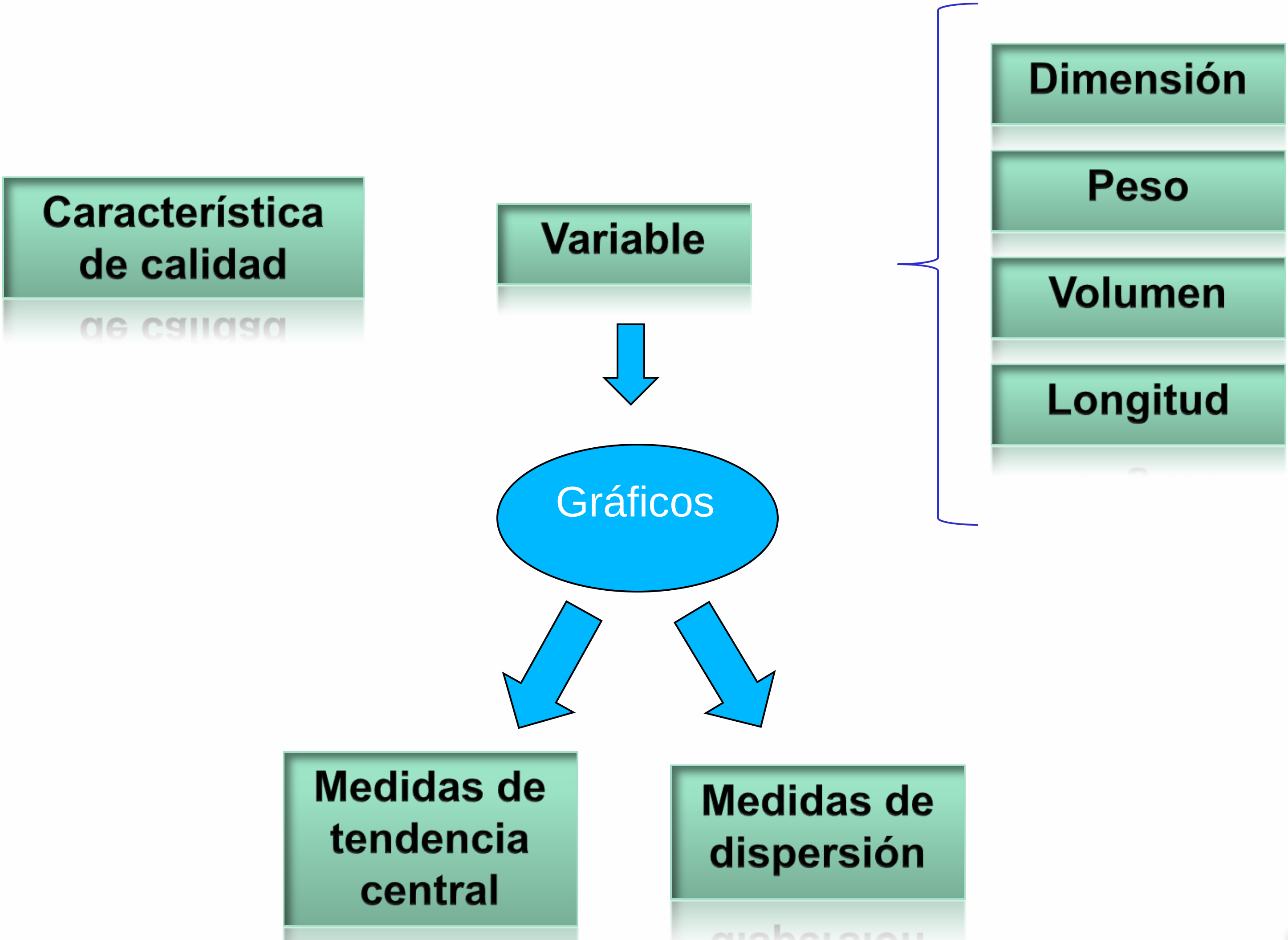
Tema 4. Gráficos de control para variables

