Apuntes de modelos lineales

Clase N° 6, 7 y 8

Ernesto Ponsot Balaguer
Dr. en Estadística, MSc. en Estadística Aplicada, Ing. de Sistemas
http://webdelprofesor.ula.ve/economia/ernesto
E-mail: ernesto@ula.ve

Departamento de Estadística. Universidad de Los Andes. Mérida, Venezuela

Mayo de 2012

Contenido

ML, Caso 1

Caso 1

Iniciamos la discusión de los modelos lineales generales, con el caso más simple que reviste interés: $\boldsymbol{Y}_{n\times 1} = \boldsymbol{X}_{n\times p}\boldsymbol{\beta}_{p\times 1} + \boldsymbol{\epsilon}_{n\times 1}$, donde $\mathrm{r}(\boldsymbol{X}) = p$, $\boldsymbol{\epsilon} \sim \mathrm{N}(\mathbf{0}, \sigma^2\boldsymbol{I})$ [luego $\boldsymbol{Y} \sim \mathrm{N}(\boldsymbol{X}\beta, \sigma^2\boldsymbol{I})$].

Estimación de β y σ^2

De la proposición (prp.) 59, la función de verosimilitud de la muestra es:

$$L(\beta, \sigma^2; \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X}\beta)'(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X}\beta)}$$

y tomando logaritmo ($\log(L) = l$):

$$l(\beta, \sigma^2) = -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}\beta)'(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}\beta)$$

Estimación de los parámetros

Estimación de β y σ^2

Ahora, derivando e igualando a cero:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\beta &= \boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y} && (1) \\ \sigma^2 &= \frac{1}{n}(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}\beta)'(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}\beta) && (2) \end{aligned}$$

Consecuentemente, los estimadores máximo-verosímiles de los parámetros son $\widetilde{\beta}$ y $\widetilde{\sigma}^2$ que satisfacen (1) y (2) (provisto el análisis de las segundas derivadas). Ahora bien, de las prp's. 13 y 70:

$$\begin{aligned} \widetilde{\beta} &= \boldsymbol{X}^{-}\boldsymbol{Y} \\ \widetilde{\sigma}^2 &= \frac{1}{n}\boldsymbol{Y}'(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-})\boldsymbol{Y} \end{aligned}$$

Estimación de los parámetros

Algunas propiedades de $\widetilde{\beta}$ y $\widetilde{\sigma}^2$

1. $\widetilde{\beta}$ y $\widetilde{\sigma}^2$ son estadísticos suficientes (y completos).
2. $\mathrm{E}[\widetilde{\beta}] = \beta$.
3. $\mathrm{V}[\widetilde{\beta}] = \sigma^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}$.
4. $\mathrm{E}[\widetilde{\sigma}^2] = \frac{(n-p)}{n}\sigma^2$.

Luego, como buscamos estimadores insesgados, trabajaremos con los estimadores derivados de los máximo-verosímiles:

$$
\begin{aligned}
\widehat{\beta} = \widetilde{\beta} &= \boldsymbol{X}^{-}\boldsymbol{Y} \\
\widehat{\sigma}^2 = \frac{n}{(n-p)}\widetilde{\sigma}^2 &= \frac{1}{(n-p)}\boldsymbol{Y}'(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-})\boldsymbol{Y}
\end{aligned}
$$

Estimación y pruebas de hipótesis sobre los parámetros

Distribuciones de $\widehat{\beta}$ y $\widehat{\sigma}^2$

$$\begin{aligned} \widehat{\beta} &\sim \mathrm{N}(\beta, \sigma^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}) \\ \frac{(n-p)}{\sigma^2}\widehat{\sigma}^2 &\sim \chi^2_{n-p} \end{aligned}$$

Además, $\widehat{\beta}$ y $\widehat{\sigma}^2$ son **independientes**.

Pruebas de hipótesis lineales sobre β

Estamos interesados en contrastar hipótesis del tipo $\mathrm{H}_0 : \boldsymbol{H}\beta = \boldsymbol{h}$ versus $\mathrm{H}_1 : \boldsymbol{H}\beta \neq \boldsymbol{h}$, donde $\boldsymbol{H}_{q\times p}$ y $\boldsymbol{h}_p$ son respectivamente una matriz y un vector de constantes conocidas (en general, $q \leq p$). Además, supondremos que $\mathrm{r}(\boldsymbol{H}) = q$ y que el sistema de ecuaciones $\boldsymbol{H}\beta = \boldsymbol{h}$ es consistente (esto es, está garantizada una solución al menos).

Pruebas de hipótesis lineales sobre β

Pruebas de hipótesis lineales sobre β

Veamos algunos ejemplos para el modelo $\boldsymbol{Y}_n = \boldsymbol{X}_{n\times 5}\beta_5 + \epsilon_n$:

1. $\mathrm{H}_0 : \beta_1 = 0$
2. $\mathrm{H}_0 : \beta_3 = 4,75$
3. $\mathrm{H}_0 : \beta_2 = \beta_3$
4. $\mathrm{H}_0 : \beta_2 = \beta_3$ y $\beta_4 = \beta_5$
5. $\mathrm{H}_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 0$
6. $\mathrm{H}_0 : \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5$
7. H_0:
$$\begin{cases} \beta_2 + 3\beta_3 = \beta_1 \\ 4\beta_2 - 3\beta_3 = 5 \end{cases}$$

Pruebas de hipótesis lineales sobre β

Pruebas de hipótesis lineales sobre β

Para probar las hipótesis sobre los parámetros, emplearemos la prueba de la razón de verosimilitud generalizada (λ), como sigue:

$$\lambda = \frac{\text{Máx}_{\beta,\sigma^2} L(\beta, \sigma^2; \boldsymbol{Y})|_{H_0}}{\text{Máx}_{\beta,\sigma^2} L(\beta, \sigma^2; \boldsymbol{Y})} \qquad (3)$$

En (3), el numerador es la función de verosimilitud evaluada en los estimadores máximo-verosímiles, considerando la restricción que impone la hipótesis nula, esto es, considerando que β debe satisfacer $\boldsymbol{H}\beta = \boldsymbol{h}$. Por su parte, el denominador es la función de verosimilitud evaluada en los estimadores máximo-verosímiles del modelo, sin restricciones.

