Examen Nº 2 y su Solución

Estadística 10

Prof. Ernesto Ponsot Balaguer

Mérida, febrero de 2006

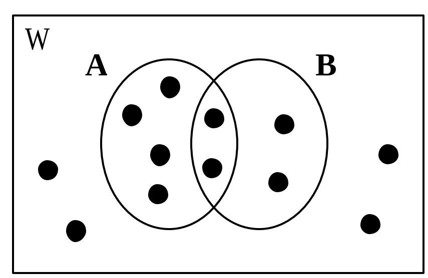
1.a) Encuentre el espacio muestral en el experimento aleatorio: Registrar secuencialmente el sexo de los primeros tres estudiantes que llegan a la oficina de registros en un día cualquiera.

Considerando el sexo de un estudiante como M = Masculino y F = Femenino, así como que el registro ocurre en secuencia, Ω = {MMM, MMF, MFM, FMM, MFF, FFM, FMF, FFF}, en total 8 puntos muestrales

1.b) Encuentre el espacio muestral en el experimento aleatorio: Extraer de una caja que contiene 5 metras rojas y 2 metras negras, tres metras al azar, en secuencia y sin reposición.

Considerando el color de las metras como R = Rojas y N = Negras, que el registro ocurre en secuencia, así como que no es posible sacar más de dos metras negras, Ω = {RRR, RRN, RNR, NRR, RNN, NNR, NRN}, en total 7 puntos muestrales.

2. En el diagrama de Venn de la figura, los puntos muestrales son equiprobables.



Como los eventos son equiprobables, cada punto de la figura, es decir, cada elemento de los conjuntos, pesa igual en la conformación de la probabilidad, entonces, debemos contar el número de puntos resultantes en cada conjunto de interés y aplicar la idea “Nº de casos favorables / Nº de casos posibles”.

2.a) La unión de los conjuntos A y B suma 8 puntos de 12 que hay en total…

2.b) El conjunto B^C está formado por todos los puntos de Ω que no están en B y éstos suman 8 puntos de 12 posibles…

2.c) El conjunto A^C está formado por todos los puntos de Ω que no están en A y éstos son 6. De éstos 6 puntos que no están en A, sólo 2 están en B, luego, considerando que hay 12 puntos posibles…

a) $P(A \cup B) = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3}$

b) $P(B^C) = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3}$

c) $P(B \cap A^C) = \dfrac{2}{12} = \dfrac{1}{6}$

d) $P(A \cup B) - P(A \cap B) = \dfrac{8}{12} - \dfrac{2}{12} = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$

2.d) El evento "ocurre A o B pero no ambos a la vez", se puede ver en la figura considerando los puntos que están en A, pero no en B (ellos son 4) y aquellos que están en B, pero no en A (son 2). En total, 6 puntos que están en A o en B pero no en ambos a la vez, de 12 puntos posibles… También puede calcularse a partir de la sustracción de las probabilidades de los eventos unión e intersección…

3. Tres profesores de la facultad, digamos A, B y C, se postulan a la elección de Decano. Las probabilidades de ser electos de cada uno, son respectivamente 0,2, 0,5 y 0,3. Si A resulta electo, la probabilidad de que se reinstauren los exámenes finales es de 0,9. Si B resulta electo, la probabilidad de que se reinstauren los exámenes finales es de 0,4. Si C resulta electo, la probabilidad de que se reinstauren los exámenes finales es de 0,7.

3.a) ¿Cuál es la probabilidad de que se reinstauren los exámenes finales?. Llamemos A al evento "gana el candidato A", B al evento "gana el candidato B" y C al evento "gana el candidato C". Los eventos A, B y C, así definidos, son mutuamente excluyentes pues si ocurre uno, no pueden ocurrir los otros. Son también exhaustivos, pues no hay sino tres candidatos A, B y C. El que A, B y C sean una partición del espacio muestral, se refleja además, en el hecho que sus probabilidades suman la unidad. En tales condiciones, aplica el teorema de la probabilidad total. Llamemos R al evento "se reinstauran los exámenes finales", entonces…

$$\begin{aligned} P(R) &= P(A)P(R/A)+P(B)P(R/B)+P(C)P(R/C) \\ &= 0{,}2\times 0{,}9+0{,}5\times 0{,}4+0{,}3\times 0{,}7 \\ &= 0{,}59 \end{aligned}$$

