Facultad de Ciencias Económicas y Sociales
Departamento de Estadística
Cátedra de Estadística 1, Sección 06

Solución al 3º Examen Parcial Prof. Ernesto Ponsot Balaguer

Aplicado el 21 de febrero de 2006

1. Una caja contiene 5 bombillas de 60W, 5 bombillas de 80W y 5 bombillas de 100W. Si se extrae una bombilla al azar de la caja y X es la variable aleatoria tal que X=0 si la bombilla extraída resulta de 60W, X=1, si resulta de 80W y X=2, si resulta de 100W.

a) Muestre, encontrando la f.m.p de X, que se trata de una distribución uniforme discreta y encuentre el valor de su parámetro k. (1 pto.)

b) En términos de la variable aleatoria X, a partir de su f.m.p., calcule la probabilidad de que en una extracción salga una bombilla de al menos 80W. (1 pto.)

Respuesta: Sea $\Omega = \{B60, B80, B100\}$ el espacio muestral del experimento según pueda ser extraída una bombilla de 60W, 80W o 100W respectivamente. Las probabilidades asociadas son:

$$\mathrm{P(B60)} = \mathrm{P(X=0)} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

$$\mathrm{P(B80)} = \mathrm{P(X=1)} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

$$\mathrm{P(B100)} = \mathrm{P(X=2)} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

a) La f.m.p. de X es

x	**0**	**1**	**2**
P(X=x)	1/3	1/3	1/3

Que corresponde con una densidad de masa de probabilidades "uniforme discreta" de la forma:

$$\mathrm{P(X = x)} = \frac{1}{k} \quad ; \quad x = 0,1,2 \quad ; \quad k = 3$$

b) El suceso "sale una bombilla de al menos 80W" es equivalente al suceso "X toma valores mayores o iguales que 1", luego:

$$\mathrm{P(X \geq 1)} = \mathrm{P(X=1)} + \mathrm{P(X=2)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

2. La probabilidad de que un paciente se recupere de una enfermad de la piel es de 0,6. Se toma una muestra al azar de 10 personas que han contraído la enfermedad. Sea X la variable aleatoria del número de personas que se recuperan de la enfermedad, entonces:

a) Haga explícita la f.m.p. de X con sus parámetros. (1,5 ptos.)

b) Calcule E(X) y V(X). (1,5 ptos.)

c) Calcule la probabilidad de que se recuperen entre 1 y 3 personas inclusive. (1,5 ptos.)

d) Calcule la probabilidad de que se recuperen más de dos personas. (1,5 ptos.)

Respuesta:

a) Se trata de 10 ensayos independientes de Bernoulli, cuya probabilidad de éxito, individualmente considerados, es 0,60 $\Rightarrow$ X ~ Binomial(n = 10; p = 0,60).

b)
$$\mathrm{E(X)} = np = 10\times 0{,}6 = 6$$
$$\mathrm{V(X)} = np(1-p) = 10\times 0{,}6\times 0{,}4 = 2{,}4$$

En vista que los valores binomiales para p superiores a 0,5 no están tabulados, debemos operar con el complemento del experimento, que también resulta binomial. Si Y es la variable aleatoria que representa "el número de personas que no se recuperan de la enfermedad de la piel", entonces Y~Binomial(n = 10; p = 0,4).

c)
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(1\le \mathrm{X}\le 3) &= \mathrm{P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)}\\ &= \mathrm{P(Y=9)+P(Y=8)+P(Y=7)}\\ &= 0{,}0016+0{,}0106+0{,}0425\\ &= 0{,}0547\end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned}\mathrm{P(X>2)} &= 1-\mathrm{P(X\le 2)}\\ &= 1-\{\mathrm{P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)}\}\\ &= 1-\{\mathrm{P(Y=10)+P(Y=9)+P(Y=8)}\}\\ &= 1-\{0{,}0001+0{,}0016+0{,}0106\}\\ &= 1-0{,}0123\\ &= 0{,}9877\end{aligned}$$

3. Se sabe que llegan en promedio 4 barcos diarios a un determinado puerto. Sea X la variable aleatoria del número de barcos por día que llegan a dicho puerto, entonces:

a) Haga explícita la f.m.p. de X con sus parámetros. (1,5 ptos.)

b) ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen en un día más de 2 barcos?. (1,5 ptos.)

c) Si en el puerto pueden desembarcar a lo sumo 6 barcos por día, ¿cuál es la probabilidad de que un barco cualquiera que llegue al puerto no pueda desembarcar?. (1,5 ptos.)

d) ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen entre 6 y 9 barcos inclusive, en los siguientes dos días?. (1,5 ptos.)