Pruebas de hipótesis lineales sobre β

Pruebas de hipótesis lineales sobre β

Entonces, por una parte el denominador (digamos λ_d) es el siguiente:

$$\begin{aligned} \lambda_d &= \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X}\beta)'(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X}\beta)}\Big|_{\widehat{\beta},\widetilde{\sigma}^2} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi\widetilde{\sigma}^2}\right)^{n/2} e^{-\frac{1}{2\widetilde{\sigma}^2}(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X}\widehat{\beta})'(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X}\widehat{\beta})} \\ &= (2\pi\widetilde{\sigma}^2 e)^{-n/2} \end{aligned}$$

Y, por otra parte, el numerador (digamos λ_n) es el siguiente: $\lambda_n = (2\pi\widetilde{\sigma}_r^2 e)^{-n/2}$, donde $\widetilde{\sigma}_r^2$ es el estimador máximo verosímil de σ^2 en el modelo restringido, inducido por la hipótesis nula. Luego $\lambda = (\widetilde{\sigma}^2/\widetilde{\sigma}_r^2)^{n/2}$.

Pruebas de hipótesis lineales sobre β

Demostración de λ_n

Recordamos, $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\beta + \boldsymbol{\epsilon}$, $\boldsymbol{\epsilon} \sim \mathrm{N}(\mathbf{0}, \sigma^2 \boldsymbol{I})$, $\mathrm{H}_0 : \boldsymbol{H}\beta = \boldsymbol{h}$ con $\boldsymbol{H}_{q\times p}$ y $\mathrm{r}(\boldsymbol{H}) = q$.
Ahora, sea $\mathcal{R}(\boldsymbol{H})$ el espacio de filas de la matriz $\boldsymbol{H}$ y sea $\boldsymbol{G}_{(p-q)\times p}$ una matriz tal que $\mathcal{R}(\boldsymbol{G}) = \mathcal{R}(\boldsymbol{H})^{\perp}$. Como $\mathcal{R}(\boldsymbol{H}) + \mathcal{R}(\boldsymbol{H})^{\perp} = \mathbb{R}^p$ entonces $\mathrm{r}(\boldsymbol{H}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{G}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{I}_{p\times p})$, luego, $\mathrm{r}(\boldsymbol{G}) = p - q$. De manera que la matriz $\begin{bmatrix} \boldsymbol{H} \\ \boldsymbol{G} \end{bmatrix}$ es cuadrada, de rango completo y por lo tanto no singular.
Por otro lado, $\mathcal{R}(\boldsymbol{G}) = \{\boldsymbol{x}' : \boldsymbol{x}' \perp \boldsymbol{H}\}$, $\boldsymbol{x}'$ es un vector fila de dimensiones $1 \times p$, luego $\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{y}')' = 0$ si $\boldsymbol{y}' \in \mathcal{R}(\boldsymbol{H})$, con $\boldsymbol{y}'$ vector fila de dimensiones $1 \times p$. Entonces $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y} = 0$, $\boldsymbol{y}'\boldsymbol{x} = 0$ y $\boldsymbol{G}\boldsymbol{H}' = \boldsymbol{H}\boldsymbol{G}' = 0$. Así, $\boldsymbol{H}\boldsymbol{G}^{-} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{G}'(\boldsymbol{G}\boldsymbol{G}')^{-1} = 0$, ya que $\boldsymbol{G}$ es de rango completo por filas (prp. 70).

Pruebas de hipótesis lineales sobre β

Demostración de λ_n

También, $\begin{bmatrix} \boldsymbol{H} \\ \boldsymbol{G} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H} \\ \boldsymbol{G} \end{bmatrix}^{-} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}^{-} & \boldsymbol{G}^{-} \end{bmatrix}$, veamos: ya que la g-inversa es única, será suficiente demostrar que $\begin{bmatrix} \boldsymbol{H}^{-} & \boldsymbol{G}^{-} \end{bmatrix}$ es en realidad una g-inversa, a la luz de la definición. Entonces

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{H} \\ \boldsymbol{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}^{-} & \boldsymbol{G}^{-} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{-} & \boldsymbol{H}\boldsymbol{G}^{-} \\ \boldsymbol{G}\boldsymbol{H}^{-} & \boldsymbol{G}\boldsymbol{G}^{-} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{-} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{G}\boldsymbol{G}^{-} \end{bmatrix},$$

es simétrica.

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{H}^{-} & \boldsymbol{G}^{-} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{H} \\ \boldsymbol{G} \end{bmatrix} = \boldsymbol{H}^{-}\boldsymbol{H} + \boldsymbol{G}^{-}\boldsymbol{G},$$

es simétrica.

Pruebas de hipótesis lineales sobre β

Demostración de λ_n

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \boldsymbol{H} \\ \boldsymbol{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}^- & \boldsymbol{G}^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{H} \\ \boldsymbol{G} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^- & \boldsymbol{H}\boldsymbol{G}^- \\ \boldsymbol{G}\boldsymbol{H}^- & \boldsymbol{G}\boldsymbol{G}^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{H} \\ \boldsymbol{G} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^- & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{G}\boldsymbol{G}^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{H} \\ \boldsymbol{G} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^-\boldsymbol{H} \\ \boldsymbol{G}\boldsymbol{G}^-\boldsymbol{G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H} \\ \boldsymbol{G} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Y, por último,

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{H}^- & \boldsymbol{G}^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{H} \\ \boldsymbol{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}^- & \boldsymbol{G}^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}^-\boldsymbol{H} + \boldsymbol{G}^-\boldsymbol{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}^- & \boldsymbol{G}^- \end{bmatrix}$$

Pruebas de hipótesis lineales sobre β

Demostración de λ_n

$$
\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}^{-}\boldsymbol{H} + \boldsymbol{G}^{-}\boldsymbol{G} \end{bmatrix} \boldsymbol{H}^{-} & \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}^{-}\boldsymbol{H} + \boldsymbol{G}^{-}\boldsymbol{G} \end{bmatrix} \boldsymbol{G}^{-} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}^{-}\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{-} + \boldsymbol{G}^{-}\boldsymbol{G}\boldsymbol{H}^{-} & \boldsymbol{H}^{-}\boldsymbol{H}\boldsymbol{G}^{-} + \boldsymbol{G}^{-}\boldsymbol{G}\boldsymbol{G}^{-} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}^{-} + 0 & 0 + \boldsymbol{G}^{-} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}^{-} & \boldsymbol{G}^{-} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Luego, $\begin{bmatrix} \boldsymbol{H}^{-} & \boldsymbol{G}^{-} \end{bmatrix}$ es la g-inversa de $\begin{bmatrix} \boldsymbol{H} \\ \boldsymbol{G} \end{bmatrix}$.