3.b) Si se sabe que <u>no</u> se reinstauraron los exámenes finales, ¿Cuál es la probabilidad de que el nuevo Decano sea B?. En este caso, se pregunta por la probabilidad condicional de que ocurra B, dado que no ocurrió R, o dicho en lenguaje estadístico, la probabilidad condicional de que ocurra B, dado que ocurrió R^C. Utilizando el Teorema de Bayes, considerando las probabilidades ya obtenidas, así como las probabilidades de los eventos complementarios a R, entonces…

$$\begin{aligned}
P(B/R^C) &= \frac{P(B \cap R^C)}{P(R^C)} \\
&= \frac{P(B) \times P(R^C/B)}{1 - P(R)} \\
&= \frac{P(B) \times [1 - P(R/B)]}{1 - P(R)} \\
&= \frac{0,5 \times (1 - 0,4)}{1 - 0,59} = \frac{0,5 \times 0,6}{0,41} = 0,7317
\end{aligned}$$

4) Un cargamento de 12 computadoras adquiridas por la facultad, tiene 4 computadoras defectuosas. A un departamento se le asignan aleatoriamente 3 computadoras del cargamento. Si caracterizamos a las computadoras como B = Buena y M = Defectuosa o Mala, y consideramos la secuencia en que se le entregan al departamento, El espacio muestral del experimento es:

$$\Omega = \{BBB, BBM, BMB, MBB, BMM, MMB, MBM, MMM\}$$

Las probabilidades asociadas con cada punto muestral son las siguientes:

$$P(BBB) = \frac{8}{12} \times \frac{7}{11} \times \frac{6}{10} = \frac{336}{1320} = 0,2545 \qquad P(BMM) = \frac{8}{12} \times \frac{4}{11} \times \frac{3}{10} = \frac{96}{1320} = 0,0727$$

$$P(BBM) = \frac{8}{12} \times \frac{7}{11} \times \frac{4}{10} = \frac{224}{1320} = 0,1697 \qquad P(MMB) = \frac{4}{12} \times \frac{3}{11} \times \frac{8}{10} = \frac{96}{1320} = 0,0727$$

$$P(BMB) = \frac{8}{12} \times \frac{4}{11} \times \frac{7}{10} = \frac{224}{1320} = 0,1697 \qquad P(MBM) = \frac{4}{12} \times \frac{8}{11} \times \frac{3}{10} = \frac{96}{1320} = 0,0727$$

$$P(MBB) = \frac{4}{12} \times \frac{8}{11} \times \frac{7}{10} = \frac{224}{1320} = 0,1697 \qquad P(MMM) = \frac{4}{12} \times \frac{3}{11} \times \frac{2}{10} = \frac{24}{1320} = 0,0182$$

Dado que se ha definido X como el número de computadoras defectuosas asignadas al departamento, la siguiente tabla presenta algunas observaciones pertinentes:

X puede valer …	**Si …**	**Los eventos “favorables” son …**
0	Ninguna de las computadoras asignadas al departamento es defectuosa.	BBB
1	Una de las computadoras asignadas al departamento, sin importar el orden, es defectuosa.	BBM o BMB o MBB
2	Dos de las computadoras asignadas al departamento, sin importar el orden, son defectuosas.	BMM o MMB o MBM
3	Las tres computadoras asignadas al departamento, sin importar el orden, son defectuosas.	MMM

Entonces:

$$P(X = 0) = P(BBB) = 0{,}2545$$
$$P(X = 1) = P(BBM) + P(BMB) + P(MBB) = 3 \times 0{,}1697 = 0{,}5091$$
$$P(X = 2) = P(BMM) + P(MMB) + P(MBM) = 3 \times 0{,}0727 = 0{,}2181$$
$$P(X = 3) = P(MMM) = 0{,}0182$$

