Universidad de Los Andes
Facultad de Ciencias Económicas y Sociales
Escuela de Estadística
Procesos Estocásticos
Sección 01
Prof. Douglas Rivas

Solución del Examen 1
22/02/2016

1. Dado un experimento con dos posibles valores ω_1, ω_2 cuyas respectivas probabilidades son p y q, definimos el proceso estocástico X_t cuyas realizaciones son $X_t(\omega_1) = \cos(\pi t)$ y $X_t(\omega_2) = t$. Hallar la Función de distribución del proceso en $t = 1/3$.

   Solución:

   El espacio muestral del experimento está dado por $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ y sabemos que $P(\omega_1) = p$ y $P(\omega_2) = q$. Ahora bien

   $$P[X_t(\omega_1) = \cos(\pi t)] = P(\omega_1) = p$$
   $$P[X_t(\omega_2) = t] = P(\omega_2) = q$$

   Para $t = 1/3$ se tiene que

   $$P[X_t(\omega_1) = \cos(\pi/3)] = P[X_t(\omega_1) = 1/2] = p$$
   $$P[X_t(\omega_2) = 1/3] = q$$

   Por lo tanto la Función de distribución es

   $$\boxed{F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1/3; \\ q, & \text{si } 1/3 \leq x < 1/2; \\ 1, & \text{si } x \geq 1/2. \end{cases}}$$

2. A partir de los procesos estocásticos X y Y, incorrelacionados y de media cero, con funciones de autocorrelación $R_X(t_1, t_2)$ y $R_Y(t_1, t_2)$ respectivamente. Formamos el proceso $Z_t = X_t + tY_t$. Hallar la función de autocorrelación.

   Solución:

   $$\begin{aligned} R_Z(t_1, t_2) &= E[Z_{t_1} Z_{t_2}] = E[(X_{t_1} + t_1 Y_{t_1})(X_{t_2} + t_2 Y_{t_2})] \\ &= E[X_{t_1} X_{t_2} + X_{t_1} t_2 Y_{t_2} + t_1 Y_{t_1} X_{t_2} + t_1 Y_{t_1} t_2 Y_{t_2}] \\ &= E[X_{t_1} X_{t_2}] + t_2 E[X_{t_1} Y_{t_2}] + t_1 E[Y_{t_1} X_{t_2}] + t_1 t_2 E[Y_{t_1} Y_{t_2}] \\ &= R_X(t_1, t_2) + 0 + 0 + t_1 t_2 R_Y(t_1, t_2) \\ &= R_X(t_1, t_2) + t_1 t_2 R_Y(t_1, t_2) \end{aligned}$$

Por lo tanto la función de de autocorrelación es

$$\boxed{R_Z(t_1,t_2) = R_X(t_1,t_2) + t_1 t_2 R_Y(t_1,t_2)}$$

3. A partir de una variable aleatoria A con distribución exponencial de parámetro λ, se define el proceso estocástico $X_t = Ae^{-At}$. Hallar la media del proceso estocástico.

   Solución:

$$\begin{aligned} E[X_t] &= \int_0^\infty ae^{-at}\lambda e^{-\lambda a}da = \lambda\int_0^\infty ae^{-a(t+\lambda)}da \\ &= \frac{\lambda}{\lambda+t}\int_0^\infty a(t+\lambda)e^{-a(t+\lambda)}da = \frac{\lambda}{\lambda+t}\frac{1}{\lambda+t} = \frac{\lambda}{(\lambda+t)^2} \end{aligned}$$

   Por lo tanto, la media del proceso estocástico es

$$\boxed{E[X_t] = \frac{\lambda}{(\lambda+t)^2}}$$

4. Dada la variable aleatoria $T \sim U(0,2)$ se define el proceso $X_t = \begin{cases} t/T, & 0 \le t \le T; \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$.
   Hallar la media de X_t

   Solución:

$$\begin{aligned} E[X_t] &= E[t/T] = \int_t^2 \frac{t}{T}\frac{1}{2}dT = \frac{t}{2}\int_t^2 \frac{1}{T}dT = \frac{t}{2}\ln|T|\Big|_t^2 \\ &= \frac{t}{2}[\ln|2| - \ln|t|] = \frac{t}{2}\ln|2/T| \end{aligned}$$

   Por lo tanto la media de X_t es

$$\boxed{E[X_t] = \frac{t}{2}\ln|2/T|}$$

5. Consideremos el proceso estocástico $X_t = A\cos(2t) + B\sin(2t)$ donde A y B son variables aleatorias incorrelacionadas, ambas con media 0 y varianza σ^2 pero con diferente distribución.

   a) ¿Qué variables aleatorias son X_0 y y $X_{\pi/4}$?. Sabiendo que un proceso estocástico es estacionario en sentido estricto si cualesquiera dos variables aleatoria tienen la misma distribución. ¿Es X_t estacionario en sentido estricto?

b) Calcule $E(X_t)$

c) Calcule $R_X(t, t+\tau)$. ¿Es X_t estacionario débil.