Pruebas de hipótesis lineales sobre β

Demostración de λ_n

Ahora, el modelo $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\beta + \epsilon$ puede reescribirse como

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}\\ \boldsymbol{G}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}\\ \boldsymbol{G}\end{bmatrix}\beta + \epsilon \Rightarrow \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}^{-} & \boldsymbol{G}^{-}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}\\ \boldsymbol{G}\end{bmatrix}\beta + \epsilon$$

$\Rightarrow \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{H}^{-}\boldsymbol{H}\beta + \boldsymbol{X}\boldsymbol{G}^{-}\boldsymbol{G}\beta + \epsilon \Rightarrow \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{H}^{-}\boldsymbol{h} + \boldsymbol{X}\boldsymbol{G}^{-}\boldsymbol{G}\beta + \epsilon$
$\Rightarrow \boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{H}^{-}\boldsymbol{h} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{G}^{-}\boldsymbol{G}\beta + \epsilon$, y haciendo $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{H}^{-}\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{G}^{-}$ y $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{G}\beta$, se obtiene el modelo "reducido" bajo H_0, $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{\theta} + \epsilon$, con $\epsilon \sim \mathrm{N}(\boldsymbol{0}, \sigma^2\boldsymbol{I})$.

Pruebas de hipótesis lineales sobre β

Demostración de λ_n

Ahora bien, ¿qué tipo de modelo es el modelo reducido?, veamos:

1. Nótese que si $\boldsymbol{H}_{q\times p} \Rightarrow \boldsymbol{H}^{-}_{p\times q}$. En efecto, $\boldsymbol{H}^{-} = \boldsymbol{H}'_{p\times q}(\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}')^{-1}_{q\times q} \Rightarrow \boldsymbol{H}^{-}_{p\times q}$
2. $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{Y}_{n\times 1} - \boldsymbol{X}_{n\times p}\boldsymbol{H}^{-}_{p\times q}\boldsymbol{h}_{q\times 1} \Rightarrow \boldsymbol{Z}_{n\times 1}$.
3. $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{X}_{n\times p}\boldsymbol{G}^{-}_{p\times(p-q)} \Rightarrow \boldsymbol{B}_{n\times(p-q)}$.
4. $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{G}_{(p-q)\times p}\boldsymbol{\beta}_{p\times 1} \Rightarrow \boldsymbol{\theta}_{(p-q)\times 1}$.
5. Obviamente, $\boldsymbol{\epsilon}_{n\times 1}$.
6. Por último, $\text{r}(\boldsymbol{B}) = p - q$, como demostramos a continuación: $\text{r}(\boldsymbol{B}) = \text{r}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{G}^{-})$, ahora bien, $\boldsymbol{X}^{-}\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} = \boldsymbol{I}$, entonces $\boldsymbol{X}^{-}\boldsymbol{X}\boldsymbol{G}^{-} = \boldsymbol{G}^{-}$.

Pruebas de hipótesis lineales sobre β

Demostración de λ_n

Y de la prp. 25, $\mathrm{r}(\boldsymbol{G}^-) = \mathrm{r}(\boldsymbol{G})$ y considerando la prp. 72,

$$p - q = \mathrm{r}(\boldsymbol{G}^-) = \mathrm{r}(\boldsymbol{X}^-\boldsymbol{X}\boldsymbol{G}^-) \leq \mathrm{r}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{G}^-) \leq \mathrm{r}(\boldsymbol{G}^-) = p - q$$

en consecuencia, $\mathrm{r}(\boldsymbol{B}) = p - q$. Luego, el modelo reducido $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\epsilon}$, con $\boldsymbol{\epsilon} \sim \mathrm{N}(\boldsymbol{0}, \sigma^2\boldsymbol{I})$ es un ML, del caso I que nos ocupa.
Por lo tanto, $\widehat{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{B}^-\boldsymbol{Z}$ y $\widetilde{\sigma}_r^2 = (1/n)\boldsymbol{Z}'(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^-)\boldsymbol{Z}$, donde $\widetilde{\sigma}_r^2$ es el estimador máximo verosímil de la varianza para el modelo reducido.
De todo lo anterior se desprende que $\lambda_n = (2\pi\widetilde{\sigma}_r^2 e)^{-n/2}$, y en consecuencia, $\lambda = (\widetilde{\sigma}^2/\widetilde{\sigma}_r^2)^{n/2}$.

Pruebas de hipótesis lineales sobre β

Distribución de una función monótona de λ

Sea

$$W = (\lambda^{-2/n} - 1)(n-p)/q = \left(\frac{n-p}{q}\right)\left(\frac{\widetilde{\sigma}_r^2 - \widetilde{\sigma}^2}{\widetilde{\sigma}^2}\right)$$

entonces $W \sim \mathrm{F}_{q,n-p,\psi}$, con ψ (parámetro de no centralidad) dado por:

$$\psi = \frac{1}{2\sigma^2}(\boldsymbol{H}\beta - \boldsymbol{h})'[\boldsymbol{H}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{H}']^{-1}(\boldsymbol{H}\beta - \boldsymbol{h})$$

Ahora bien, $\psi = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{H}\beta = \boldsymbol{h}$, luego la distribución de W corresponde a una F central, sí y sólo sí **la hipótesis nula es cierta**.

Pruebas de hipótesis lineales sobre β

Y por último, el test

Así, el test de la razón de verosimilitud generalizada de tamaño α es

$$\text{rechace } \mathrm{H}_0 \Leftrightarrow w \geq F_{\alpha;q,n-p}$$

donde w es el cálculo de W a partir de la muestra.

Pruebas de hipótesis lineales sobre β

Demostración

$$
\begin{aligned}
W &= (\lambda^{-2/n} - 1)(n-p)/q \\
&= \left(\frac{n-p}{q}\right)\left[\left(\frac{\widetilde{\sigma}^2}{\widetilde{\sigma}_r^2}\right)^{-\frac{n2}{2n}} - 1\right] \\
&= \left(\frac{n-p}{q}\right)\left[\left(\frac{\widetilde{\sigma}_r^2}{\widetilde{\sigma}^2}\right) - 1\right] \\
&= \left(\frac{n-p}{q}\right)\left(\frac{\widetilde{\sigma}_r^2 - \widetilde{\sigma}^2}{\widetilde{\sigma}^2}\right) \\
&= \left(\frac{n-p}{q}\right)\left(\frac{(1/n)\boldsymbol{Z}'(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^-)\boldsymbol{Z} - (1/n)\boldsymbol{Y}'(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^-)\boldsymbol{Y}}{(1/n)\boldsymbol{Y}'(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^-)\boldsymbol{Y}}\right)
\end{aligned}
$$