Gráficos de control para variables



Gráficos de control para variables

Gráfico de control para variables

- Gráfico $\overline{X}$
- Gráfico R
- Gráfico S
- CUSUM
- EWMA

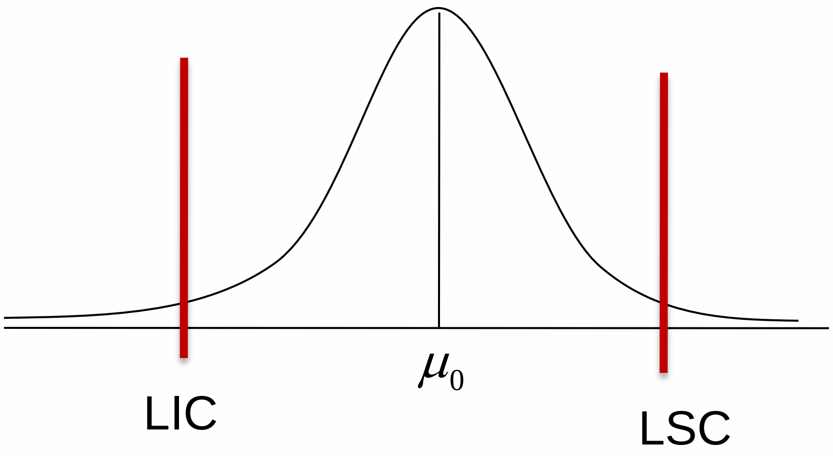
Gráficos de control para variables

Un proceso se considera estable

Cuando la media del proceso sea igual a la media de las especificaciones

Cuando la desviación estándar del proceso sea igual a la desviación estándar de las especificaciones

Gráficos de control para variables



Gráficos de control para variables

Gráficos de control para la media y el rango

Gráfico de control para la media $\left(\bar{X}\right)$

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una m.a. de una determinada característica de calidad

Si $X_i \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$ entonces $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

Si la población no es normal pero el tamaño de muestra es grande, podemos asumir que la distribución de la media muestral es aproximadamente normal

Gráficos de control la media

La media y la varianza poblacional son conocidas

$$LSC = \mu + 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu + A\sigma$$

$$LC = \mu$$

$$LIC = \mu - 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu - A\sigma$$

Límites de control 3 sigma

$$LSC = \mu + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$LC = \mu$$

$$LIC = \mu - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Límites de control probabilísticos

Gráficos de control la media

La media y la varianza poblacional son desconocidas

Muestra	n_i	Valores observados	$\overline{X}_i$
1	n	$X_{11}, X_{12}, X_{13}, \ldots X_{1n}$	$\overline{X}_1$
2	n	$X_{21}, X_{22}, X_{23}, \ldots X_{2n}$	$\overline{X}_2$
. . .			
m	n	$X_{m1}, X_{m2}, X_{m3}, \ldots X_{mn}$	$\overline{X}_m$
			$\overline{\overline{X}}$

$$\overline{\overline{X}} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \overline{X}_i}{m} \qquad E\left(\overline{\overline{X}}\right) = \mu$$

Gráficos de control de la media

La media y la varianza poblacional son desconocidas

Estimación de la varianza

- Basada en las amplitudes o rangos muestrales
- Basada en las desviaciones estándar muestrales

Gráficos de control de la media

Basada en las amplitudes o rangos muestrales

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una m.a.

$$R = X_{(n)} - X_{(1)}$$

Si $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

Amplitud relativa: $W = \dfrac{R}{\sigma}$

Tiene distribución conocida cuyos parámetros son

$$d_2 = \mu_W = \text{media de W}$$
$$d_3 = \sigma_W = \text{desviación estándar de W}$$

Gráficos de control de la media

Basada en las amplitudes o rangos muestrales

Muestra	n_i	Valores observados	R_i
1	n	$X_{11}, X_{12}, X_{13}, \ldots X_{1n}$	R_1
2	n	$X_{21}, X_{22}, X_{23}, \ldots X_{2n}$	R_2
. . .			
m	n	$X_{m1}, X_{m2}, X_{m3}, \ldots X_{mn}$	R_m
			$\overline{R}$

$$\overline{R} = \frac{\sum_{i=1}^{m} R_i}{m}$$

Gráficos de control de la media

Basada en las amplitudes o rangos muestrales

Como

$$W = \frac{R}{\sigma}$$

Aplicando esperanza

$$E(W) = E\left(\frac{R}{\sigma}\right) = \frac{E(R)}{\sigma}$$

despejando

$$\sigma = \frac{E(R)}{E(W)} = \frac{E(R)}{d_2}$$

Estimador

$$\hat{\sigma} = \frac{\hat{E}(R)}{d_2} = \frac{\overline{R}}{d_2} \quad \Rightarrow \quad \hat{\sigma}_{\overline{X}} = \frac{\overline{R}}{d_2\sqrt{n}}$$