Solución:

a) ¿Qué variables aleatorias son X_0 y y $X_{\pi/4}$?. Sabiendo que un proceso estocástico es estacionario en sentido estricto si cualesquiera dos variables aleatoria tienen la misma distribución. ¿Es X_t estacionario en sentido estricto?

$X(0) = A\cos(0) + B\sin(0) = A$

$X(2\pi/4) = A\cos(\pi/4) + B\sin(2\pi/4) = B$

Como A y B son variables aleatorias con distribuciones distintas entonces no es estacionario en sentido estricto.

b) Calcule $E(X_t)$

$$E[X_t] = E[A\cos(2t) + B\sin(2t)] = E[A]\cos(2t) + E[B]\sin(2t) = 0$$

Entonces $\boxed{E[X_t] = 0}$

c) Calcule $R_X(t, t+\tau)$. ¿Es X_t estacionario débil.

$$\begin{aligned}
R_X(t, t+\tau) &= E[X_t X_{t+\tau}] = E[(A\cos(2t) + B\sin(2t))(A\cos(2(t+\tau)) + B\sin(2(t+\tau)))] \\
&= E[A^2\cos(2t)\cos(2(t+\tau)) + AB\cos(2t)\sin(2(t+\tau)) + \\
&\quad AB\sin(2t)\cos(2(t+\tau)) + B^2\sin(2t)\sin(2(t+\tau))] \\
&= E[A^2]\cos(2t)\cos(2(t+\tau)) + E[A]E[B]\cos(2t)\sin(2(t+\tau)) + \\
&\quad E[A]E[B]\sin(2t)\cos(2(t+\tau)) + E[B^2]\sin(2t)\sin(2(t+\tau)) \\
&= [Var(A) + [E(A)]^2]\cos(2t)\cos(2(t+\tau)) + 0 + 0 + \\
&\quad [Var(B) + [E(B)]^2]\sin(2t)\sin(2(t+\tau)) \\
&= \sigma^2\cos(2t)A\cos(2(t+\tau)) + \sigma^2\sin(2t)\sin(2(t+\tau)) \\
&= \sigma^2[\cos(2t)\cos(2(t+\tau)) + \sin(2t)\sin(2(t+\tau))] \\
&= \sigma^2 cos(2t + 2\tau - 2t) = \sigma^2 cos(2\tau)
\end{aligned}$$

ya que $\cos(A - B) = \cos(A)\cos(B) + \sin(a)\sin(B)$

Por lo tanto

$$\boxed{R_X(t, t+\tau) = \sigma^2 cos(2\tau)}$$

El proceso si es estacionario débil ya que $E[X_t] = 0$ y $R_X(t, t+\tau)$ depende sólo de τ.

6. Sea X_t, $t > 0$ un proceso estocástico estacionario con media cero y función de autocorrelación $R_X(t, t+\tau) = e^{-|\tau|}$ y sea B una variable aleatoria normal con media cero y varianza σ^2 e independiente del proceso X_t. Sea $Y_t = aX_t + Bt$, $t > 0$, a constante, $a \neq 0$. Hallar $E(Y_t)$ y $R_Y(t, t+\tau)$. ¿Es Y_t estacionario débil?

   Solución:

$$E[Y_t] = E[aX_t + Bt] = aE[X_t] + tE[B] = a(0) + t(0) = 0$$

   Por lo tanto, $\boxed{E[Y_t] = 0}$

$$\begin{aligned}
R_Y(t, t+\tau) &= E[Y_tY_{t+\tau}] = E[(aX_t + Bt)(aX_{t+\tau} + B(t+\tau))] \\
&= E[a^2X_tX_{t+\tau} + a(t+\tau)X_tB + BtaX_{t+\tau} + BtB(t+\tau)] \\
&= a^2E[X_tX_{t+\tau}] + a(t+\tau)E[X_tB] + taE[BX_{t+\tau}] + t(t+\tau)E(B^2) \\
&= a^2R_X(t, t+\tau) + a(t+\tau)E[X_t]E[B] + taE[B]E[X_{t+\tau}] + t(t+\tau)[Var[B] + [E(B)]^2] \\
&= a^2e^{-\tau} + a(t+\tau)(0)(0) + at(0)(0) + t(t+\tau)[\sigma^2 + 0^2] \\
&= a^2e^{-\tau} + t(t+\tau)\sigma^2
\end{aligned}$$

   Por lo tanto,

$$\boxed{R_X(t, t+\tau) = a^2e^{-\tau} + t(t+\tau)\sigma^2}$$

El proceso no es estacionario débil porque aunque la media es constante $E[Y_t] = 0$ la autocorrelación depende de t.