Pruebas de hipótesis lineales sobre β

Demostración

$$= \left(\frac{n-p}{q}\right)\left(\frac{\boldsymbol{Z}'(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-})\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{Y}'(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-})\boldsymbol{Y}}{\boldsymbol{Y}'(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-})\boldsymbol{Y}}\right)$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{Y}'(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-})\boldsymbol{Y} &= (\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{X}\boldsymbol{H}^{-}\boldsymbol{h})'(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-})(\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{X}\boldsymbol{H}^{-}\boldsymbol{h}) \\
&= (\boldsymbol{Z}'-\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-}+(\boldsymbol{X}\boldsymbol{H}^{-}\boldsymbol{h})'-(\boldsymbol{X}\boldsymbol{H}^{-}\boldsymbol{h})'\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-}) \\
&\quad \times(\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{X}\boldsymbol{H}^{-}\boldsymbol{h}) \\
&= \boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-}\boldsymbol{Z}+(\boldsymbol{X}\boldsymbol{H}^{-}\boldsymbol{h})'\boldsymbol{Z} \\
&\quad -(\boldsymbol{X}\boldsymbol{H}^{-}\boldsymbol{h})'\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-}\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{H}^{-}\boldsymbol{h} \\
&\quad -\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-}\boldsymbol{X}\boldsymbol{H}^{-}\boldsymbol{h}+(\boldsymbol{X}\boldsymbol{H}^{-}\boldsymbol{h})'\boldsymbol{X}\boldsymbol{H}^{-}\boldsymbol{h} \\
&\quad -(\boldsymbol{X}\boldsymbol{H}^{-}\boldsymbol{h})'\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-}\boldsymbol{X}\boldsymbol{H}^{-}\boldsymbol{h}
\end{aligned}$$

Pruebas de hipótesis lineales sobre β

Demostración

$$
\begin{aligned}
&= \boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z} - \boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-}\boldsymbol{Z} + (\boldsymbol{X}\boldsymbol{H}^{-}\boldsymbol{h})'\boldsymbol{Z} \\
&\quad -(\boldsymbol{H}^{-}\boldsymbol{h})'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{H}^{-}\boldsymbol{h} \\
&\quad -\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{H}^{-}\boldsymbol{h} + (\boldsymbol{X}\boldsymbol{H}^{-}\boldsymbol{h})'\boldsymbol{X}\boldsymbol{H}^{-}\boldsymbol{h} \\
&\quad -(\boldsymbol{X}\boldsymbol{H}^{-}\boldsymbol{h})'\boldsymbol{X}\boldsymbol{H}^{-}\boldsymbol{h} \\
&= \boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z} - \boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-}\boldsymbol{Z} + (\boldsymbol{X}\boldsymbol{H}^{-}\boldsymbol{h})'\boldsymbol{Z} - (\boldsymbol{H}^{-}\boldsymbol{h})'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Z} \\
&= \boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z} - \boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-}\boldsymbol{Z} \\
&= \boldsymbol{Z}'(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-})\boldsymbol{Z}
\end{aligned}
$$

Así,

$$
W = \left(\frac{n-p}{q}\right)\left(\frac{\boldsymbol{Z}'(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-})\boldsymbol{Z} - \boldsymbol{Y}'(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-})\boldsymbol{Y}}{\boldsymbol{Y}'(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-})\boldsymbol{Y}}\right)
$$

Pruebas de hipótesis lineales sobre β

Demostración

Así,

$$\begin{aligned} W &= \left(\frac{n-p}{q}\right)\left(\frac{\boldsymbol{Z}'(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-})\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{Z}'(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-})\boldsymbol{Z}}{\boldsymbol{Z}'(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-})\boldsymbol{Z}}\right) \\ &= \left(\frac{n-p}{q}\right)\left(\frac{\boldsymbol{Z}'(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-}-\boldsymbol{I}+\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-})\boldsymbol{Z}}{\boldsymbol{Z}'(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-})\boldsymbol{Z}}\right) \\ &= \left(\frac{n-p}{q}\right)\left(\frac{\boldsymbol{Z}'(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-})\boldsymbol{Z}}{\boldsymbol{Z}'(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-})\boldsymbol{Z}}\right) \end{aligned}$$

Pero, ¿es $\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-}$ idempotente? (recordamos que $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-}$ efectivamente lo es).

Pruebas de hipótesis lineales sobre β

Demostración

Notemos en primer lugar que, atendiendo a la prp. 86, $\boldsymbol{XX}^-$ y $\boldsymbol{BB}^-$ son simétricas e idempotentes. Entonces:

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{XX}^- - \boldsymbol{BB}^-)^2 &= (\boldsymbol{XX}^- - \boldsymbol{BB}^-)(\boldsymbol{XX}^- - \boldsymbol{BB}^-) \\
&= \boldsymbol{XX}^-\boldsymbol{XX}^- - \boldsymbol{BB}^-\boldsymbol{XX}^- - \boldsymbol{XX}^-\boldsymbol{BB}^- \\
&\quad +\boldsymbol{BB}^-\boldsymbol{BB}^- \\
&= \boldsymbol{XX}^- - (\boldsymbol{BB}^-)'(\boldsymbol{XX}^-)' - \boldsymbol{XX}^-\boldsymbol{BB}^- \\
&\quad +\boldsymbol{BB}^- \\
&= \boldsymbol{XX}^- - (\boldsymbol{XX}^-\boldsymbol{BB}^-)' - \boldsymbol{XX}^-\boldsymbol{BB}^- \\
&\quad +\boldsymbol{BB}^-
\end{aligned}
$$

Pruebas de hipótesis lineales sobre β

Demostración

$$\begin{aligned}
&= \boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-} - (\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-}\boldsymbol{X}\boldsymbol{G}^{-}\boldsymbol{B}^{-})' - \boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-}\boldsymbol{X}\boldsymbol{G}^{-}\boldsymbol{B}^{-} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-} \\
&= \boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-} - (\boldsymbol{X}\boldsymbol{G}^{-}\boldsymbol{B}^{-})' - \boldsymbol{X}\boldsymbol{G}^{-}\boldsymbol{B}^{-} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-} \\
&= \boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-} - (\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-})' - \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-} \\
&= \boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-} \\
&= \boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-}
\end{aligned}$$

Luego, $\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-}$ es idempotente.

Pruebas de hipótesis lineales sobre β

Demostración

Consecuentemente,

$$\begin{aligned}
\mathrm{r}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-}) &= \mathrm{tr}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-}) - \mathrm{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-}) \\
&= \mathrm{r}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-}) - \mathrm{r}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{X}) - \mathrm{r}(\boldsymbol{B}) \\
&= p - \mathrm{r}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{G}^{-}) = p - (p - q) = q
\end{aligned}$$

Y, hemos probado con anterioridad que $\mathrm{r}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-}) = n - p$. En resumen, hasta ahora:

1. $\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-}$ es idempotente de rango q.
2. $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-}$ es idempotente de rango $n - p$.

