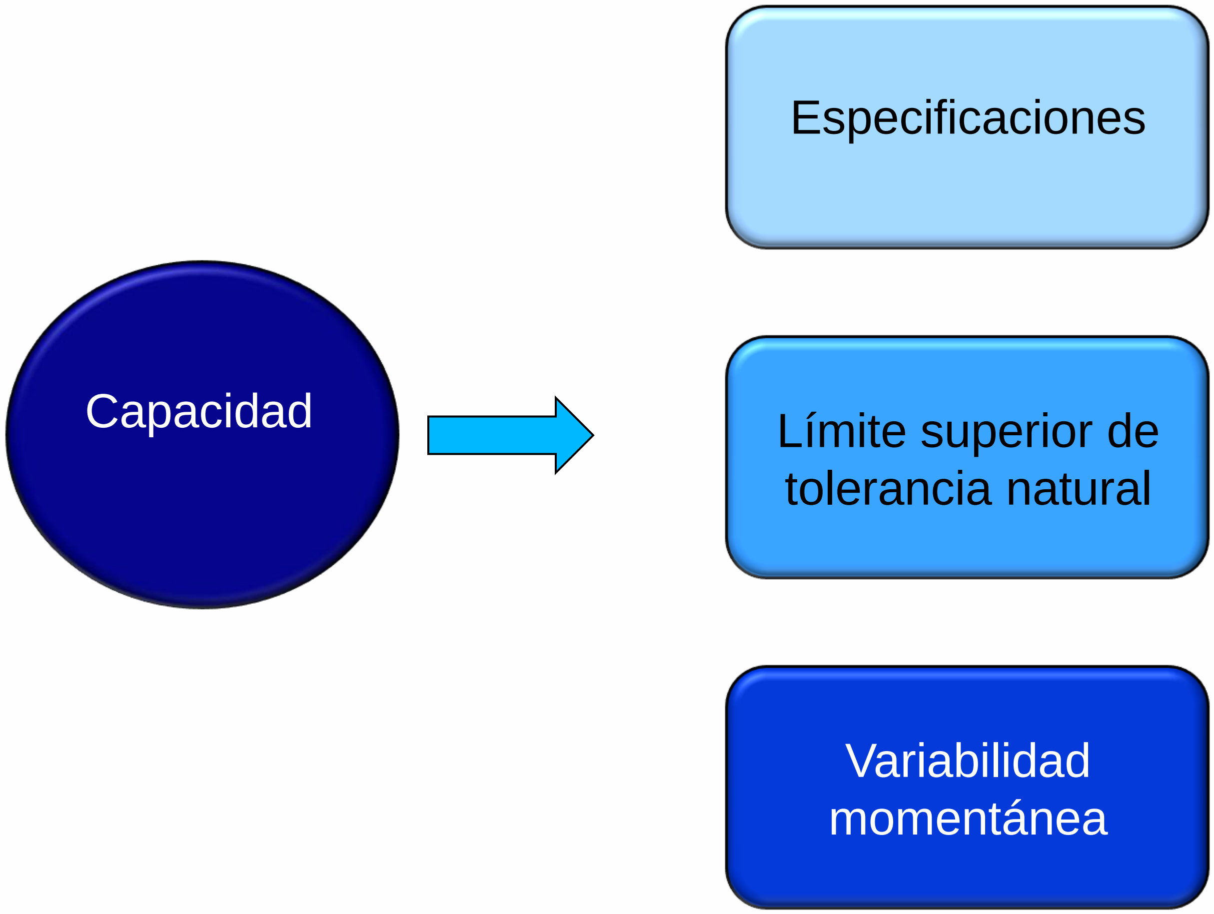
Capítulo 5. Capacidad de un proceso

Tema 1


Capacidad
Especificaciones
Límite superior de tolerancia natural
Variabilidad momentánea

Especificaciones

Definición

Patrón de comparación que forma parte de una norma técnica

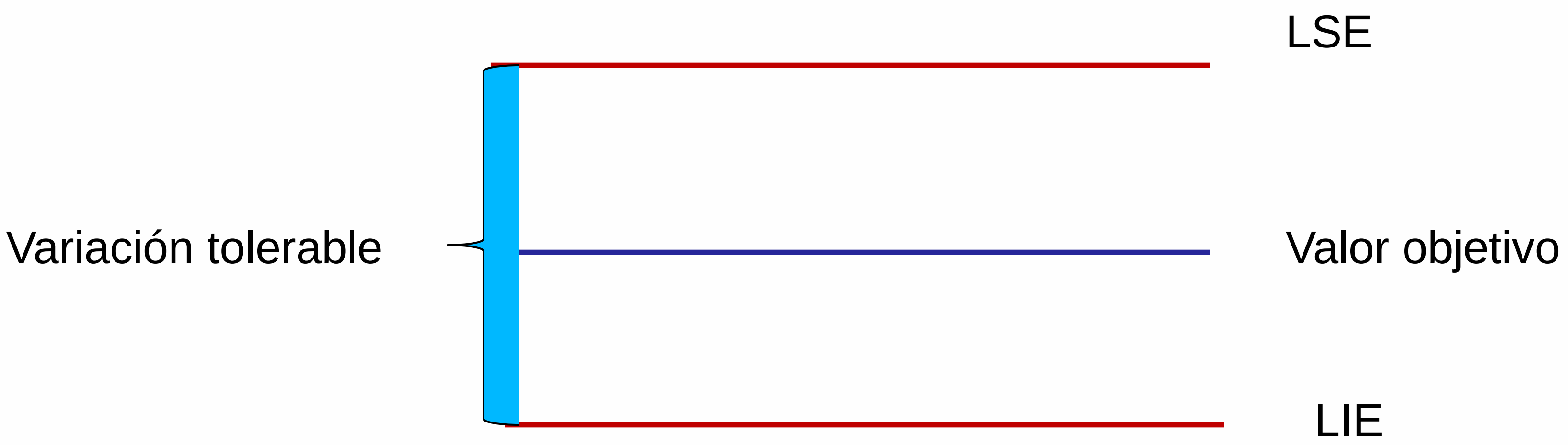
Objetivo

Da una referencia que nos permite calificar a un producto como conforme o no conforme

Las especificaciones, en un proceso de producción, se presentan como límites de especificación, de tal manera que si un producto cae fuera de dichos límites, se considera como un producto no conforme.

Límites de especificación

Límites de Especificación de un producto



Límites de Tolerancia Natural

Definición

El límite superior de tolerancia natural (LSTN) se define como la media más tres desviaciones estándar del proceso. El límite inferior de tolerancia natural (LITN) se define como la media menos tres desviaciones estándar del proceso.

Al intervalo comprendido entre los dos LTN (LSTN-LITN=6σ) se le define como ***Variación Natural.***

Para una característica de calidad con distribución normal, dentro de esta tolerancia natural, se perea que se encuentre el 99,73% de la producción.

Variabilidad Momentánea y en el tiempo

Momentanea

Está representada por la desviación estándar cuando es calculada a partir de la variabilidad interna o dentro de cada muestra. (Variabilidad a corto plazo)

$$\hat{\sigma} = \frac{\overline{R}}{d_2} \qquad \hat{\sigma} = \frac{\overline{S}}{C_4}$$

En el tiempo

Está representada por la desviación estándar cuando es calculada a prtir de l;a variabilidad tanto dentro de las muestras como entre muestras. (Variabilidad a largo plazo).

$$\hat{\sigma} = \left[\frac{\sum_{ij} \left(X_{ij} - \overline{\overline{X}} \right)^2}{nm - 1} \right]^{1/2}$$

Capacidad del proceso

Proceso bajo control → Capacidad del proceso

Es el estudio que se hace para determinar el desempeño del proceso, con referencia o de acuerdo a las especificaciones establecidas.

