MODELO DE SUPERVIVENCIA APLICADO A LA BANCA VENEZOLANA

Maria Alejandra Ayala

Resumen

Los fenómenos de crisis bancaria pueden ser detectados a través de modelos que indican una situación de quiebra, pero que no indican su evolución en el tiempo para determinar su cambio de estado. Esta investigación por medio de la función de supervivencia construye los modelos para la banca comercial, uno a uno. Esta función considera implícitamente la construcción de un conjunto de pesos que afectan cada función individualmente y que pueden ser estimados a través de l modelo de riesgo proporcional, en donde los coeficientes de las variables explicativas se podría estimar a través de un modelo de regresión. Sin embargo, un modelo de red neuronal podría intervenir a través de la estimación de los pesos sinápticos que actúan como parámetros libres como estimador de los parámetros envueltos en esta función que completa el modelo de riesgo proporcional. Esta alternativa potencia la no linealidad y le da una capacidad de estimación al modelo mucho más amplio. Por otro lado, los valores umbrales de quiebra estimados mediante cada una de estas funciones de supervivencia que rigen para cada uno los bancos analizados, aportan un patrón de salida que podría ser estudiado conjuntamente con las razones financieras, en un modelo de pronóstico de quiebra usando redes neuronales con algoritmo de entrenamiento de retropropagación del error. (RN-RP). El buen desempeño de ambas técnicas mejoraría la capacidad de pronóstico tanto del umbral de quiebra mediante las funciones de supervivencia como su capacidad de generalización para fenómenos en los bancos no conocidos aún por el modelo.

Palabras claves: función de supervivencia, probabilidad asociada, riesgo financiero, redes neuronales, modelo de riesgo proporcional, retropropagación del error.

Introducción

Diferentes han sido las técnicas estadísticas que las entidades bancarias han utilizado para describir su comportamiento; más importante aún, para intentar identificar situaciones irregulares que pueden desembocar en crisis financieras, las cuales implican altos costos en términos de perdida de crecimiento económico.

Aunque los modelos probit han demostrado buen desempeño en este sentido, estos modelos, solo permiten estimar la probabilidad de que un banco "*quiebre*", pero no informan acerca del tiempo que las entidades vulnerables podrían demorar en demostrar problemas.

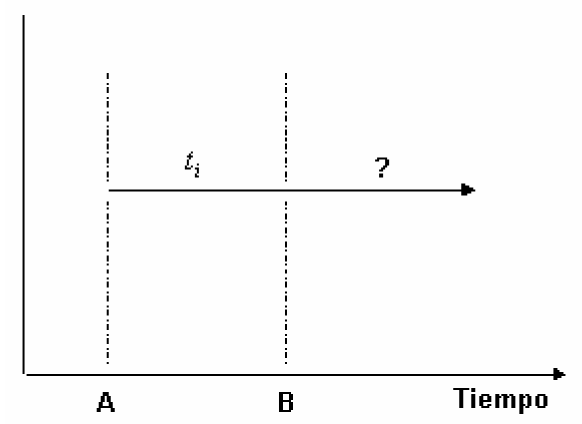
El objetivo general de este trabajo es investigar *cuándo* es probable que la entidad financiera cambie de estado. Dicho de otra forma, la variable aleatoria de interés, es la duración del lapso de tiempo que tarda la entidad en cambiar de estado. Específicamente interesa el tiempo que tarda en ocurrir el cambio de estado y cuales son las variables que más influyen en el cumplimiento del cambio de estado.

La técnica que permite describir el comportamiento de datos que corresponden al tiempo o duración desde un origen bien definido hasta la ocurrencia de un cambio de estado o punto final se denomina *"análisis de supervivencia*" (Klein , J. et al., 1997).

Esta técnica posee varias ventajas con respecto a técnicas clásicas como la estimación de modelos logit "clásicos", de regresión o análisis discriminante. Estas ultimas son de naturaleza estática, mientras que el análisis de supervivencia capta la temporalidad y la variación de las circunstancias a lo largo del tiempo. Esto se debe a que son análisis de corte transversal de los tiempos de duración observados $t_1, t_2, \cdots, t_n$ para las n entidades financieras que conforman la población.

El concepto central de un modelo de supervivencia no es la probabilidad de que un cambio de estado ocurra (por ejemplo, probabilidad que un banco quiebre), sino más bien la probabilidad condicional de que ocurra un cambio de estado dado que tenia en el tiempo anterior otro estado (por ejemplo, que un banco quiebre dado que en el periodo anterior no había quebrado). Este tipo de análisis permite además incluir en el modelo factores explicativos constantes y variables en el tiempo. En las técnicas clásicas, el querer introducir factores cambiantes en el tiempo surgen problemas de colinealidad y autocorrelación, haciéndose necesario la corrección de estos inconvenientes (Allison, P. D. , 1982).