Pruebas de hipótesis lineales sobre β

Demostración

Multiplicando y dividendo por $(1/\sigma^2)$ tenemos:

$$\begin{aligned} W &= \frac{\boldsymbol{Z}'(1/\sigma^2)(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^- - \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^-)\boldsymbol{Z}/q}{\boldsymbol{Z}'(1/\sigma^2)(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^-)\boldsymbol{Z}/(n-p)} = \frac{\boldsymbol{Z}'A_1\boldsymbol{Z}/q}{\boldsymbol{Z}'A_2\boldsymbol{Z}/(n-p)} \\ &= \frac{U_1/q}{U_2/(n-p)} \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} A_1\boldsymbol{\Sigma} &= \boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^- - \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^- \\ A_2\boldsymbol{\Sigma} &= \boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^- \end{aligned}$$

ambas idempotentes.

Pruebas de hipótesis lineales sobre β

Demostración

Además, es claro que $\boldsymbol{Z} \sim \mathrm{N}(\boldsymbol{X}\beta - \boldsymbol{X}\boldsymbol{H}^{-}\boldsymbol{h}, \sigma^2 \boldsymbol{I})$. En consecuencia, se satisfacen las condiciones de la prp. 68. Así, $U_1 \sim \chi^2_{\boldsymbol{q},\psi_1}$ y $U_2 \sim \chi^2_{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p},\psi_2}$, con ψ_1, ψ_2 parámetros de no centralidad a construir. También, por la prp. 85, U_1 y U_2 son independientes, ya que:

$$
\begin{aligned}
A_1 \Sigma A_2 &= (1/\sigma^2)(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-})(\sigma^2 \boldsymbol{I})(1/\sigma^2)(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-}) \\
&= (1/\sigma^2)(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-})(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-}) \\
&= (1/\sigma^2)(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-}\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-}\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-}) \\
&= (1/\sigma^2)(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-}) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Pruebas de hipótesis lineales sobre β

Parámetros de no centralidad

$$
\begin{aligned}
\psi_2 &= \left(\frac{1}{2\sigma^2}\right) \mathrm{E}[\boldsymbol{Z}]'(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^-)\mathrm{E}[\boldsymbol{Z}] \\
&= \left(\frac{1}{2\sigma^2}\right) (\boldsymbol{X}\beta - \boldsymbol{X}\boldsymbol{H}^-\boldsymbol{h})'(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^-)(\boldsymbol{X}\beta - \boldsymbol{X}\boldsymbol{H}^-\boldsymbol{h}) \\
&= \left(\frac{1}{2\sigma^2}\right) (\beta - \boldsymbol{H}^-\boldsymbol{h})'\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^-)\boldsymbol{X}(\beta - \boldsymbol{H}^-\boldsymbol{h}) \\
&= \left(\frac{1}{2\sigma^2}\right) (\beta - \boldsymbol{H}^-\boldsymbol{h})'(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^-\boldsymbol{X})(\beta - \boldsymbol{H}^-\boldsymbol{h}) \\
&= \left(\frac{1}{2\sigma^2}\right) (\beta - \boldsymbol{H}^-\boldsymbol{h})'(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})(\beta - \boldsymbol{H}^-\boldsymbol{h}) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Luego, $U_2 \sim \chi^2_{n-p}$ central.

Pruebas de hipótesis lineales sobre β

Parámetros de no centralidad

$$
\begin{aligned}
\psi_1 &= \left(\frac{1}{2\sigma^2}\right) \mathrm{E}[\boldsymbol{Z}]'(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^- - \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^-)\mathrm{E}[\boldsymbol{Z}] \\
&= \left(\frac{1}{2\sigma^2}\right) (\boldsymbol{X}\beta - \boldsymbol{X}\boldsymbol{H}^-\boldsymbol{h})'(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^- - \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^-)(\boldsymbol{X}\beta - \boldsymbol{X}\boldsymbol{H}^-\boldsymbol{h}) \\
&= \left(\frac{1}{2\sigma^2}\right) (\beta - \boldsymbol{H}^-\boldsymbol{h})'\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^- - \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^-)\boldsymbol{X}(\beta - \boldsymbol{H}^-\boldsymbol{h})
\end{aligned}
$$

Nótese que en este caso buscamos disponer las ecuaciones de manera que se vea claramente qué ocurre con el parámetro de no centralidad, cuando se satisface la hipótesis nula. Para ello, comencemos por preguntarnos:

$$\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^- - \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^- \stackrel{?}{=} (\boldsymbol{H}\boldsymbol{X}^-)^-\boldsymbol{H}\boldsymbol{X}^-$$

Pruebas de hipótesis lineales sobre β

Parámetros de no centralidad

O equivalentemente,

$$\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-} \stackrel{?}{=} \boldsymbol{X}\boldsymbol{G}^{-}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{G}^{-})^{-} + (\boldsymbol{H}\boldsymbol{X}^{-})^{-}\boldsymbol{H}\boldsymbol{X}^{-}$$

Ahora bien, sea

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{G}^{-}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{G}^{-})^{-} + (\boldsymbol{H}\boldsymbol{X}^{-})^{-}\boldsymbol{H}\boldsymbol{X}^{-}$$

Atendiendo a la prp. 86, ya que $(\boldsymbol{H}\boldsymbol{X}^{-})^{-}$ es la g-inversa de $\boldsymbol{H}\boldsymbol{X}^{-}$, $(\boldsymbol{H}\boldsymbol{X}^{-})^{-}\boldsymbol{H}\boldsymbol{X}^{-}$ es simétrica e idempotente. Igualmente ocurre con $\boldsymbol{X}\boldsymbol{G}^{-}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{G}^{-})^{-}$. Observemos que

$$\begin{aligned}\boldsymbol{N}^2 &= [\boldsymbol{X}\boldsymbol{G}^{-}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{G}^{-})^{-} + (\boldsymbol{H}\boldsymbol{X}^{-})^{-}\boldsymbol{H}\boldsymbol{X}^{-}] \\ &\quad \times[\boldsymbol{X}\boldsymbol{G}^{-}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{G}^{-})^{-} + (\boldsymbol{H}\boldsymbol{X}^{-})^{-}\boldsymbol{H}\boldsymbol{X}^{-}]\end{aligned}$$