Capacidad del proceso

Proceso bajo control

Número elevado de artículos que no están cumpliendo las especificaciones

Capacidad baja

Número bajo de artículos que no están cumpliendo las especificaciones

Capacidad alta

La capacidad es un indicador de la proporción de artículos que se están produciendo fuera de las especificaciones

Capacidad del proceso

Enfoques

Conociendo la distribución de la característica de calidad y estimando los parámetros, se puede usar la proporción de artículos que no cumplen con las especificaciones como una medida de la capacidad del proceso. Si los límites de especificación no son conocidos se usan los límites de tolerancia natural

Utilizando algunos indicadores de capacidad, que han sido definidos especialmente para ese propósito

Capacidad usando la proporción de artículos produccidos fuera de los límites

La proporción de artículos que no cumplen con las especificaciones esta dada por:

$$p = p(X < LIE) + P(X > LSE)$$

Suponiendo que la característica de calidad se distribuye $N(\mu, \sigma^2)$

$$p = p\left(Z < \frac{LIE - \mu}{\sigma}\right) + P\left(X > \frac{LSE - \mu}{\sigma}\right)$$

Donde μ y σ son por lo general desconocidos, entonces hay que estimarlos.

Estimación de μ y σ

Capacidad usando la proporción de artículos produccidos fuera de los límites

Estimación de μ y σ

Gráficos de Control

Histograma

Diagrama de probabilidades

Usando Gráficos de Control

Al hallar los gráficos de control para la media y el rango se obtuvo que

$$\hat{\mu} = \overline{\overline{X}} \qquad \hat{\sigma} = \frac{\overline{R}}{d_2}$$

Al hallar los gráficos de control para la media y la desviación estándar se obtuvo que

$$\hat{\mu} = \overline{\overline{X}} \qquad \hat{\sigma} = \frac{\overline{S}}{C_4}$$

Capacidad usando indicadores

Constituyen una forma simple y práctica para indicar la capacidad de un proceso.

- Indicadores
  - Variables
    - C_P
    - C_{PK}
    - C_{Pm}
    - P_P y P_{Pk}
    - K
  - Atributos
    - ppm
    - DPU
    - DPO

Indicadores para variables

C_P

Se define como el cociente entre la variación tolerable y la variación natural

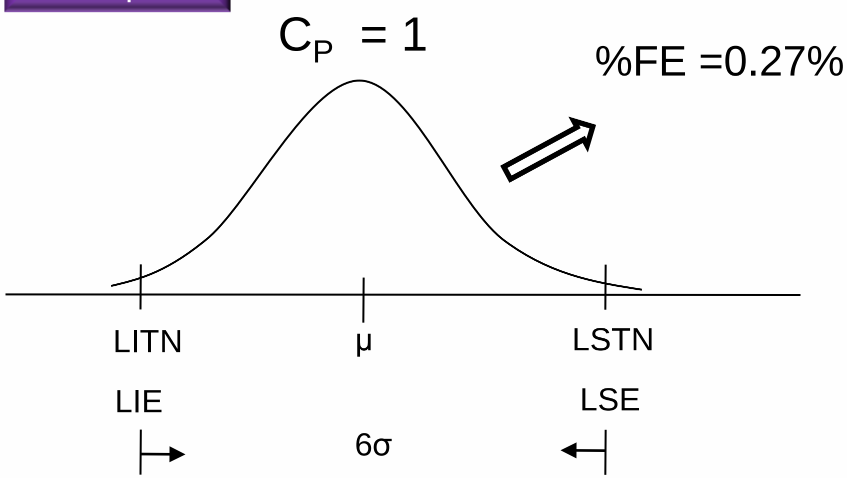
$$C_P = \frac{Variación\ tolerable}{Variación\ natural} = \frac{LSE - LIE}{LSTN - LITN} = \frac{LSE - LIE}{6\sigma}$$

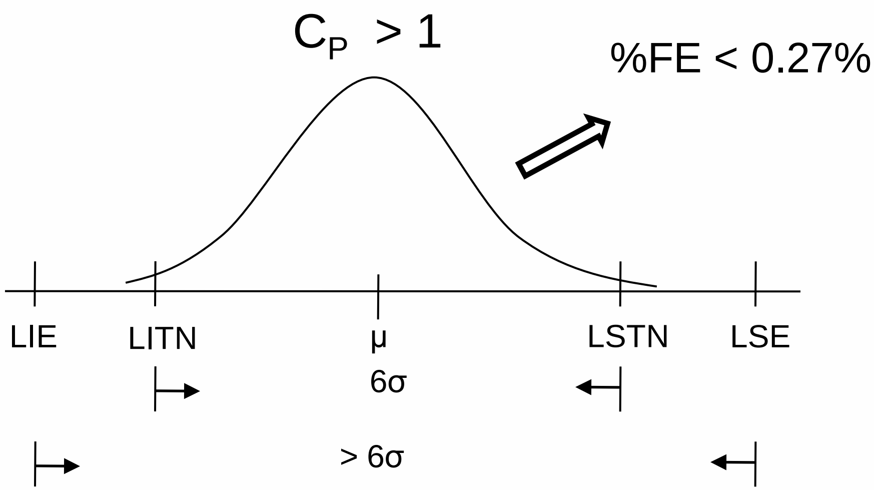
Un estimador de C_P

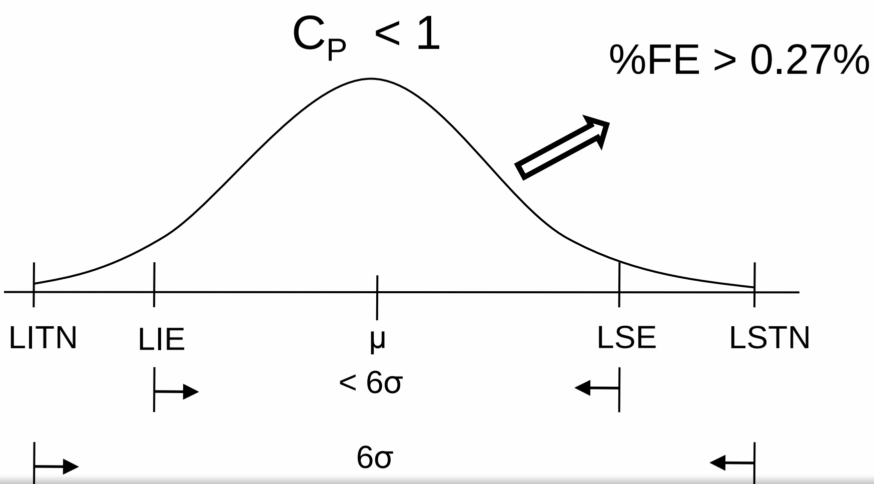
$$\hat{C}_P = \frac{LSE - LIE}{6\hat{\sigma}}$$

Indicadores para variables

C_P







Mientras mayor sea el C mayor será la capacidad del proceso, lo cual implica producir menos artículos fuera de especificaciones

Indicadores para variables

C_P unilaterales

Con frecuencia nos encontramos con variables del tipo

Mientras más grande mejor → Especificar el limite inferior

Mientras más pequeño mejor → Especificar el limite superior

En dichos casos C_P → Estimadores

$$C_{PS} = \frac{LSE - \mu}{3\sigma} \qquad \hat{C}_{PS} = \frac{LSE - \hat{\mu}}{3\hat{\sigma}}$$

$$C_{PI} = \frac{\mu - LIE}{3\sigma} \qquad \hat{C}_{PI} = \frac{\hat{\mu} - LIE}{3\hat{\sigma}}$$

Indicadores para variables

C_P

Nota:

Para tener una idea de la cantidad de artículos fuera de especificaciones, que un determinado proceso con un C_P=k, se espera que este produciendo, es útil convertir el valor de k en una proporción esperada de artículos fuera de especificaciones.