Gráficos de control la media

La media y la varianza poblacional son desconocidas

$$LSC = \hat{\mu} + 3\sigma_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} + \frac{3}{d_2\sqrt{n}}\bar{R} = \bar{\bar{X}} + A_2\bar{R}$$

$$LC = \hat{\mu} = \bar{\bar{X}}$$

$$LIC = \hat{\mu} - 3\sigma_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} - \frac{3}{d_2\sqrt{n}}\bar{R} = \bar{\bar{X}} - A_2\bar{R}$$

Límites de control 3 sigma

$$LSC = \bar{\bar{X}} + \frac{Z_{\alpha/2}}{d_2\sqrt{n}}\bar{R}$$

$$LC = \bar{\bar{X}}$$

$$LIC = \bar{\bar{X}} - \frac{Z_{\alpha/2}}{d_2\sqrt{n}}\bar{R}$$

Límites de control probabilísticos

Gráficos de control la media

La media y la varianza poblacional son desconocidas

Este método de estimación es bueno para muestras pequeñas

n	Eficiencia relativa
2	1,000
3	0,992
4	0,975
5	0,955
6	0,930
10	0,850

Función Característica de Operación

$$
\begin{aligned}
\beta &= P(LIC < \overline{X} < LSC / \mu_1) \\
&= P(\overline{X} < LSC / \mu_1) - P(\overline{X} \leq LIC / \mu_1) \\
&= P\left(\frac{\overline{X} - \mu_1}{\sigma / \sqrt{n}} < \frac{LSC - \mu_1}{\sigma / \sqrt{n}} \right) - P\left(\frac{\overline{X} - \mu_1}{\sigma / \sqrt{n}} < \frac{LIC - \mu_1}{\sigma / \sqrt{n}} \right) \\
&= \phi\left(\frac{LSC - \mu_1}{\sigma / \sqrt{n}} \right) - \phi\left(\frac{LIC - \mu_1}{\sigma / \sqrt{n}} \right)
\end{aligned}
$$

Función Característica de Operación

Sustituyendo LSC, LIC y μ_1 por sus respectivas expresiones

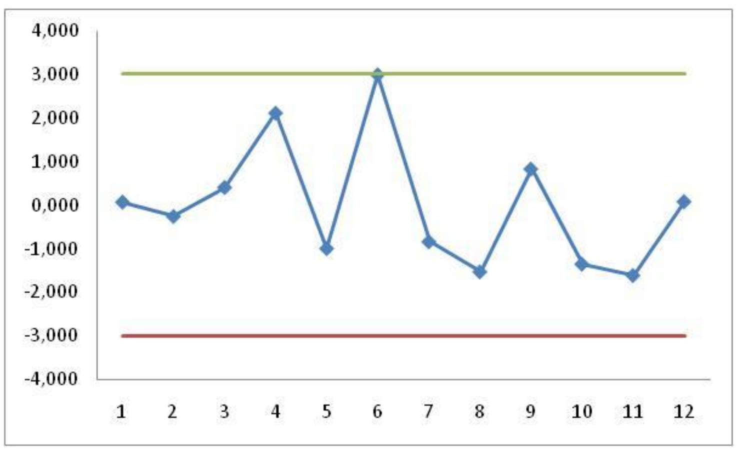
$$\beta = \phi\left(\frac{\mu_0 + k\left(\sigma/\sqrt{n}\right) - \mu_0 - \delta\sigma}{\sigma/\sqrt{n}}\right) - \phi\left(\frac{\mu_0 - k\left(\sigma/\sqrt{n}\right) - \mu_0 - \delta\sigma}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

$$= \phi\left(\frac{k\left(\sigma/\sqrt{n}\right) - \delta\sigma}{\sigma/\sqrt{n}}\right) - \phi\left(\frac{-k\left(\sigma/\sqrt{n}\right) - \delta\sigma}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

$$= \phi\left(k - \delta\sqrt{n}\right) - \phi\left(-k - \delta\sqrt{n}\right)$$

Gráfico de control para R

Como R se usa para estimar a σ cuando n es pequeño, entonces la variabilidad de un proceso puede ser controlada usando el Rango.