Pruebas de hipótesis lineales sobre β

Parámetros de no centralidad

$$
\begin{aligned}
= \;& [\boldsymbol{XG}^-(\boldsymbol{XG}^-)^-]^2 + \boldsymbol{XG}^-(\boldsymbol{XG}^-)^-(\boldsymbol{HX}^-)^-\boldsymbol{HX}^- \\
& + (\boldsymbol{HX}^-)^-\boldsymbol{HX}^-\boldsymbol{XG}^-(\boldsymbol{XG}^-)^- + [(\boldsymbol{HX}^-)^-\boldsymbol{HX}^-]^2 \\
= \;& \boldsymbol{XG}^-(\boldsymbol{XG}^-)^- + (\boldsymbol{XG}^-(\boldsymbol{XG}^-)^-)'[(\boldsymbol{HX}^-)^-\boldsymbol{HX}^-]' \\
& + (\boldsymbol{HX}^-)^-\boldsymbol{HG}^-(\boldsymbol{XG}^-)^- + (\boldsymbol{HX}^-)^-\boldsymbol{HX}^- \\
= \;& \boldsymbol{XG}^-(\boldsymbol{XG}^-)^- + [(\boldsymbol{XG}^-)^-]'(\boldsymbol{G}^-)'\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{X}^-)'\boldsymbol{H}'[(\boldsymbol{HX}^-)^-]' \\
& + 0 + (\boldsymbol{HX}^-)^-\boldsymbol{HX}^- \\
= \;& \boldsymbol{XG}^-(\boldsymbol{XG}^-)^- + [(\boldsymbol{XG}^-)^-]'(\boldsymbol{G}^-)'(\boldsymbol{X}^-\boldsymbol{X})'\boldsymbol{H}'[(\boldsymbol{HX}^-)^-]' \\
& + 0 + (\boldsymbol{HX}^-)^-\boldsymbol{HX}^-
\end{aligned}
$$

Pruebas de hipótesis lineales sobre β

Parámetros de no centralidad

$$
\begin{aligned}
&= \boldsymbol{XG}^-(\boldsymbol{XG}^-)^- + [(\boldsymbol{XG}^-)^-]'(\boldsymbol{G}^-)'\boldsymbol{H}'[(\boldsymbol{HX}^-)^-]' \\
&\quad +(\boldsymbol{HX}^-)^-\boldsymbol{HX}^- \\
&= \boldsymbol{XG}^-(\boldsymbol{XG}^-)^- + [(\boldsymbol{XG}^-)^-]'(\boldsymbol{HG}^-)'[(\boldsymbol{HX}^-)^-]' \\
&\quad +(\boldsymbol{HX}^-)^-\boldsymbol{HX}^- \\
&= \boldsymbol{XG}^-(\boldsymbol{XG}^-)^- + 0 + (\boldsymbol{HX}^-)^-\boldsymbol{HX}^- \\
&= \boldsymbol{XG}^-(\boldsymbol{XG}^-)^- + (\boldsymbol{HX}^-)^-\boldsymbol{HX}^-
\end{aligned}
$$

Luego, $\boldsymbol{N}$ es idempotente (también simétrica por ser la suma de dos matrices simétricas).

Pruebas de hipótesis lineales sobre β

Parámetros de no centralidad

Ahora,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{N} &= \boldsymbol{X}\boldsymbol{G}^{-}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{G}^{-})^{-} + [(\boldsymbol{H}\boldsymbol{X}^{-})^{-}\boldsymbol{H}\boldsymbol{X}^{-}]' \\
&= \boldsymbol{X}\boldsymbol{G}^{-}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{G}^{-})^{-} + (\boldsymbol{X}^{-})'\boldsymbol{H}'[(\boldsymbol{H}\boldsymbol{X}^{-})^{-}]' \\
&= \boldsymbol{X}\boldsymbol{G}^{-}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{G}^{-})^{-} + [(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}']'\boldsymbol{H}'[(\boldsymbol{H}\boldsymbol{X}^{-})^{-}]' \\
&= \boldsymbol{X}\boldsymbol{G}^{-}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{G}^{-})^{-} + \boldsymbol{X}[(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}]'\boldsymbol{H}'[(\boldsymbol{H}\boldsymbol{X}^{-})^{-}]' \\
&= \boldsymbol{X}\boldsymbol{G}^{-}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{G}^{-})^{-} + \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{H}'[(\boldsymbol{H}\boldsymbol{X}^{-})^{-}]' \\
&= \boldsymbol{X}\{\underbrace{\boldsymbol{G}^{-}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{G}^{-})^{-} + (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{H}'[(\boldsymbol{H}\boldsymbol{X}^{-})^{-}]'}_{\boldsymbol{A}}\} \\
&= \boldsymbol{X}\boldsymbol{A}
\end{aligned}
$$

Veamos el rango de $\boldsymbol{A}$.

Pruebas de hipótesis lineales sobre β

Parámetros de no centralidad

$$\begin{aligned}
p-q &= \mathrm{r}(\boldsymbol{G}^-) = \mathrm{r}(\boldsymbol{X}^-\boldsymbol{X}\boldsymbol{G}^-) \le \mathrm{r}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{G}^-) \le \mathrm{r}(\boldsymbol{G}^-) = p-q \\
&\Rightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{G}^-) = p-q \\
q &= \mathrm{r}(\boldsymbol{H}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{H}\boldsymbol{X}^-\boldsymbol{X}) \le \mathrm{r}(\boldsymbol{H}\boldsymbol{X}^-) \le \mathrm{r}(\boldsymbol{H}) = q \\
&\Rightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{H}\boldsymbol{X}^-) = q
\end{aligned}$$

También,

$$\begin{aligned}
\mathrm{r}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{G}^-(\boldsymbol{X}\boldsymbol{G}^-)^-) &= \mathrm{r}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{G}^-) = p-q \\
\mathrm{r}[(\boldsymbol{H}\boldsymbol{X}^-)^-\boldsymbol{H}\boldsymbol{X}^-] &= \mathrm{r}(\boldsymbol{H}\boldsymbol{X}^-) = q
\end{aligned}$$

Pruebas de hipótesis lineales sobre β

Parámetros de no centralidad

Así

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(\boldsymbol{N}) &= \mathrm{tr}(\boldsymbol{XG}^{-}(\boldsymbol{XG}^{-})^{-}) + \mathrm{tr}[(\boldsymbol{HX}^{-})^{-}\boldsymbol{HX}^{-}] \\ \mathrm{r}(\boldsymbol{N}) &= \mathrm{r}(\boldsymbol{XG}^{-}(\boldsymbol{XG}^{-})^{-}) + \mathrm{r}[(\boldsymbol{HX}^{-})^{-}\boldsymbol{HX}^{-}] \\ &= p - q + q = p \end{aligned}$$

Se sigue que

$$p = \mathrm{r}(\boldsymbol{N}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{XA}) \leq \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) \Rightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) \geq p$$

Pero, es fácil ver que $\boldsymbol{A}$ es una matriz de dimensiones $p \times n$, entonces $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) \equiv p$