Para el caso bilateral, supongamos un proceso bajo control con una media centrada entre los límites de especificación y que la característica se distribuye normal.

$$C_P = \frac{LSE - LIE}{6\sigma} = k \Rightarrow LSE - LIE = 6k\sigma \Rightarrow LSE - LIE = (\mu + 3k\sigma) - (\mu - 3k\sigma)$$

$$LSE = \mu + 3k\sigma$$

$$LIE = \mu - 3k\sigma$$

$$p = P\left(Z < \frac{LIE - \mu}{\sigma}\right) + P\left(X > \frac{LSE - \mu}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(Z < \frac{\mu - 3k\sigma - \mu}{\sigma}\right) + P\left(Z > \frac{\mu + 3k\sigma - \mu}{\sigma}\right)$$

$$= P(Z < -3k) + P(Z > 3k)$$

Indicadores para variables

C_P

Ejemplo

Para un $C_P = 0.5$, capacidad muy mala

$$p = P(Z < -3k) + P(Z > 3k) = P(Z < -3(0.5)) + P(Z > 3(0.5)) = P(Z < -1.5) + P(Z > 1.5) = 0.133614$$

Para un $C_P = 1$,

$$p = P(Z < -3k) + P(Z > 3k) = P(Z < -3(1)) + P(Z > 3(1)) = P(Z < -3) + P(Z > 3) = 0.0027$$

Para un $C_P = 1.5$, capacidad muy buena

$$p = P(Z < -3k) + P(Z > 3k) = P(Z < -3(1.5)) + P(Z > 3(1.5)) = P(Z < -4.5) + P(Z > 4.5) = 0.000007$$

Para un $C_P = 2$, capacidad excelente

$$p = P(Z < -3k) + P(Z > 3k) = P(Z < -3(2)) + P(Z > 3(2)) = P(Z < -6) + P(Z > 6) = 0.000000002$$

Indicadores para variables

C_P

Nota: Veamos ahora el caso unilateral

Especificación superior

$$C_{PS} = \frac{LSE-\mu}{3\sigma} = k \Rightarrow LSE-\mu = 3k\sigma \Rightarrow LSE = \mu + 3k\sigma$$

$$p = P\left(Z > \frac{LSE-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{\mu+3k\sigma-\mu}{\sigma}\right) = P(Z > 3k)$$

Especificación Inferior

$$C_{PI} = \frac{\mu-LIE}{3\sigma} = k \Rightarrow \mu-LIE = 3k\sigma \Rightarrow LIE = \mu - 3k\sigma$$

$$p = P\left(Z < \frac{LIE-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{\mu-3k\sigma-\mu}{\sigma}\right) = P(Z < -3k)$$

Indicadores para variables

C_P

Ejemplo

Para un $C_P = 0.5$, y sólo la especificación superior

$$p = P(Z < -3k) + P(Z > 3k) = P(Z > 3(0.5)) = P(Z > 1.5) = 0.066807$$

Para un $C_P = 1$,

$$p = P(Z > 3k) = P(Z > 3(1)) = P(Z > 3) = 0.00135$$

Indicadores para variables

C_P

Artículos esperados fuera de especificaciones, según el valor de C_P indicado.

C_P	ESPECIFICACIONES			
	BILATERALES		UNILATERALES	
	Proporción	ppm	Proporción	ppm
0.2	0.548506	548506	0.274253	274253
0.4	0.230139	230139	0.115070	115070
0.6	0.071861	71861	0.035930	35930
0.8	0.016395	16395	0.008198	8198
1.0	0.002700	2700	0.001350	1350
1.2	0.000318	318	0.000159	159
1.4	0.000027	27	0.000013	13
1.6	0.000002	2	0.000001	1
1.8	0.00000006	0.06	0.00000003	0.03
2.0	0.0000000018	0.0018	0.0000000009	0.0009

Indicadores para variables

C_P

Clasificación de la capacidad, según el valor de C_P

Valor del indicador	Clasificación de la capacidad
$C_P \geq 2$	Excelente
$1.33 \leq C_P < 2$	Muy buena
$1 \leq C_P < 1.33$	Buena
$0.67 \leq C_P < 1$	Mala
$C_P \leq 0.67$	Muy mala

Indicadores para variables

C_P

Estimación mediante intervalos de confianza

$$Si\ \ X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right) \Rightarrow \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

Entonces,

$$P\left(\chi^2_{n-1,\alpha/2} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{n-1,1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\frac{\sigma^2}{n-1}\chi^2_{n-1,\alpha/2} < S^2 < \frac{\sigma^2}{n-1}\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\sqrt{\frac{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}{n-1}}\sigma < S < \sqrt{\frac{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}{n-1}}\sigma\right) = 1-\alpha$$

Indicadores para variables

C_P

Multiplicando por C_P

$$P\left(C_P\sqrt{\frac{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}{n-1}}\sigma < C_P S < C_P\sqrt{\frac{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}{n-1}}\sigma \right) = 1-\alpha \Rightarrow P\left(\frac{C_P\sigma}{S}\sqrt{\frac{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}{n-1}} < C_P < \frac{C_P\sigma}{S}\sqrt{\frac{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}{n-1}} \right) = 1-\alpha$$

Pero

$$\frac{C_P\sigma}{S} = \frac{\sigma\left(\frac{LSE-LIE}{6\sigma}\right)}{S} = \frac{LSE-LIE}{6S} = \hat{C}_P$$

Entonces,

$$P\left(\hat{C}_P\sqrt{\frac{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}{n-1}} < C_P < \hat{C}_P\sqrt{\frac{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}{n-1}} \right) = 1-\alpha$$

Así,

$$\left(\hat{C}_P\sqrt{\frac{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}{n-1}} ; \hat{C}_P\sqrt{\frac{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}{n-1}} \right)$$

Indicadores para variables

C_P

Ejemplo

La especificación del peso de una pieza en un proceso de inyección de plástico, es de 60 ± 1 gramo. Para hacer una primera valoración de la capacidad del proceso, se obtiene una muestra aleatoria de tamaño 40, obteniéndose una media de 59.88 y una desviación estándar de 0.25.

$$\hat{C}_P = \frac{LSE - LIE}{6S} = \frac{61 - 59}{6(0.25)} = 1.33$$

$$\chi^2_{n-1,\alpha/2} = \chi^2_{39,0.025} = 23.6543$$

$$\chi^2_{n-1,\alpha/2} = \chi^2_{39,0.975} = 58.1201$$

$$\left(\hat{C}_P\sqrt{\frac{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}{n-1}};\hat{C}_P\sqrt{\frac{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}{n-1}}\right) \Rightarrow \left(1.33\sqrt{\frac{23.6543}{39}};1.33\sqrt{\frac{58.1201}{39}}\right) \Rightarrow (1.03;1.63)$$

Indicadores para variables

C_P

Prueba de Hipótesis

Supongamos las siguientes hipótesis

$$H_0 : C_P = C_{P0}$$
$$H_0 : C_P > C_{P0}$$

Para probar estas hipótesis se selecciona una muestra de tamaño n, a partir de la cual se calcula el valor estimado de C_P, si dicho valor es mayor que un valor crítico C se recha la hipótesis nula.

Para calcular el tamaño de la muestra se fijan 4 valores, los tamaños de error tipo I y tipo II, conocidos como α y β, y los valores de C_P(alto) y C_P(bajo) , que representan las capacidades para las cuales estamos dispuestos a aceptar y rechazar respectivamente con probabilidad igual a 1- α .

Una vez fijados estos valores se hace uso de la siguiente tabla, propuesta por Montgomery, para calcular el valor de n y C.