Media de R

Varianza de R

Estimadores

Gráfico de control para R

Media de R

$$W = \frac{R}{\sigma} \quad \Rightarrow \quad R = \sigma W$$

$$\mu_R = E(R) = E(\sigma W) = \sigma E(W) = \sigma d_2$$

Varianza de R

$$\sigma_R^2 = V(R) = V(\sigma W) = \sigma^2 V(W) = \sigma^2 d_3^2$$

$$\sigma_R = \sigma d_3$$

Gráfico de control para R

Con σ conocido

$$LSC = \sigma d_2 + 3\sigma d_3 = \sigma\left(d_2 + 3d_3\right) = \sigma D_2$$
$$LC = \sigma d_2$$
$$LIC = \sigma d_2 - 3\sigma d_3 = \sigma\left(d_2 - 3d_3\right) = \sigma D_1$$

Con σ desconocido

Debemos estimar la media y la desviación estándar de R, es decir debemos estimar

$$\mu_R = E\left(R\right) = \sigma d_2 \quad \Rightarrow \quad \hat{\mu}_R = \hat{E}\left(R\right) = \hat{\sigma} d_2 = \frac{\overline{R}}{d_2} d_2 = \overline{R}$$

$$\sigma_R = \sigma d_3 \quad \Rightarrow \quad \hat{\sigma}_R = \hat{\sigma} d_3 = \frac{\overline{R}}{d_2} d_3$$

Gráfico de control para R

Con σ desconocido

$$LSC = \hat{E}(R) + 3\hat{\sigma}_R = \overline{R} + 3\frac{\overline{R}}{d_2}d_3 = \overline{R}\left(1 + 3\frac{d_3}{d_2}\right) = \overline{R}D_4$$

$$LC = \hat{E}(R) = \overline{R}$$

$$LIC = \hat{E}(R) - 3\hat{\sigma}_R = \overline{R} - 3\frac{\overline{R}}{d_2}d_3 = \overline{R}\left(1 - 3\frac{d_3}{d_2}\right) = \overline{R}D_3$$

Límites 3 sigma

Gráfico de control para R

Con σ desconocido

Límites probabilísticos

$$W = \frac{R}{\sigma} \sim W(n)$$

$$1-\alpha = P\left(W_{\alpha/2}(n) \le W \le W_{1-\alpha/2}(n)\right) = P\left(W_{\alpha/2}(n) \le \frac{R}{\sigma} \le W_{1-\alpha/2}(n)\right)$$

$$= P\left(W_{\alpha/2}(n)\sigma \le R \le W_{1-\alpha/2}(n)\sigma\right) = P\left(W_{\alpha/2}(n)\frac{\overline{R}}{d_2} \le R \le W_{1-\alpha/2}(n)\frac{\overline{R}}{d_2}\right)$$

Haciendo $D_{\alpha/2}(n) = W_{\alpha/2}(n)\frac{1}{d_2}$ y $D_{1-\alpha/2}(n) = W_{1-\alpha/2}(n)\frac{1}{d_2}$

$$P\left(D_{\alpha/2}(n)\overline{R} \le R \le D_{1-\alpha/2}(n)\overline{R}\right) = 1-\alpha$$

Gráfico de control para R

Con σ desconocido

Límites probabilísticos

$$LSC = D_{1-\alpha/2}(n)\overline{R}$$

$$LC = \overline{R}$$

$$LIC = D_{\alpha/2}(n)\overline{R}$$

Gráfico de control para R

Comentario

Gráfico R

Gráfico de la media

Ejemplo

Unas piezas manufacturadas por un proceso de moldeo de inyección, se somete a una prueba de resistencia a la compresión. Se colectan 20 muestras de 5 partes cada una, y las resistencias a la compresión (en psi) se presentan en la tabla siguiente