Luego:

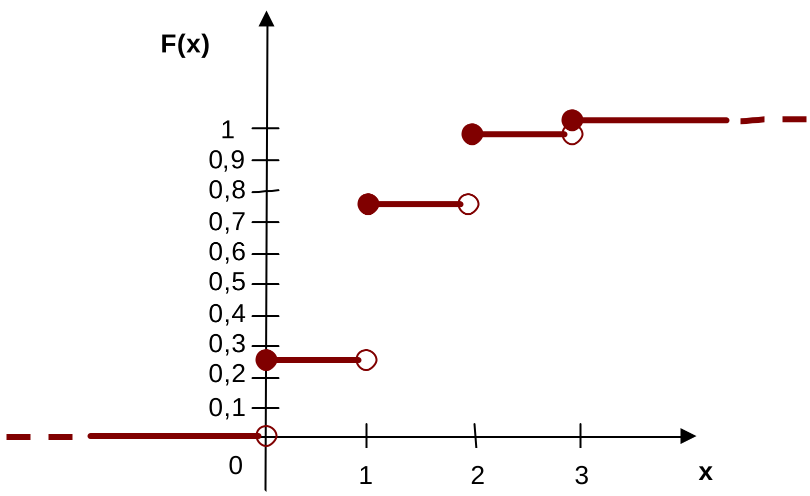
4.a) La f.m.p. de X es:

x	**0**	**1**	**2**	**3**
P(X=x)	0,2545	0,5091	0,2181	0,0182

4.b) Acumulando las Probabilidades,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 0{,}2545 & , 0 \le x < 1 \\ 0{,}7636 & , 1 \le x < 2 \\ 0{,}9817 & , 2 \le x < 3 \\ 1 & , x \ge 3 \end{cases}$$

4.c) La gráfica de F(x) …



4.d) A partir de la F(x), encuentre la probabilidad de que el número de computadoras defectuosas asignadas al departamento, sea a lo menos una, pero menos de tres. Entonces …

$$\begin{aligned} P(1 \le x < 3) &= P(x < 3) - P(x < 1) \\ &= P(x \le 2) - P(x \le 0) \\ &= F(2) - F(0) = 0{,}9817 - 0{,}2545 = 0{,}7272 \end{aligned}$$

(Como también puede corroborarse a partir de la f.m.p., haciendo P(X=1) + P(X=2))

5. Una variable aleatoria X tiene la siguiente f.m.p.:

X	-2	-1	0	1	2
P(X=x)	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5

Se define $Y = X^2$, luego:

5.a) Para encontrar la f.m.p. de $Y = X^2$, hagamos las siguientes precisiones:

Y puede valer …	Si …	Los eventos "favorables" son …
0	X vale 0.	(X=0)
1	X vale -1 o si X vale 1.	$(X=-1) \cup (X=1)$
4	X vale -2 o si X vale 2.	$(X=-2) \cup (X=2)$

Entonces, considerando que las probabilidades de las uniones mostradas en la tabla precedente, se logran con las sumas de las probabilidades individuales …

5.a) La f.m.p. de Y es:

Y	0	1	4
P(Y=y)	1/5	2/5	2/5

5.b) La esperanza y varianza de Y se calculan como:

$$\mathrm{E(Y)}=\sum_{\forall y} y\mathrm{P(Y} = y) = \left(0\times {}^{1}\!/_{5}\right)+\left(1\times {}^{2}\!/_{5}\right)+\left(4\times {}^{2}\!/_{5}\right)=\frac{10}{5}=2$$

$$\mathrm{E(Y^2)}=\sum_{\forall y} y^2\mathrm{P(Y} = y) = \left(0\times {}^{1}\!/_{5}\right)+\left(1\times {}^{2}\!/_{5}\right)+\left(16\times {}^{2}\!/_{5}\right)=\frac{34}{5}=6{,}8$$

$$\mathrm{V(Y)}=\mathrm{E(Y^2)}-\left[\mathrm{E(Y)}\right]^2=6{,}8-2^2=6{,}8-4=2{,}8$$