Indicadores para variables

C_P

Prueba de Hipótesis

Tamaño de muestra n	α = β = 0.10		α = β = 0.05	
	$\frac{C_P(alto)}{C_P(bajo)} = k_1$	$\frac{C}{C_P(bajo)} = k_2$	$\frac{C_P(alto)}{C_P(bajo)} = k_1$	$\frac{C}{C_P(bajo)} = k_2$
10	1.88	1.27	2.26	1.37
20	1.53	1.20	1.73	1.26
30	1.41	1.16	1.55	1.21
40	1.34	1.14	1.46	1.18
50	1.30	1.13	1.40	1.16
60	1.27	1.11	1.36	1.15
70	1.25	1.10	1.33	1.14
80	1.23	1.10	1.30	1.13
90	1.21	1.10	1.28	1.12
100	1.20	1.09	1.26	1.11

Indicadores para variables

C_P

Ejemplo

El gerente de compras de una compañía, le pidió al gerente de producción de compras de la compañía proveedora de materia prima, que como su empresa estaba interesada en ir eliminando gradualmente los programas de aceptación por muestreo, que le estaban aplicando a la materia prima, necesita tomar como proveedores, sólo a aquellos que le demuestren regularmente, que su proceso esta operando con un capacidad cuyo indicador C_P sea mayor a 1.30. El gerente de producción, para atender la solicitud y poder competir como un proveedor de calidad, decidió crear un plan, para que el gerente de compras, cuando lo creyera conveniente, comprobara si su proceso estaba operando con un $C_P > 1.30$. Para lograr esto, propuso las siguientes hipótesis:

$$H_0 : C_P = 1.30$$

$$H_0 : C_P > 1.30$$

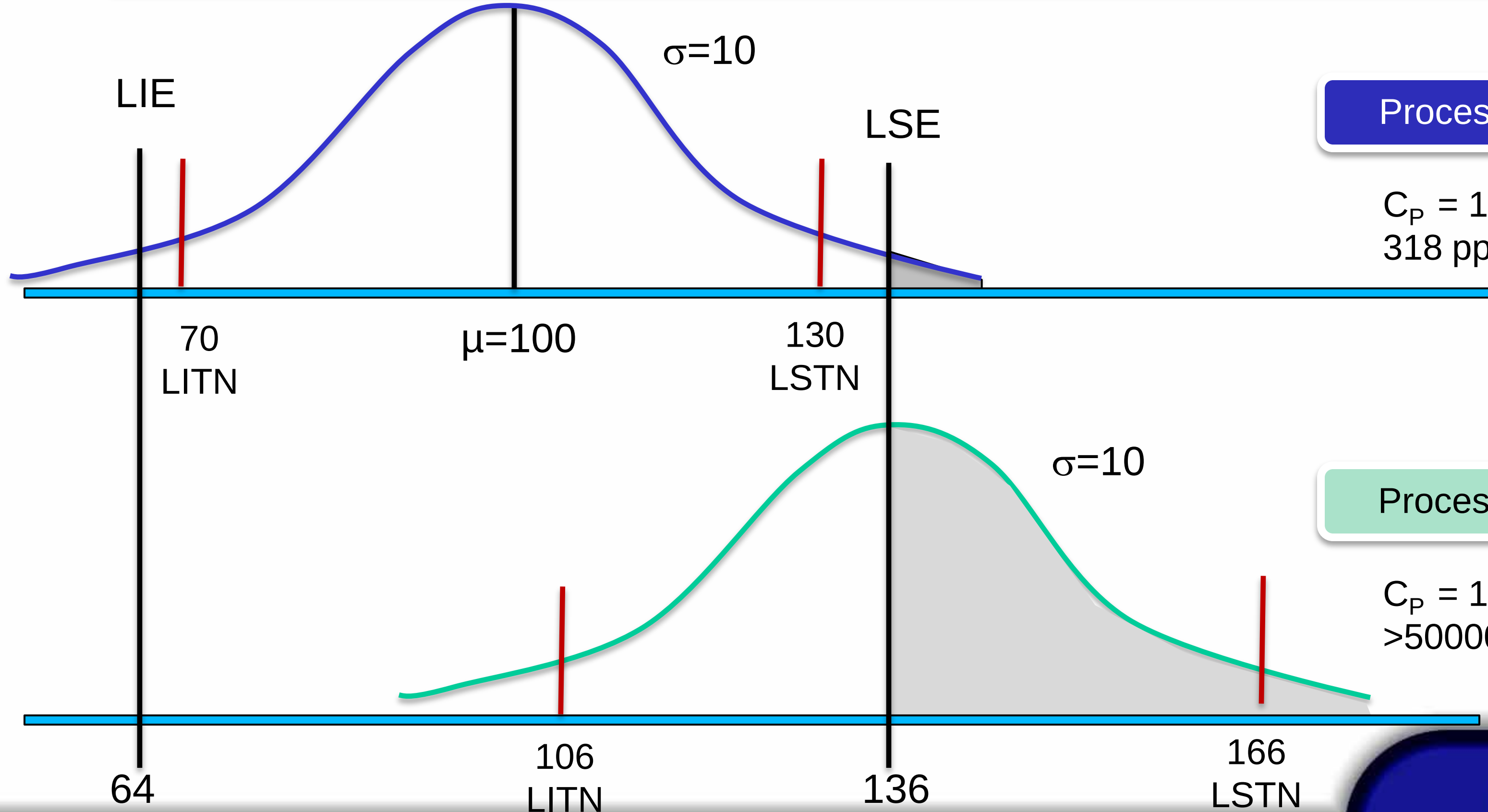
El gerente de producción se planteo que si el proceso está operando con un $C_P \leq 1.30$, le gustaría rechazarlo con una probabilidad de 0.90, mientras que si lo está haciendo con un indicador un $C_P > 1.60$ le gustaría aceptarlo con una probabilidad de 0.90. Entonces:

$$k_1 = \frac{C_P(alto)}{C_P(bajo)} = \frac{1.60}{1.30} = 1.23 \Rightarrow n = 80 \Rightarrow C = k_2 C_P(bajo) = 1.10 * 1.30 = 1.43 \Rightarrow Si\ \hat{C}_P > 1.43 \Rightarrow \text{Re}chazo\ H_0$$

Indicadores para variables

Capacidad real y capacidad potencial

El cálculo del C_P se ha hecho suponiendo que el proceso está operando con la media centrada en el intervalo de especificaciones



Proceso A

C_P = 1.2
318 ppm

Proceso B

C_P = 1.2
>500000

Indicadores para variables

C_{Pk}

Cuando un proceso está operando con la media centrada en el intervalo de especificaciones

C_P representa la capacidad real del proceso

Cuando un proceso está operando con la media diferente al centro en el intervalo de especificaciones

C_P representa la capacidad potencial del proceso, pues esta sería la capacidad real si el proceso esta centrado

Indicadores para variables

C_{Pk}

$$C_{Pk} = \min\left(C_{PS}, C_{PL}\right) = \min\left(\frac{LSE-\mu}{3\sigma}, \frac{\mu-LIE}{3\sigma}\right)$$