Ejemplo

Muestra	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	$\bar{X}_i$	R_i
1	83	81,2	78,7	75,7	77	79,12	7,3
2	88,6	78,3	78,8	71	84,2		
3	85,7	75,8	84,3	75,2	81		
4	80,8	74,4	82,5	74,1	75,7		
5	83,4	78,4	82,6	78,2	78,9		
6	75,3	79,9	87,3	89,7	81,8		
7	74,5	78	80,8	73,4	79,7		
8	79,2	84,8	81,5	86	74,5		
9	80,4	86,1	76,2	84,1	80,2		
10	75,7	75,2	71,1	82,1	74,3		
11	80	81,5	78,4	73,8	78,1		
12	80,6	81,8	79,3	73,8	81,7		
13	82,7	81,3	79,1	82	79,5		
14	79,2	74,9	78,6	77,7	75,3		
15	85,5	82,1	82,8	73,4	71,7		
16	78,8	79,6	80,2	79,1	80,8		
17	82,1	78,2	75,5	78,2	82,1		
18	84,5	76,9	83,5	81,2	79,2		
19	79	77,8	81,2	54,4	81,6		
20	84,5	73,1	78,6	78,7	80,6		

$$\bar{X}_1 = \frac{83+81{,}2+78{,}7+75{,}7+77}{5}$$
$$= 79{,}12$$

$$R_1 = 83 - 75{,}7 = 7{,}3$$

$$S_1^2 = \sqrt{\frac{83^3+\ldots+77^2-79{,}12^2}{5-1}}$$
$$= 2{,}98948$$

Ejemplo

Muestra	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	$\bar{X}_i$	R_i	S_i
1	83	81,2	78,7	75,7	77	79,12	7,3	2,98948
2	88,6	78,3	78,8	71	84,2	80,18	17,6	6,64771
3	85,7	75,8	84,3	75,2	81	80,4	10,5	4,79218
4	80,8	74,4	82,5	74,1	75,7	77,5	8,4	3,88265
5	83,4	78,4	82,6	78,2	78,9	80,3	5,2	2,49399
6	75,3	79,9	87,3	89,7	81,8	82,8	14,4	5,77754
7	74,5	78	80,8	73,4	79,7	77,28	7,4	3,22289
8	79,2	84,8	81,5	86	74,5	81,2	11,5	4,60923
9	80,4	86,1	76,2	84,1	80,2	81,4	9,9	3,83601
10	75,7	75,2	71,1	82,1	74,3	75,68	11	4,01024
11	80	81,5	78,4	73,8	78,1	78,36	7,7	2,89016
12	80,6	81,8	79,3	73,8	81,7	79,44	8	3,31104
13	82,7	81,3	79,1	82	79,5	80,92	3,6	1,56589
14	79,2	74,9	78,6	77,7	75,3	77,14	4,3	1,94242
15	85,5	82,1	82,8	73,4	71,7	79,1	13,8	6,14207
16	78,8	79,6	80,2	79,1	80,8	79,7	2	0,81240
17	82,1	78,2	75,5	78,2	82,1	79,22	6,6	2,85079
18	84,5	76,9	83,5	81,2	79,2	81,06	7,6	3,10532
19	79	77,8	81,2	54,4	81,6	74,8	27,2	11,51086
20	84,5	73,1	78,6	78,7	80,6	79,1	11,4	4,11764