Pruebas de hipótesis lineales sobre β

Parámetros de no centralidad

Ahora, como $\boldsymbol{A}$ es de rango completo por filas, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-} = \boldsymbol{I}$. Luego,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{XA} &= \boldsymbol{N} = \boldsymbol{N}^2 = \boldsymbol{XAXA} \Rightarrow \boldsymbol{XAA}^{-} = \boldsymbol{XAXAA}^{-} \\ &\Rightarrow \boldsymbol{X} = \boldsymbol{XAX} \end{aligned}$$

Consecuentemente

$$\begin{aligned} \boldsymbol{XX}^{-} &= (\boldsymbol{XX}^{-})' = (\boldsymbol{XAXX}^{-})' = (\boldsymbol{XX}^{-})'(\boldsymbol{XA})' \\ &= (\boldsymbol{XX}^{-})'\boldsymbol{N}' = \boldsymbol{XX}^{-}\boldsymbol{N} = \boldsymbol{XX}^{-}\boldsymbol{XA} = \boldsymbol{XA} = \boldsymbol{N} \end{aligned}$$

de manera que, efectivamente

$$\boldsymbol{XX}^{-} - \boldsymbol{BB}^{-} = (\boldsymbol{HX}^{-})^{-}\boldsymbol{HX}^{-}$$

Pruebas de hipótesis lineales sobre β

Parámetros de no centralidad

Retomando el cálculo de ψ_1:

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)(\beta - \boldsymbol{H}^-\boldsymbol{h})'\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^- - \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^-)\boldsymbol{X}(\beta - \boldsymbol{H}^-\boldsymbol{h}) \\
&= \left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)(\beta - \boldsymbol{H}^-\boldsymbol{h})'\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{H}\boldsymbol{X}^-)^-\boldsymbol{H}\boldsymbol{X}^-\boldsymbol{X}(\beta - \boldsymbol{H}^-\boldsymbol{h}) \\
&= \left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)(\beta - \boldsymbol{H}^-\boldsymbol{h})'\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{H}\boldsymbol{X}^-)'[\boldsymbol{H}\boldsymbol{X}^-(\boldsymbol{H}\boldsymbol{X}^-)']^{-1}(\boldsymbol{H}\beta - \boldsymbol{h}) \\
&= \left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)(\beta - \boldsymbol{H}^-\boldsymbol{h})'(\boldsymbol{H}\boldsymbol{X}^-\boldsymbol{X})'[\boldsymbol{H}\boldsymbol{X}^-(\boldsymbol{X}^-)'\boldsymbol{H}']^{-1}(\boldsymbol{H}\beta - \boldsymbol{h}) \\
&= \left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)(\boldsymbol{H}\beta - \boldsymbol{h})'[\boldsymbol{H}\boldsymbol{X}^-(\boldsymbol{X}^-)'\boldsymbol{H}']^{-1}(\boldsymbol{H}\beta - \boldsymbol{h})
\end{aligned}$$

Pruebas de hipótesis lineales sobre β

Parámetros de no centralidad

Pero,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}\boldsymbol{X}^{-}(\boldsymbol{X}^{-})'\boldsymbol{H}' &= \boldsymbol{H}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'[(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}']'\boldsymbol{H}' \\ &= \boldsymbol{H}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{H}' \\ &= \boldsymbol{H}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{H}' \end{aligned}$$

entonces

$$\psi_1 = \left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)(\boldsymbol{H}\beta - \boldsymbol{h})'[\boldsymbol{H}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{H}']^{-1}(\boldsymbol{H}\beta - \boldsymbol{h})$$

Pruebas de hipótesis lineales sobre β

Parámetros de no centralidad

Ahora bien, de acuerdo con la prp. 87, $(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}$ es definida positiva puesto que $\boldsymbol{X}$ es de rango completo por columnas, y dado que una forma cuadrática es definida positiva si su matriz lo es (igualmente su inversa), la matriz $[\boldsymbol{H}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{H}']^{-1}$ es definida positiva. De manera que $\psi_1 = 0$ sí y sólo sí $\boldsymbol{H}\beta = \boldsymbol{h}$, esto es, sí y sólo si la hipótesis nula es cierta. Y de esta manera queda demostrada la validez del test propuesto.

Pruebas de hipótesis lineales sobre β

Una nota importante

Las hipótesis lineales desarrolladas, pueden alternativamente ser formuladas como H_0: $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{H}\beta - \boldsymbol{h} = \mathbf{0}$ versus H_1: $\boldsymbol{\theta} \neq \mathbf{0}$. Siendo así, y considerando que contamos con el estimador máximo-verosímil de β ($\widehat{\beta}$), debe ser claro para el lector que $\widehat{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{H}\widehat{\beta} - \boldsymbol{h}$, es el estimador máximo-verosímil de $\boldsymbol{\theta}$. Además, $\widehat{\beta} = \boldsymbol{X}^{-}\boldsymbol{Y}$ y $\widehat{\beta} \sim \mathrm{N}(\beta, \sigma^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1})$, luego:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[\widehat{\boldsymbol{\theta}}] &= \mathrm{E}[\boldsymbol{H}\widehat{\beta} - \boldsymbol{h}] = \boldsymbol{H}\mathrm{E}[\widehat{\beta}] - \boldsymbol{h} = \boldsymbol{H}\beta - \boldsymbol{h} = \boldsymbol{\theta} \\
\mathrm{V}[\widehat{\boldsymbol{\theta}}] &= \mathrm{V}[\boldsymbol{H}\widehat{\beta} - \boldsymbol{h}] = \mathrm{V}[\boldsymbol{H}\widehat{\beta}] = \boldsymbol{H}\mathrm{V}[\widehat{\beta}]\boldsymbol{H}' \\
&= \sigma^2\boldsymbol{H}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{H}'
\end{aligned}
$$

Así: $\widehat{\boldsymbol{\theta}} \sim \mathrm{N}(\boldsymbol{\theta}, \sigma^2\boldsymbol{H}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{H}')$.