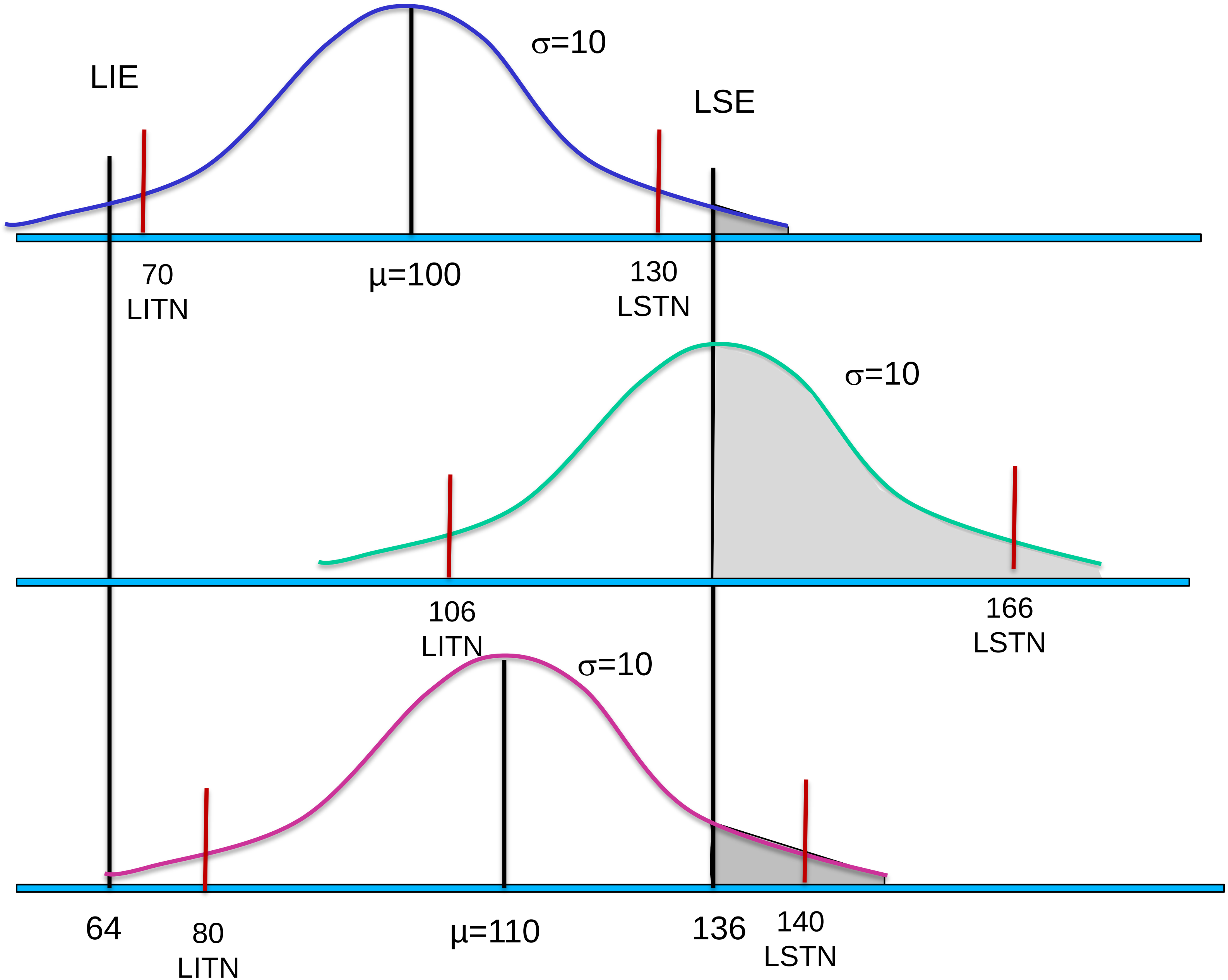
Toma en cuenta como esta operando la media del proceso

El C_{Pk} coincide con el C_P unilateral cuya especificación este mas cerca de la media

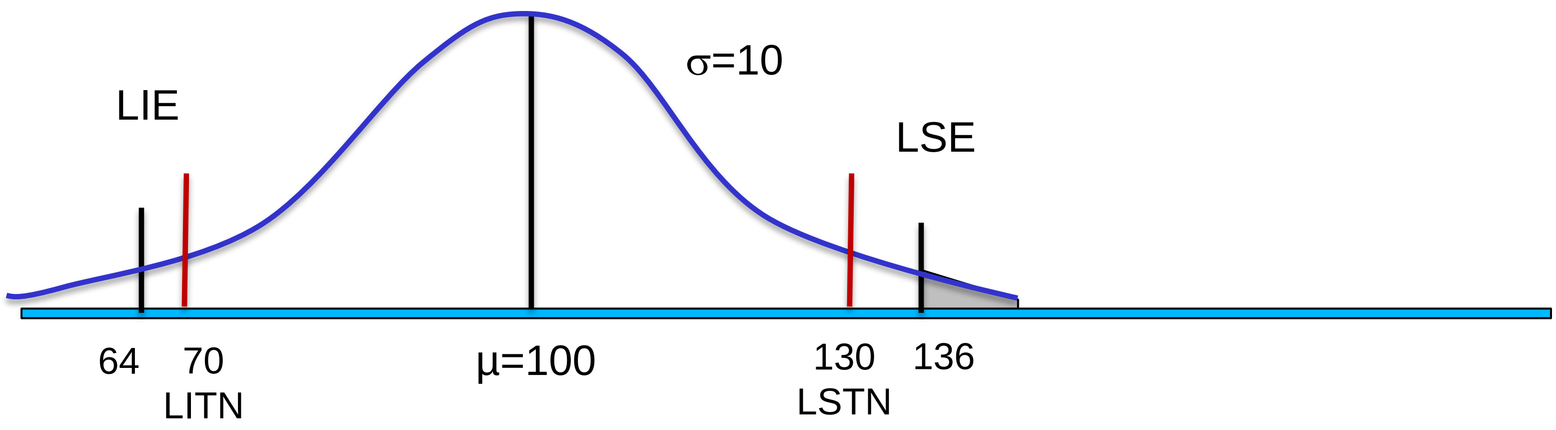
Estimación

Cuando no se conocen los parámetros

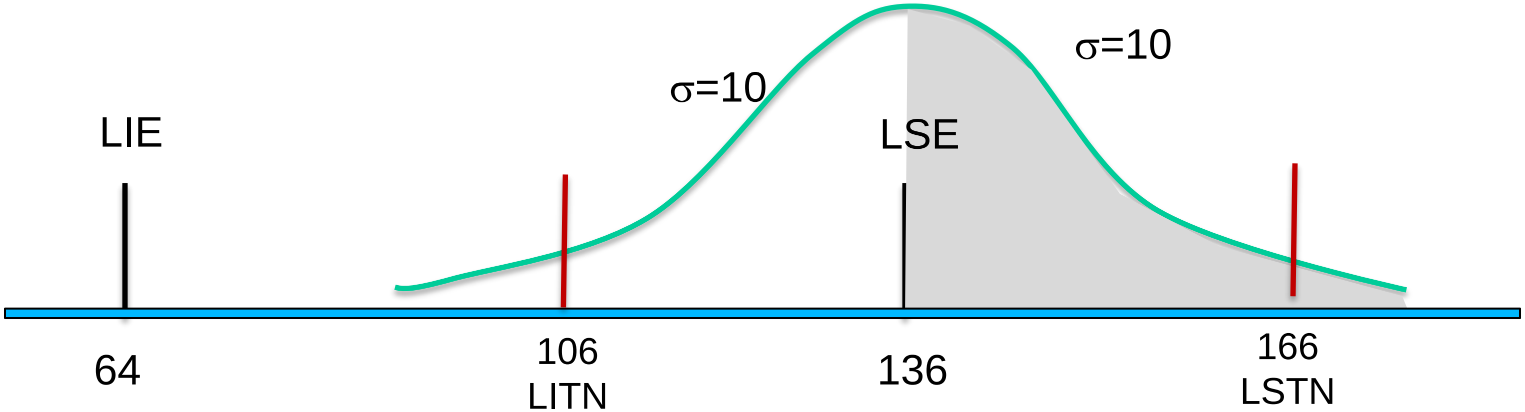
$$\hat{C}_{Pk} = \min\left(\hat{C}_{PS}, \hat{C}_{PL}\right)$$