Ejemplo

Límites de control para R

Como σ es desconocido

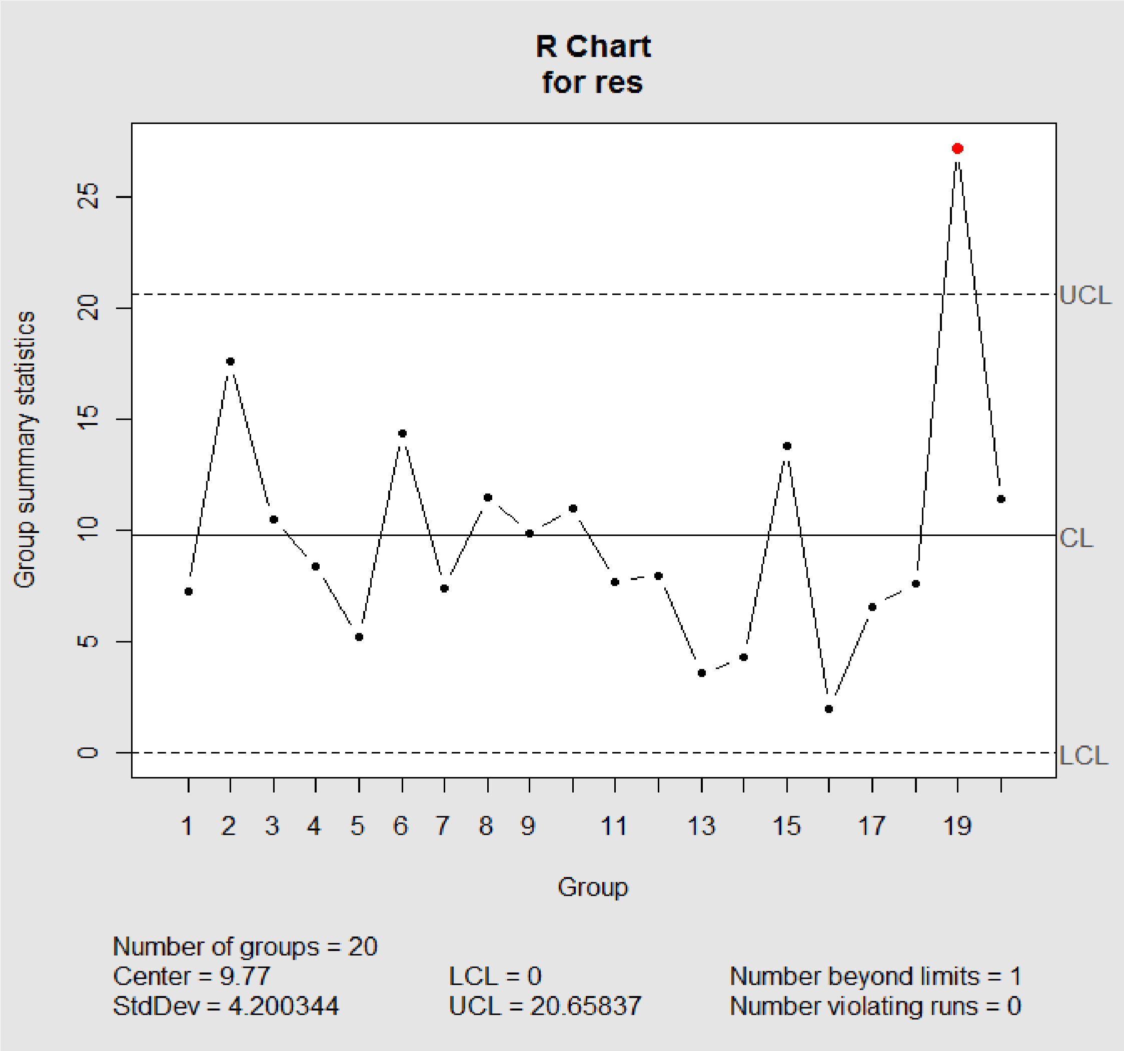
$$LSC = \overline{R}D_4$$
$$LC = \overline{R}$$
$$LIC = \overline{R}D_3$$

De donde $\overline{R} = 9{,}77; D_3 =$

Por lo tanto,

$$LSC = \overline{R}D_4 = 9{,}77* =$$
$$LC = \overline{R} = 9{,}77$$
$$LIC = \overline{R}D_3 = 9{,}77* =$$

Ejemplo


R Chart
for res
Group summary statistics
0
5
10
15
20
25
UCL
CL
LCL
1
2
3
4
5
6
7
8
9
11
13
15
17
19
Group
Number of groups = 20
Center = 9.77
StdDev = 4.200344
LCL = 0
UCL = 20.65837
Number beyond limits = 1
Number violating runs = 0