Respuesta:

a) En vista que interesa el número de veces que ocurre un fenómeno (el arribo de barcos al puerto) por unidad de tiempo o espacio (en este caso, por día) y suponiendo que en un intervalo suficientemente pequeño de tiempo no puede llegar más de un barco, que los barcos llegan independientemente a puerto y que llegan en un instante, sin que ello dependa de cuántos han llegado en otras oportunidades, X ~ Poisson(λ = 4 barcos/día)

b)
$$\begin{aligned} P(X > 2) &= 1 - P(X \le 2) \\ &= 1 - \{P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)\} \\ &= 1 - \{0{,}01832 + 0{,}07326 + 0{,}14653\} \\ &= 1 - 0{,}23811 \\ &= 0{,}76189 \end{aligned}$$

c) Como el puerto puede atender un máximo de 6 barcos en un día cualquiera, el fenómeno que debe ocurrir para que un barco que llegue no pueda ser atendido es que estén en el puerto 6 barcos o más y ello ocurre con probabilidad:

$$\begin{aligned} P(X \ge 6) &= 1 - P(X < 6) \\ &= 1 - P(X \le 5) \\ &= 1 - \{P(X \le 2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)\} \\ &= 1 - \{0{,}23811 + 0{,}19537 + 0{,}19537 + 0{,}15629\} \\ &= 1 - 0{,}78514 \\ &= 0{,}21486 \end{aligned}$$

d) Ahora nos interesa la llegada de barcos en un lapso de 2 días en lugar de 1. Haciendo una regla de tres simple, la nueva variable aleatoria Y: “número de barcos que llegan a dicho puerto cada 2 días”, resulta distribuida Poisson(λ = 8 barcos/”dos días”). Entonces:

$$\begin{aligned} P(6 \le Y \le 9) &= P(Y=6) + P(Y=7) + P(Y=8) + P(Y=9) \\ &= 0{,}12214 + 0{,}13959 + 0{,}13959 + 0{,}12408 \\ &= 0{,}52540 \end{aligned}$$

4. El peso de ciertos animales se distribuye normalmente con media 8 Kg. y varianza 0,81. En un lote de estos animales,

a) Encuentre la probabilidad de que uno de ellos escogido al azar pese más de 9 Kg. (1,5 ptos.)

b) Encuentre la probabilidad de que uno de ellos escogido al azar pese menos de 6 Kg. o más de 10 Kg. (1,5 ptos.)

c) Encuentre la probabilidad de que uno de ellos escogido al azar pese entre 6 Kg. y 10 Kg. (1,5 ptos.)

d) Encuentre el mayor peso que se corresponde con el 30% de los animales más livianos. (1,5 ptos.)

Respuesta: $X \sim N(m = 8;\ s^2 = 0{,}81)$ o equivalentemente, $X \sim N(m = 8; s = \sqrt{0{,}81} = 0.9)$. Si llamamos Z a la variable aleatoria distribuida normal estándar, entonces:

a) $\text{P}(\text{X} > 9) = 1 - \text{P}(\text{X} \le 9)$

$$= 1 - \text{P}\left(\frac{\text{X} - m}{s} \le \frac{9-8}{0,9}\right)$$

$$= 1 - \text{P}(Z \le 1{,}11)$$

$$= 1 - 0{,}8665$$

$$= 0{,}1335$$

b) $\text{P}(\{\text{X} < 6\} \cup \{\text{X} > 10\}) = \text{P}(\text{X} < 6) + \text{P}(\text{X} > 10)$

$$= \text{P}(\text{X} < 6) + 1 - \text{P}(\text{X} \le 10)$$

$$= 1 + \text{P}\left(\frac{\text{X} - m}{s} < \frac{6-8}{0,9}\right) - \text{P}\left(\frac{\text{X} - m}{s} \le \frac{10-8}{0,9}\right)$$

$$= 1 + \text{P}(Z < -2{,}22) - \text{P}(Z \le 2{,}22)$$

$$= 1 + 0{,}0132 - 0{,}9868$$

$$= 0{,}0264$$

c) $\text{P}(6 \le \text{X} \le 10) = \text{P}(\text{X} \le 10) - \text{P}(\text{X} < 6)$

$$= \text{P}\left(\frac{\text{X} - m}{s} \le \frac{10-8}{0,9}\right) - \text{P}\left(\frac{\text{X} - m}{s} < \frac{6-8}{0,9}\right)$$

$$= \text{P}(Z < 2{,}22) - \text{P}(Z \le -2{,}22)$$

$$= 0{,}9868 - 0{,}0132$$

$$= 0{,}9736$$

Nótese que $\text{P}(6 \le \text{X} \le 10) = 1 - \text{P}(\{\text{X} < 6\} \cup \{\text{X} > 10\})$

d) $\text{P}(\text{X} \le x) = 0{,}3$

$$\Rightarrow \quad \text{P}\left(\frac{\text{X} - m}{s} \le \frac{x-8}{0,9}\right) = 0{,}3$$

$$\text{P}\left(Z \le \frac{x-8}{0,9}\right) = 0{,}3$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x-8}{0,9} \cong -0{,}534$$

$$x \cong -0{,}534 \times 0{,}9 + 8$$

$$x \cong 7{,}52\ Kg.$$