LIE
σ=10
LSE
70
LITN
μ=100
130
LSTN
σ=10
106
LITN
166
LSTN
σ=10
64
80
LITN
μ=110
136
140
LSTN

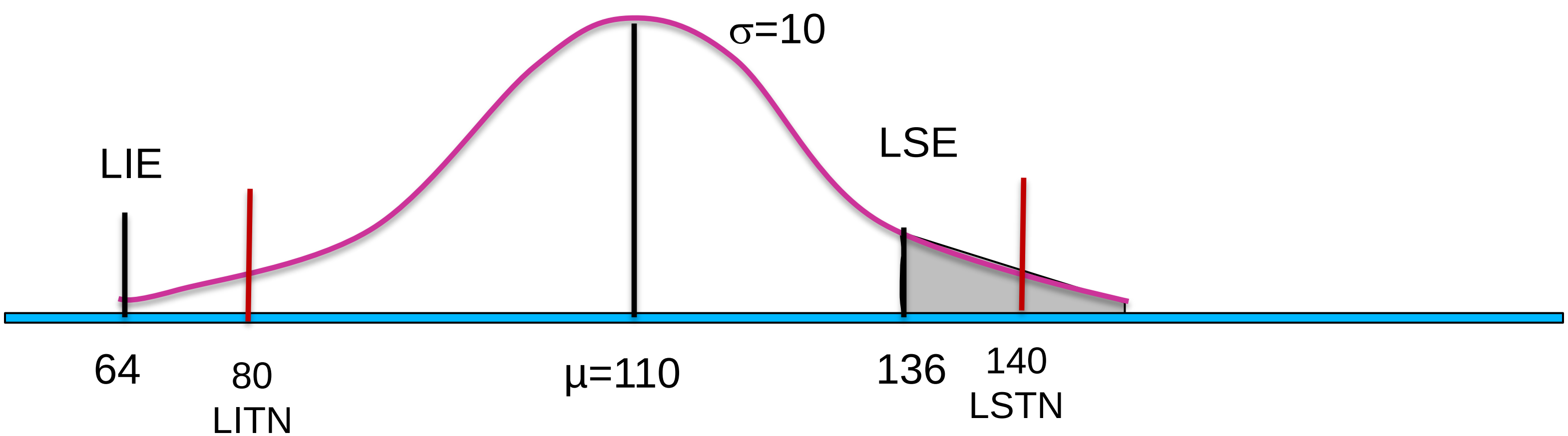


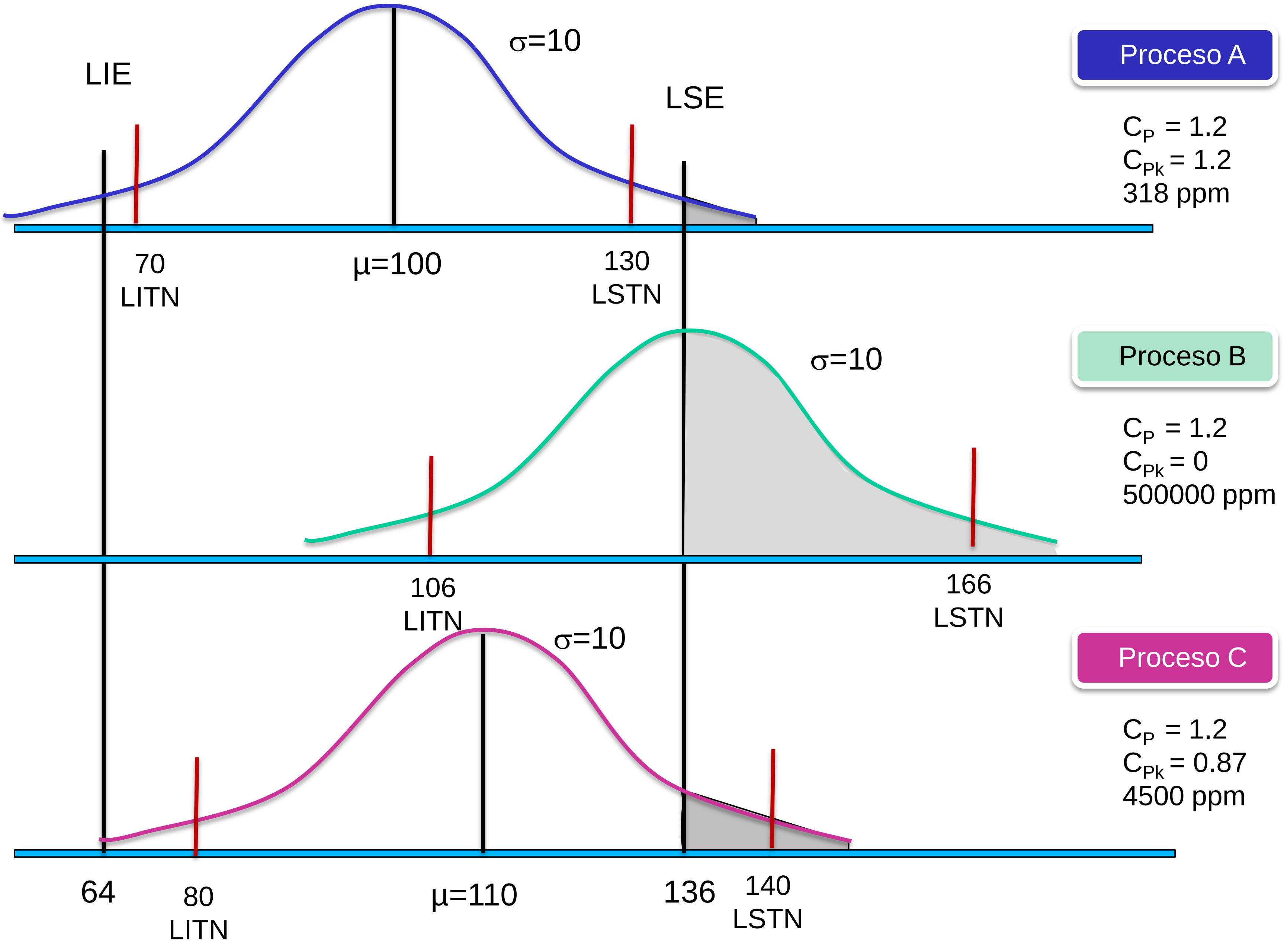
$$C_{Pk} = \min\left(C_{PS}, C_{PL}\right) = \min\left(\frac{136-100}{3(10)}, \frac{100-64}{3(10)}\right) = \min\left(1.2, 1.2\right) = 1.2$$



$$C_{Pk} = \min\left(C_{PS}, C_{PL}\right) = \min\left(\frac{136-136}{3(10)}, \frac{136-64}{3(10)}\right) = \min\left(0, 2.4\right) = 0$$

$$C_{Pk} = \min\left(C_{PS}, C_{PL}\right) = \min\left(\frac{136-110}{3(10)}, \frac{110-64}{3(10)}\right) = \min\left(0.87, 1.53\right) = 0.87$$




LIE
σ=10
LSE
70
LITN
μ=100
130
LSTN
Proceso A
C_P = 1.2
C_{Pk} = 1.2
318 ppm
σ=10
106
LITN
166
LSTN
Proceso B
C_P = 1.2
C_{Pk} = 0
500000 ppm
σ=10
64
80
LITN
μ=110
136
140
LSTN
Proceso C
C_P = 1.2
C_{Pk} = 0.87
4500 ppm