El problema principal que hace necesario el uso de modelos de supervivencia es la existencia de censura en los datos. La censura ocurre cuando el resultado o evento de interés (cambio de estado) no se observa para todos los individuos dentro del periodo en que se realiza la recolección de los datos. Por lo tanto, muchas de las observaciones representan la duración registrada hasta el momento de la medición y no el lapso de tiempo transcurrido hasta la ocurrencia del evento. Para el caso particular del estudio del tiempo que podría tardar una entidad financiera en cambiar de estado, el tipo de censura que se presenta, se conoce como por la derecha.



A y B marcan el inicio y la finalización del periodo de estudio. La censura por la derecha ocurre cuando el cambio de estado no se ha producido, ya sea porque el estudio finalizó antes de que sucediera el el cambio de estado o bien porque la entidad financiera presento un cambio de estado por una causa distinta a la quiebra[1].

Modelo

En primera instancia, debe conocerse si la probabilidad de que un banco quiebre dado que no ocurrió en un momento anterior es constante, creciente o decreciente en el tiempo. Identificar cuáles son los periodos de mayor riesgo de quiebra, lo cual es útil en la planificación de políticas preventivas.

La función de riesgo, tiene como objetivo describir el riesgo en diferentes periodos de tiempo. Representa una secuencia de probabilidades condicionales,

$f(t) = P($banco quiebre en el momento t dado que en t-1 no había quebrado$)$

Si definimos T una variable aleatoria discreta no negativa que represente el tiempo de vida de un banco[2] , T puede tomar los siguientes valores $0 \le t_0 \le t_1 \le t_2 \cdots$, la función de probabilidad asociada a la variable aleatoria T viene dada por

$$f(t_i) = P(T = t_i) \quad \text{para } i = 1, 2, ... \qquad (0.1)$$

La función de supervivencia viene dada por:

[1] Más adelante se especifican los criterios para identificar bancos en quiebra
[2] Se considera que un banco vive, mientras no se registre su quiebra.

$$S(t)=\sum_{j;t_j\geq T} f(t_j) \qquad (0.2)$$

representa la probabilidad de que *T* sea mayor o igual a un valor *t*, es decir, la probabilidad de que la supervivencia del banco sea $T\geq t$. En este punto debe aclararse, que si no existiese censura, la estimación de esta función sería simplemente contar cuantas entidades financieras llegaron hasta el momento t_j respecto al total.

La función de riesgo puede definirse como:

$$\lambda_j = P(T=t_j \mid T\geq t_j)=\frac{f(t_j)}{S(t_j)} \qquad j=0,1,2,... \qquad (0.3)$$

Representa la probabilidad de que una entidad financiera quiebre en el momento t_j dado que no quebró (sobrevivió) hasta el momento t_j.

La función de supervivencia puede escribirse como [3] $1-\lambda_j=1-\frac{f(t_j)}{S(t_j)}$ de donde

$$S(t_j)=\prod_{i=0}^{j-1}(1-\lambda_j) \qquad (0.4)$$

De esta forma, una estimación no paramétrica de la función de supervivencia sería

$$\hat{S}(t)=\prod_{j|t_j<t}(1-\hat{\lambda}_j) \qquad (0.5)$$

Si existe censura, entonces para algunas entidades financieras, se observa que su vida llego hasta un momento determinado, pero no el tiempo completo. Definimos d_j como el número de entidades financieras que quiebran en el momento *j*. n_j como el número total de entidades financieras que estuvieron en el momento j, usualmente se conoce n_j como el conjunto de riesgo o simplemente el número al riesgo (Hosmer et al., 1999). Puede definirse entonces,

$$\hat{\lambda}_j = \frac{d_j}{n_j} \tag{0.6}$$

Este estimador es conocido como el estimador no paramétrico de Kaplan-Meier o también estimador del producto limite (Hosmer et al., 1999). Este estimador incorpora información de todas las observaciones disponibles, sean o no censuradas, además es una función que depende solo de los valores de la muestra y permite describir la relación existente entre la función de riesgo y el tiempo de supervivencia hasta que ocurre la quiebra de la entidad financiera. La validez del estimador de kaplan-Meier descansa en los supuestos de que las entidades financieras que se retiran del estudio tienen un destino semejante al de las entidades que permanecen y que el tiempo durante el cual una entidad financiera entra al estudio no tiene efecto independiente en la respuesta. De forma más general puede estimarse la probabilidad de supervivencia como

$$\hat{S}(t_j) = \frac{(n_j - d_j)}{n_j} \tag{0.7}$$

Una ves que se tiene la función de supervivencia, es de interés investigar si el riesgo λ de quiebra difiere sistemáticamente entre las entidades financieras, esto significa, identificar variables explicativas de la heterogeneidad observada en función del riesgo. Por ejemplo, si el riesgo de quiebra disminuye en el tiempo, debemos identificar, que características distinguen las entidades financieras con alto riesgo de quiebra de aquellas con bajo riesgo de quiebra.

