0.1; 0.27; 0.27**

5. (Tomado del Karlin Prob. 3.2.2) Considere el problema de enviar un mensaje binario, 0 o 1, a través de un canal de varias etapas, donde la transmisión a través de cada etapa esta sujeta a una probabilidad de error α fija. Sea X_0 la señal que es enviada y sea X_n la señal que es recibida en la etapa n. Suponga que X_n es una cadena de Markov con probabilidades de transición $P_{00} = P_{11} = 1-\alpha$ y $P_{01} = P_{10} = \alpha$, $(0 < \alpha < 1)$. Determine $P(X_5 = 0/X_0 = 0)$, la probabilidad de transmisión correcta a través de 5 etapas. Rpta: $(1-\alpha)[(1-\alpha)^4 + 5\alpha^2(1-\alpha)^2 + 5\alpha^4]$

6. (Tomado del Karlin Prob. 3.2.3) Sea X_n la calidad del n-ésimo item producido por un sistema de producción con $X_n = 0$ significando "bueno" y $X_n = 1$ significando "defectuoso". Suponga que X_n envuelve se envuelve como una cadena de Markov cuya matriz de probabilidad de transición es

$$\begin{array}{c} \\ \mathbf{P} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}99 & 0{,}01 \\ 0{,}12 & 0{,}88 \end{pmatrix} \end{array}$$

Cuál es la probabilidad de que el cuarto item sea defectuoso dado que el primer item es defectuoso?. Rpta: **0.6848**

7. Un sistema computacional puede operar en dos maneras diferentes. Cada hora, este permanece en el mismo modo o cambia e un modo diferente de a cuerdo a la matriz de probabilidades de transición

$$\begin{array}{c} \\ \mathbf{P} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix} \end{array}$$

   a) Calcular la matriz de transición de 2 pasos
   b) Si el sistema está en el modo I a las 5:30 p.m., ¿cuál es la probabilidad de que este en el modo I a las 8:30 p.m. del mismo día? 0.496

8. El patrón de días soleados y lluviosos sobre el planeta es una cadena de Markov homogénea con dos estados. Todo día soleado es seguido por otro día soleado con probabilidad 0.8. Todo día lluvioso es seguido por otro día lluvioso con probabilidad 0.6. Hoy es soleado. ¿cuál es la probabilidad de que pasado mañana sea lluvioso? Rpta:**0.28s**

9. Un agente comercial realiza su trabajo en tres ciudades A, B y C. Para evitar desplazamientos innecesarios está todo el día en la misma ciudad y allí pernocta, desplazándose a otra ciudad al día siguiente, si no tiene suficiente trabajo. Después de estar trabajando un día en C, la probabilidad de tener que seguir trabajando en ella al día siguiente es 0.4, la de tener que viajar a B es 0.4 y la de tener que ir a A es 0.2. Si el viajante duerme un día en B, con probabilidad de un 20 % tendrá que seguir trabajando en la misma ciudad al día siguiente, en el 60 % de los casos viajará a C, mientras que irá a A con probabilidad 0.2. Por último si el agente comercial trabaja todo un día en A, permanecerá en esa misma ciudad, al día siguiente, con una probabilidad 0.1, irá a B con una probabilidad de 0.3 y a C con una probabilidad de 0.6. Si hoy el viajante está en C, ¿cuál es la probabilidad de que también tenga que trabajar en C al cabo de cuatro días?

   a) Si hoy el viajante está en C, ¿cuál es la probabilidad de que también tenga que trabajar en C al cabo de cuatro días?

   b) ¿Cuáles son los porcentajes de días en los que el agente comercial está en cada una de las tres ciudades?

10. El departamento de estudios de mercado de una fabrica estima que el 20 % de la gente que compra un producto un mes no lo comprará al mes siguiente. Además, el 30 % de quienes no lo compran un mes lo adquirirá al mes siguiente. En una población de 1000 individuos, 100 compraron el producto el primer mes.

    a) ¿Cuántos lo comprarán el mes próximo? Rpta: **350 personas**

    b) ¿ y dentro de dos meses? Rpta:**475 personas**

11. En una población de 10.000 habitantes, 5.000 no fuman, 2.500 fuman uno o menos de un paquete y 2.500 fuman más de un paquete diario. En un mes hay un 5 % de posibilidad de que un no fumador comience a fumar un paquete diario o menos y un 2 % de que un no fumador pase a fumar más de un paquete diario. Para los que fuman un paquete o menos, hay un 10 % de posibilidad de que dejen el tabaco, y un 10 % de que pasen a fumar más de un paquete diario. Entre los que fuman mas de un paquete, hay un 5 % de posibilidad de que dejen el tabaco y un 10 % de que pasen a fumar un paquete o menos. ¿Cuántos individuos habrá de cada clase el próximo mes? Rpta: **5025, 2500, 2475**

12. Suponga que toda la industria de refresco produce dos colas: Coca Cola y Pepsi Cola. Cuando una persona ha comprado Coca Cola hay una probabilidad de 90 % de que siga comprándola la vez siguiente. Si una persona compró Pepsi, hay 80 % de que repita la vez siguiente. Se pide:

    a) Si una persona actualmente es comprador de Pepsi. ¿Cuál es la probabilidad de que compre Coca Cola pasadas dos compras a partir de hoy? Rpta: **0.34**

    b) Si en la actualidad una persona es comprador de Coca Cola. ¿Cuál es la probabilidad de que compre Coca Cola pasadas tres compras a partir de ahora? Rpta: **0.781**

    c) Supongamos que el 60 % de toda la gente toma hoy Coca Cola y el 40 % Pepsi. A tres compras a partir de ahora, ¿Qué fracción de los compradores estará tomando Coca Cola?. Rpta: **0.6438**