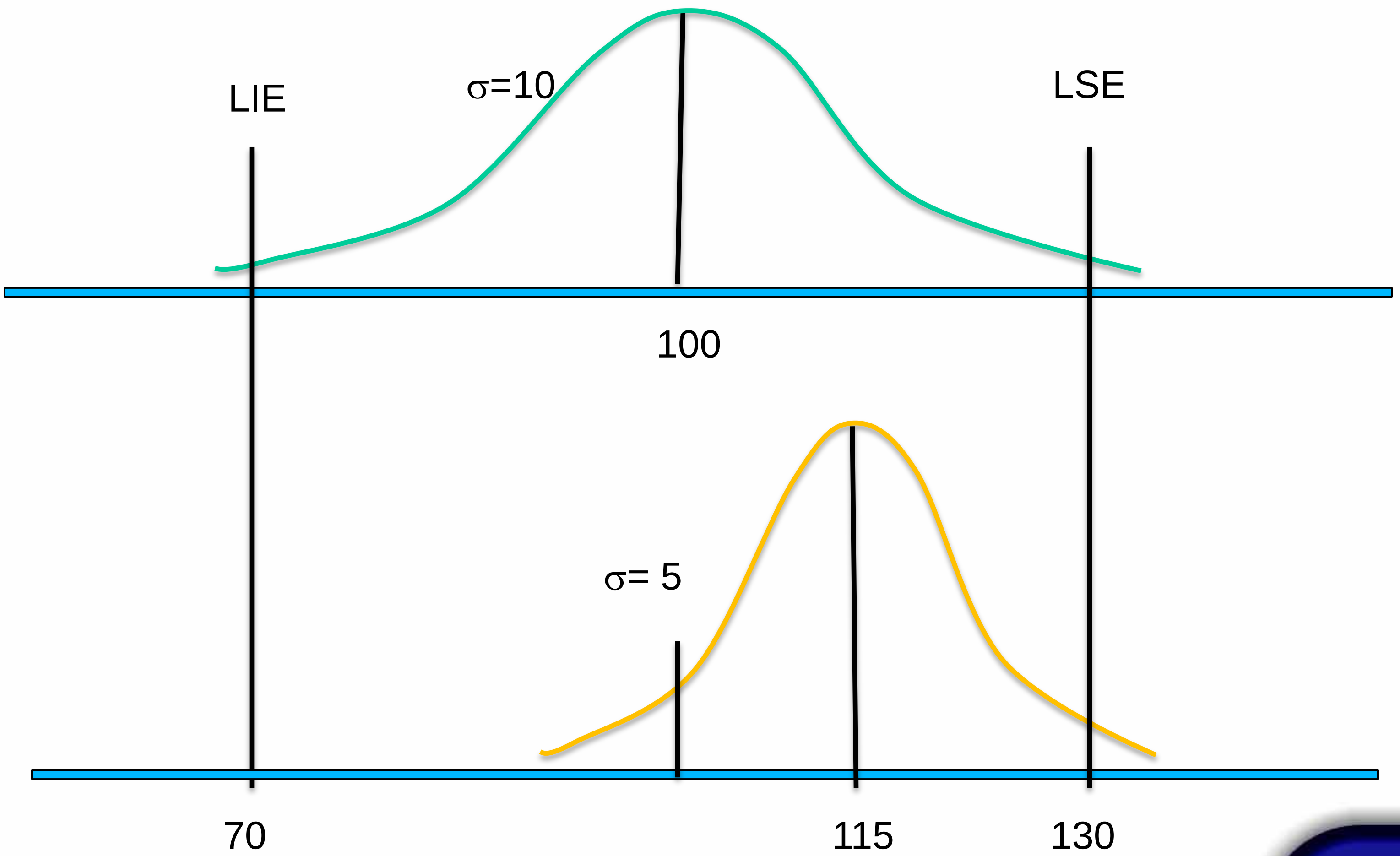
Inidcadores para variable

Estimación mediante Intervalos de Confianza

$$\hat{C}_{Pk} \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{C}_{Pk}^2}{2(n-1)} + \frac{1}{9n}}$$

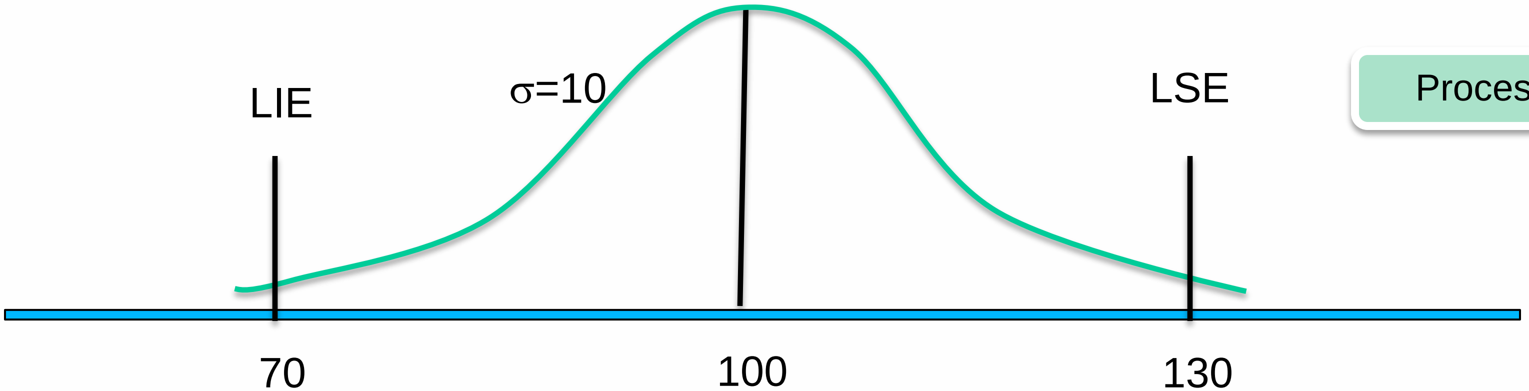
Indicadores para variables

C_{Pm}



Indicadores para variables

C_{Pm}



$$C_P = \frac{LSE - LIE}{6\sigma} = \frac{130-70}{6(10)} = 1$$

$$C_{Pk} = \min(C_{PS}, C_{PL}) = \min\left(\frac{130-100}{3(10)}, \frac{100-70}{3(10)}\right) = \min(1,1) = 1$$

$C_{Pk} = C_P$ El proceso está centrado

Indicadores para variables

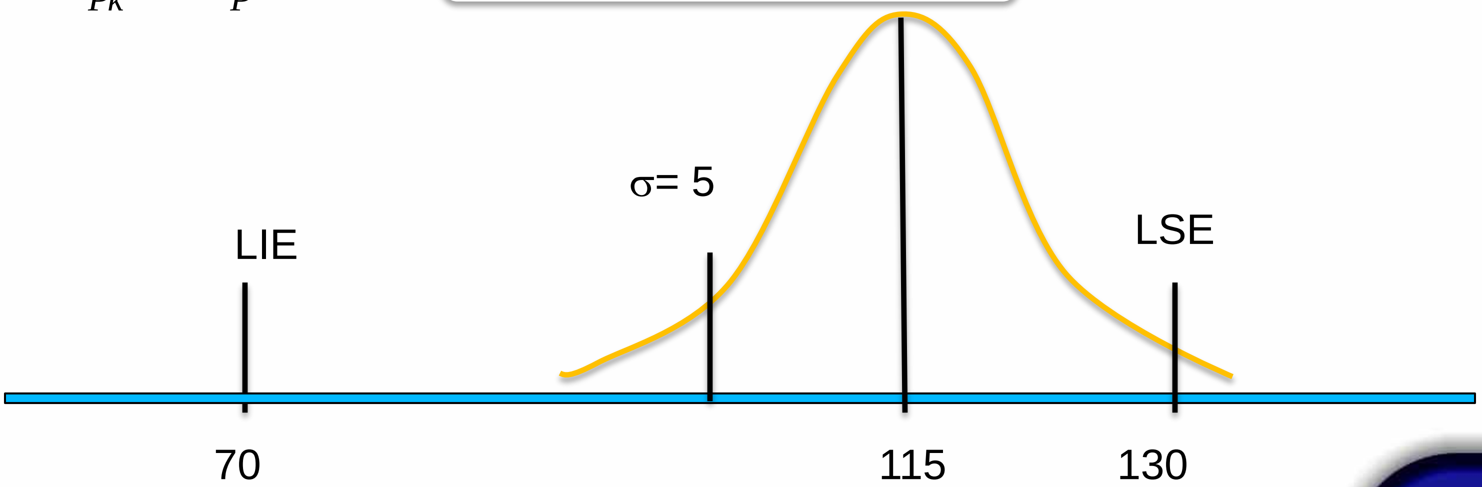
C_{Pm}

$$C_P = \frac{LSE - LIE}{6\sigma} = \frac{130 - 70}{6(5)} = 2$$

$$C_{Pk} = \min\left(C_{PS}, C_{PL}\right) = \min\left(\frac{130 - 115}{3(5)}, \frac{115 - 70}{3(5)}\right) = \min(1{,}3) = 1$$

$$C_{Pk} < C_P$$

El proceso no está centrado



Indicadores para variables

C_{Pm}

El proceso B, a pesar de no estar centrado, tiene una capacidad real igual al proceso A, incluso otro proceso C, operando en la mismas condiciones al proceso B, excepto por la deviación estándar produciría una capacidad real distinta a la del proceso no centrado, por ejemplo si la desviación estándar es 1 la capacidad real sería 5.