La forma de estudiar la heterogeneidad observada es introduciendo en el modelo *p* variables explicativas Z_p que caracterizan una entidad financiera o su entorno, por ejemplo depósitos totales entre activos totales, pasivos externos, tasa interbancaria del sistema bancario, etc. Se define entonces un vector de variables $\mathbf{Z}_{ij} = \left[\mathbf{z}_{1ij}, \mathbf{z}_{2ij,\cdots,}\mathbf{z}_{pij}\right]$ donde cada elemento del vector representa la característica *p* para la entidad financiera *i* en el momento *j*. La inclusión del vector de características puede hacerse de formas que son las más comunes. La primera, con un modelo de falla acelerada (AFTM) y la segunda con un modelo de riesgo proporcional.

La diferencia fundamental entre estos modelos es la forma de introducir los efectos de las variables explicativas. En un modelo AFTM, el efecto de las variables explicativas se hace directamente sobre el tiempo de supervivencia. En el modelo de riesgo proporcional el efecto se introduce sobre la función de riesgo.

En este trabajo se utiliza un modelo de riesgo proporcional, una de las ventajas de este modelo sobre un modelo AFTM es la interpretación, esta indica el efecto de la variable explicativa sobre el riesgo de quiebra. Por otra parte, la incorporación de variables explicativas que cambian en el tiempo[3] y la posibilidad de estimar los efectos de las variables explicativas sobre el riesgo sin necesidad de especificar una función paramétrica para el riesgo base[4] (Pita Fernández, 1995).

Modelo de Riesgo proporcional propuesto por Cox[5]

En este modelo el efecto del vector $[\mathbf{Z}_{ij}]$ se produce de manera multiplicativa sobre la función de riesgo mediante un factor que no depende del tiempo de duración. Sea $\lambda_0(t)$ la función de riesgo base. La función de riesgo para la *i*-ésima entidad financiera puede escribirse como una proporción de la función de riesgo base, esto es (Hosmer et al., 1999)

$$\lambda(t;z) = \lambda_0(t)\varphi(z) \qquad (0.8)$$

---

[3] Como por ejemplo múltiples razones de finalización

[4] El riesgo base es una función que expresa el comportamiento de una entidad financiera en referencia, cuando las variables explicativas toman el valor cero (0)

[5] Propuesto por Cox en 1972

donde $\varphi(z_i)$ es una función de los valores del vector de variables explicativas para la *i*-ésima entidad financiera. Esta función se interpreta como el riesgo en el momento *t* para una entidad cuyo vector de variables explicativas es $\mathbf{Z}_i$, relativo al riesgo para una entidad financiera cuyo vector de variables explicativas $\mathbf{Z}$ es cero.

Dado que el riesgo relativo $\varphi(z_i)$ no puede ser negativo, se propone una función $\varphi(z_i) = e^{(\mu_i)}$, donde $\mu_i = \beta_1 z_{1i} + \beta_2 z_{2i} + \cdots + \beta_p z_{pi}$. El modelo de riesgo proporcional general para la *i*-ésima entidad financiera es (Hosmer et al., 1999)

$$\lambda_i(t \mid z) = e^{\left(\beta_1 z_{1i} + \beta_2 z_{2i} + \cdots + \beta_p z_{pi}\right)} \lambda_0(t) \qquad (0.9)$$

La función de riesgo base es la misma para todas las entidades financieras. Por este motivo para dos entidades financieras con variables explicativas $\mathbf{Z}$ y $\mathbf{Z}^*$, el cociente de las respectivas funciones de riesgo viene dado por (Hosmer et al., 1999):

$$\frac{\lambda(t \mid z)}{\lambda(t \mid z^*)} = \frac{e^{\left[\sum_{p=1}^{p} \beta_p z_p\right]} \lambda_0(t)}{e^{\left[\sum_{p=1}^{p} \beta_p z^*_p\right]} \lambda_0(t)} = e^{\left[\sum_{p=1}^{p} \beta_p (z_p - z^*_p)\right]} \qquad (0.10)$$