Ejemplo

Límites de control para la media

Como σ es desconocido

$$LSC = \overline{\overline{X}} + A_2\overline{R}$$

$$LC = \overline{\overline{X}}$$

$$LIC = \overline{\overline{X}} - A_2\overline{R}$$

De donde

$$\overline{\overline{X}} = 79{,}235; \overline{R} = 9{,}77; A_2 =$$

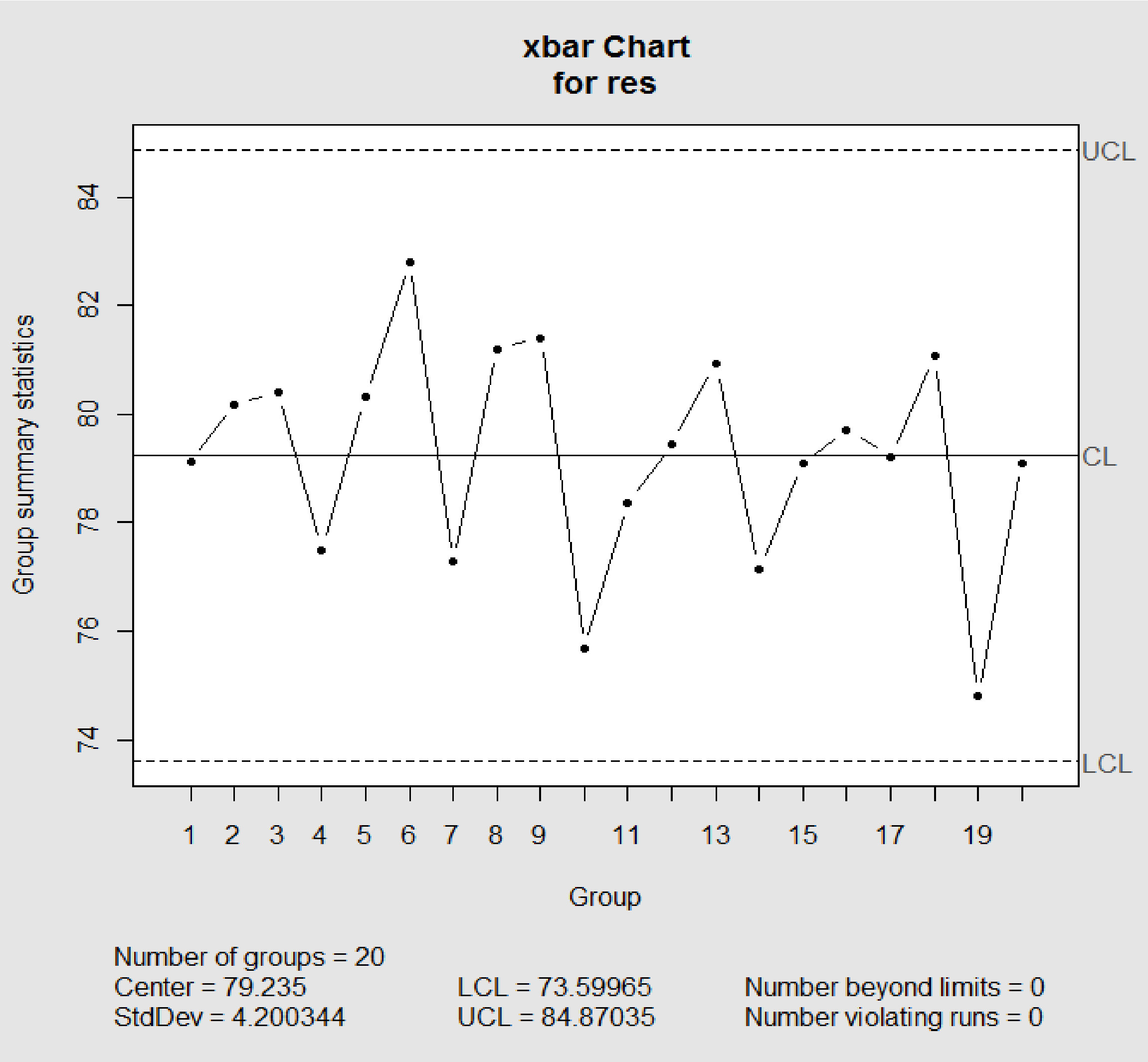
Por lo tanto,

$$LSC = \overline{\overline{X}} + A_2\overline{R} = 79{,}235 + A * 9{,}77 =$$

$$LC = \overline{\overline{X}} = 79{,}235$$

$$LIC = \overline{\overline{X}} - A_2\overline{R} = 79{,}235 - A * 9{,}77 =$$

Ejemplo


xbar Chart
for res
Group summary statistics
84
82
80
78
76
74
UCL
CL
LCL
1 2 3 4 5 6 7 8 9 11 13 15 17 19
Group
Number of groups = 20
Center = 79.235
StdDev = 4.200344
LCL = 73.59965
UCL = 84.87035
Number beyond limits = 0
Number violating runs = 0

Gráficos de control para variables

Gráficos de control para la media y S

Para n < 10

Gráfico para $\overline{X}$

Gráfico para S

Estimar la desviación estándar

Rango muestral

Para n > 10

Desviación estándar muestral

Gráficos de control para la media y S

Distribución de la media

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Distribución de S

Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\Rightarrow$ $Y = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$

$$E(Y) = n-1$$

$$Var(Y) = 2(n-1)$$

Despejando S^2 $\Rightarrow$ $S^2 = \frac{Y\sigma^2}{(n-1)}$

$$E(S^2) = \sigma^2$$

Aplicando raíz cuadrada $\Rightarrow$ $S = \sqrt{\frac{Y}{(n-1)}}\sigma$

$$E(S) = \sqrt{\frac{2}{n-1}}\frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma\left[\left.(n-1)\middle/2\right.\right]}\sigma = C_4\sigma$$

$$Var(S) = \sigma^2(1-C_4^2)$$

Gráficos de control la media

La media y la varianza poblacional son conocidas

$$LSC = \mu + 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu + A\sigma$$