Debido a que C_{Pk} depende inversamente del valor de σ, entonces dicho indicador no da información acerca de la posición de la media dentro del intervalo de especificaciones. Para tener una idea de la ubicación de la media dentro del intervalo de especificaciones se calcula el C_{Pm} .

Indicadores para variables

C_{Pm}

$$C_{Pm} = \frac{LSE - LIE}{6\Gamma}$$

$$\Gamma^2 = E\left[(X - T)^2\right] \qquad \Gamma^2 = \sigma^2 + (\mu - T)^2$$

$$T = \frac{1}{2}(LSE - LIE)$$

$$C_{Pm} = \frac{LSE - LIE}{6\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}}$$

$$C_{Pm} = \frac{C_P}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mu - T}{\sigma}\right)^2}}$$

Indicadores para variables

P_P y P_k

$\hat{C}_P$ $\hat{C}_{Pk}$

S

$$\hat{\sigma} = \frac{\overline{R}}{d_2} \qquad \hat{\sigma} = \frac{\overline{S}}{C_4}$$

$$\hat{\sigma} = \left[\frac{\sum_{ij} \left(X_{ij} - \overline{\overline{X}} \right)^2}{nm-1} \right]^{1/2}$$

$\hat{P}_P$

$\hat{P}_{Pk}$

Indicadores para variables

P_P y P_k

El proceso esta bajo control

La característica se distribuye normal

$$\hat{\sigma} = \left[\frac{\sum_{ij} \left(X_{ij} - \overline{\overline{X}} \right)^2}{nm - 1} \right]^{1/2} \equiv \begin{cases} \hat{\sigma} = \dfrac{\overline{R}}{d_2} \\ \hat{\sigma} = \dfrac{\overline{S}}{C_4} \end{cases}$$

$\hat{C}_{Pk}$ $\hat{C}_P$

El proceso esta fuera control

$\hat{P}_P$

$\hat{P}_{Pk}$

Indicadores para variables

K

$$K = \frac{\mu - T}{\frac{1}{2}\left(LSE - LIE\right)} 100$$

Constituye un indicador, expresado en porcentaje, de la localización de la media del proceso, con respecto a la mitad del intervalo formado por las especificaciones.

Cuando la media está dentro de las especificaciones, varía de -100 hasta 100.

K = 100 indica que la media del proceso está ubicada en el LSE

K = 0 indica que el proceso está centrado

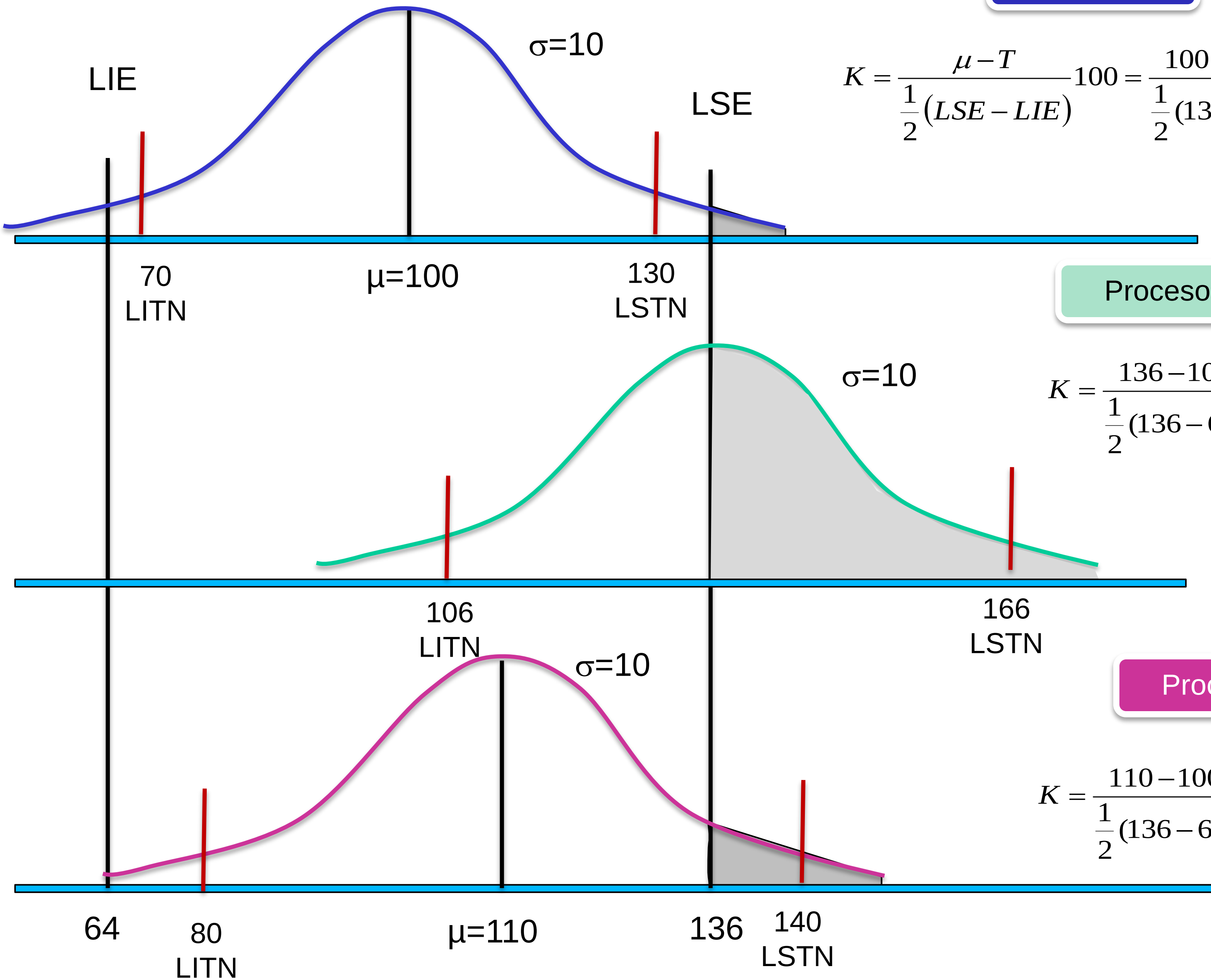
K = -100 indica que la media del proceso está ubicada en el LIE

K < 0 indica que la media se encuentra por debajo del centro de especificaciones

K > 0 indica que la media se encuentra por encima del centro de especificaciones

| K | < 20 el proceso está moderadamente descentrado

| K | > 100 la media del proceso está fuera de las especificaciones



Proceso A

$$K = \frac{\mu - T}{\frac{1}{2}(LSE - LIE)}100 = \frac{100-100}{\frac{1}{2}(136-64)}100 = 0\%$$

Proceso B

$$K = \frac{136-100}{\frac{1}{2}(136-64)}100 = 100\%$$

Proceso C

$$K = \frac{110-100}{\frac{1}{2}(136-64)}100 = 27.78\%$$

Indicadores para atributos

Partes por millón (ppm)

Se usa cuando se esta calificando el producto como disconforme o no disconforme

$$ppm = P * 1000000$$

Defectos por unidad (DPU)

Cuando la característica de calidad representa el número de disconformidades

$$DPU = \frac{d}{U}$$

d : Es el número de disconformidades

U : Número de artículos

Indicadores para atributos

Defectos por Oportunidad (DPO)

Cuando la característica de calidad representa el número de disconformidades

$$DPU = \frac{DPU}{O}$$

O : es el número de oportunidades de defectos por unidad

Ejemplo

Se han seleccionado doscientos celulares en los cuales hay cien defectos, suponiendo que los celulares sólo tenían 50 oportunidades de defectos, entonces

$$DPO = \frac{DPU}{O} = \frac{0.5}{50} = 0.01$$

Si se supone que los celulares tenían 200 oportunidades de defectos, entonces

$$DPO = \frac{DPU}{O} = \frac{0.5}{200} = 0.0025$$