Pruebas de hipótesis lineales sobre β

Una nota importante

Ahora,

$$W = \left(\frac{n-p}{q}\right)\left(\frac{\boldsymbol{Z}'(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-})\boldsymbol{Z}}{\boldsymbol{Z}'(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-})\boldsymbol{Z}}\right)$$

pero, por una parte, $\boldsymbol{Z}'(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-})\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{Y}'(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-})\boldsymbol{Y}$, entonces $\widehat{\sigma}^2 = [1/(n-p)]\boldsymbol{Z}'(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-})\boldsymbol{Z}$, y por otra:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{Z}'(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-})\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{Z}'(\boldsymbol{H}\boldsymbol{X}^{-})^{-}\boldsymbol{H}\boldsymbol{X}^{-}\boldsymbol{Z} \\
&= (\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{H}^{-}\boldsymbol{h})'(\boldsymbol{H}\boldsymbol{X}^{-})^{-}\boldsymbol{H}\boldsymbol{X}^{-}(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{H}^{-}\boldsymbol{h}) \\
&= (\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{H}^{-}\boldsymbol{h})'(\boldsymbol{H}\boldsymbol{X}^{-})'[\boldsymbol{H}\boldsymbol{X}^{-}(\boldsymbol{H}\boldsymbol{X}^{-})']^{-1} \\
&\times(\boldsymbol{H}\boldsymbol{X}^{-}\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{X}^{-}\boldsymbol{X}\boldsymbol{H}^{-}\boldsymbol{h}) \\
&= (\boldsymbol{H}\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{h})'[\boldsymbol{H}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{H}']^{-1}(\boldsymbol{H}\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{h})
\end{aligned}$$

Pruebas de hipótesis lineales sobre β

Una nota importante

Entonces,

$$\begin{aligned} W &= \left(\frac{1}{q\widehat{\sigma}^2}\right)(\boldsymbol{H}\widehat{\beta} - \boldsymbol{h})'[\boldsymbol{H}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{H}']^{-1}(\boldsymbol{H}\widehat{\beta} - \boldsymbol{h}) \\ &= \left(\frac{1}{q}\right)(\boldsymbol{H}\widehat{\beta} - \boldsymbol{h})'(\widehat{\mathrm{V}}[\boldsymbol{H}\widehat{\beta} - \boldsymbol{h}])^{-1}(\boldsymbol{H}\widehat{\beta} - \boldsymbol{h}) \\ &= \left(\frac{1}{q}\right)\widehat{\boldsymbol{\theta}}'(\widehat{\mathrm{V}}[\widehat{\boldsymbol{\theta}}])^{-1}\widehat{\boldsymbol{\theta}} \end{aligned}$$

Intervalos de confianza para β

IC para cualquier función lineal de los parámetros

Suponga la hipótesis $\mathrm{H}_0 : \boldsymbol{l}'\beta = l_0$ vs. $\mathrm{H}_1 : \boldsymbol{l}'\beta \neq l_0$. Ya contamos con un procedimiento para docimar cualquier hipótesis lineal sobre los parámetros, en particular, para probar esta hipótesis haciendo $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{l}'$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{H}) = q = 1$ y $\boldsymbol{h} = l_0$, entonces:

$$\begin{aligned}
W &= \left(\frac{1}{q\widehat{\sigma}^2}\right)(\boldsymbol{H}\widehat{\beta} - \boldsymbol{h})'[\boldsymbol{H}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{H}']^{-1}(\boldsymbol{H}\widehat{\beta} - \boldsymbol{h}) \\
&= \left(\frac{1}{\widehat{\sigma}^2}\right)(\boldsymbol{l}'\widehat{\beta} - l_0)'[\boldsymbol{l}'(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{l}]^{-1}(\boldsymbol{l}'\widehat{\beta} - l_0) \\
&= \frac{(\boldsymbol{l}'\widehat{\beta} - l_0)^2}{\widehat{\sigma}^2\boldsymbol{l}'(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{l}} \sim \mathrm{F}_{1,n-p} \text{ bajo } \mathrm{H}_0
\end{aligned}$$

Intervalos de confianza para β

IC para cualquier función lineal de los parámetros

Sea w el valor calculado de W para la muestra. La región de rechazo de la hipótesis nula son los $w \geq \mathrm{F}_{1-\alpha;1,n-p}$ para un nivel α de significación, luego, la región de aceptación de H_0 son los $w < \mathrm{F}_{1-\alpha;1,n-p} \equiv \mathrm{F}_T$. Entonces:

$$
\begin{aligned}
\frac{(\boldsymbol{l}'\widehat{\beta} - l_0)^2}{\widehat{\sigma}^2 \boldsymbol{l}'(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{l}} &< \mathrm{F}_T \\
(\boldsymbol{l}'\widehat{\beta} - l_0)^2 &< \mathrm{F}_T \widehat{\sigma}^2 \boldsymbol{l}'(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{l} \\
-\sqrt{\mathrm{F}_T \widehat{\sigma}^2 \boldsymbol{l}'(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{l}} &< \boldsymbol{l}'\widehat{\beta} - l_0 < \sqrt{\mathrm{F}_T \widehat{\sigma}^2 \boldsymbol{l}'(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{l}} \\
-\boldsymbol{l}'\widehat{\beta} - \sqrt{\mathrm{F}_T \widehat{\sigma}^2 \boldsymbol{l}'(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{l}} &< -l_0 < -\boldsymbol{l}'\widehat{\beta} + \sqrt{\mathrm{F}_T \widehat{\sigma}^2 \boldsymbol{l}'(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{l}} \\
\boldsymbol{l}'\widehat{\beta} - \sqrt{\mathrm{F}_T \widehat{\sigma}^2 \boldsymbol{l}'(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{l}} &< l_0 < \boldsymbol{l}'\widehat{\beta} + \sqrt{\mathrm{F}_T \widehat{\sigma}^2 \boldsymbol{l}'(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{l}}
\end{aligned}
$$

Intervalos de confianza para β

IC para cualquier función lineal de los parámetros

$$\boldsymbol{l}'\widehat{\beta} - \sqrt{\mathrm{F}_T \widehat{\sigma}^2 \boldsymbol{l}'(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{l}} \quad < \quad \boldsymbol{l}'\beta < \boldsymbol{l}'\widehat{\beta} + \sqrt{\mathrm{F}_T \widehat{\sigma}^2 \boldsymbol{l}'(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{l}}$$

y este es, claramente, un intervalo del $(1-\alpha)\,\%$ de confianza para cualquier función lineal de los parámetros $\boldsymbol{l}'\beta$.

Intervalo de confianza para σ^2

Intervalo de confianza para σ^2

Conocemos que $U = (n-p)\widehat{\sigma}^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-p}$, entonces:

$$\mathrm{P}[\chi^2_{1-\alpha_2;n-p} \leq U \leq \chi^2_{\alpha_1;n-p}] = 1-\alpha$$

con $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. Luego, despejando:

$$\mathrm{P}\left[\frac{(n-p)\widehat{\sigma}^2}{\chi^2_{\alpha_1;n-p}} < \sigma^2 < \frac{(n-p)\widehat{\sigma}^2}{\chi^2_{1-\alpha_2;n-p}}\right] = 1-\alpha$$

se tiene un intervalo del $(1-\alpha)\,\%$ de confianza para σ^2. La escogencia de α_1 y α_2, aunque arbitraria, puede hacerse minimizando la longitud del intervalo.