$$LC = \mu$$

$$LIC = \mu - 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu - A\sigma$$

Límites de control 3 sigma

$$LSC = \mu + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$LC = \mu$$

$$LIC = \mu - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Límites de control probabilísticos

Gráficos de control la media

La media y la varianza poblacional son conocidas

$$LSC = \mu + 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu + A\sigma$$

$$LC = \mu$$

$$LIC = \mu - 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu - A\sigma$$

Límites de control 3 sigma

$$LSC = \mu + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$LC = \mu$$

$$LIC = \mu - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Límites de control probabilísticos

Gráficos de control para S

La media y la varianza poblacional son conocidas

$$LSC = C_4\sigma + 3\sigma\sqrt{1-C_4^2} = \sigma\left(C_4 + 3\sqrt{1-C_4^2}\right) = B_6\sigma$$

$$LC = C_4\sigma$$

$$LIC = C_4\sigma - 3\sigma\sqrt{1-C_4^2} = \sigma\left(C_4 - 3\sqrt{1-C_4^2}\right) = B_5\sigma$$

Gráficos de control para S

La media y la varianza poblacional son conocidas

$$LSC = C_4\sigma + 3\sigma\sqrt{1-C_4^2} = \sigma\left(C_4 + 3\sqrt{1-C_4^2}\right) = B_6\sigma$$

$$LC = C_4\sigma$$

$$LIC = C_4\sigma - 3\sigma\sqrt{1-C_4^2} = \sigma\left(C_4 - 3\sqrt{1-C_4^2}\right) = B_5\sigma$$

Gráficos de control para la media y S

La media y la varianza poblacional son desconocidas

Recordemos que los límites de control para la media y para S se pueden escribir como

$$LSC = E(\overline{X}) + 3Var(\overline{X}) = \mu + 3\sigma_{\overline{X}}$$
$$LC = E(\overline{X})$$
$$LIC = E(\overline{X}) - 3Var(\overline{X}) = \mu - 3\sigma_{\overline{X}}$$

$$LSC = E(S) + 3\sqrt{Var(S)} = E(S) + 3\sigma_S$$
$$LC = E(S)$$
$$LIC = E(S) - 3\sqrt{Var(S)} = E(S) - 3\sigma_S$$