Esta razón se conoce como riesgo relativo, es constante en el tiempo y las tasas de riesgo son proporcionales. La interpretación de lo coeficientes esta dada por la siguiente derivada:

$$\frac{\partial \ln \lambda(t \mid z)}{\partial z_p} = \beta_p \qquad (0.11)$$

β_p da el cambio proporcional en la función de riesgo que resulta de un cambio marginal en la p-ésima variable explicativa. Si $\mathbf{Z}$ y $\mathbf{Z}^*$ difieren en la p-ésima variable explicativa, la cual es una variable binaria, se tiene (Hosmer et al., 1999):

$$\frac{\lambda(t \mid z)}{\lambda(t \mid z^*)} = e^{\beta_p} \qquad (0.12)$$

En este modelo existen algunos supuestos implícitos. Se supone que no existe influencia de las entidades financieras en la estimación del modelo, se supone que no existe influencia de las entidades financieras en la estimación de cada parámetro del modelo, se supone inexistencia de heterogeneidad no observada[6], se supone adecuacidad de la forma funcional.

Si se supone que los datos son generados por un modelo de riesgo proporcional de tiempo continuo, pero observados solo en tiempos discretos $(t_i - 1, t_i]$, la correspondiente función de riesgo en tiempo discreto viene dada por (Prentice R. L. et al., 1978):

$$\lambda_j(z_{ij}) = 1 - \exp^{-e^{\left\{\left(\beta_1 z_{1i} + \beta_2 z_{2i} + \cdots + \beta_p z_{pi}\right) + \lambda(t)\right\}}} \qquad (0.13)$$

donde $\lambda_j(z_{ij})$ representa las tasas de riesgo en tiempo discreto para la *i*-ésima entidad financiera en cada periodo de tiempo de *j* = 1, 2, ..., *t*. La diferencia fundamental con el modelo continuo es la interpretación de la función de riesgo. En el caso discreto es la probabilidad condicional, en el caso continuo es la referencia a la tasa instantánea de riesgo. Cada elemento del vector $\mathbf{Z}$ representa una característica para la *i*-ésima entidad financiera en el momento *j,* el vector de coeficientes β[7] es semejante al vector β del modelo de riesgos proporcionales presentado anteriormente.

Debido a que no se conoce el momento exacto de quiebra de una entidad financiera, sólo se sabe que ocurre dentro de un intervalo de tiempo determinado, el modelo (1.13) es el empleado en el presente trabajo.

El modelo discreto presenta ventajas en la interpretación y verificación de los supuestos. Al permitir incorporar variables dicotómicas asociadas

---

[6] toda la heterogeneidad presente en las entidades financieras es recogida en las variables explicativas.

[7] El vector β representa los parámetros a estimar

a los distintos momentos del tiempo[8], el modelo discreto proporciona una estimación directa de la función de riesgo base a partir de la cual se puede construir la función de supervivencia base. Adicionalmente, la verificación del supuesto de proporcionalidad es sencilla. Esto es, verificar si los efectos de las variaciones en las características de las entidades financieras sobre el riesgo son independientes del momento del tiempo en que se mida. En este caso el supuesto de proporcionalidad es mas flexible que en el caso continuo, ya que los efectos solo deben ser proporcionales en los intervalos y no en cada instante del tiempo.

Respecto al supuesto de inexistencia de heterogeneidad no observable, es posible introducir en el modelo la posibilidad de heterogeneidad no observable entre las diferentes entidades financieras del siguiente modo (Meyer, B. D., 1990).

$$\lambda_j(z_{ij}) = 1 - \exp\left\{ -e^{-e^{\left\{\left(\beta_1 z_{1i} + \beta_2 z_{2i} + \cdots + \beta_p z_{pi}\right) + \lambda(t)\right\} + \log(e)}} \right\} \qquad (0.14)$$

la inclusión del nuevo termino, resume la heterogeneidad no observable, representada por e, la cual es una variable aleatoria con distribución Gamma con media uno y var σ^2. Observe que cuando la estimación es no paramétrica la elección de la distribución no es importante.

La variable aleatoria e recoge factores que pueden afectar el riesgo, pero que no son observados directamente, esto puede deberse a que no están disponibles en los datos o bien por errores de medición en los datos.

Si definimos un indicador de censura como $c_i = 1$ si la supervivencia de la *i*-ésima entidad financiera se observa completamente y $c_i = 0$ si la supervivencia esta censurada, la función log de la verosimilitud es (Meyer, B. D., 1990).

---

[8] los parámetros de la función de riesgo base

$$\sum_{i=1}^{N} \log\left[(1-c_i)A_i + (1-c_i)B_i\right] \qquad (0.15)$$

donde:

$$A_i = \left[1+\sum_{j=1}^{t_i}\left\{\exp(I_{ij}+\ln(\mathrm{var}))\right\}\right]^{\frac{1}{var}}. \qquad B_i = \left[1+\sum_{j=1}^{t_i-1}\left\{\exp(I_{ij}+\ln(\mathrm{var}))\right\}\right]^{\frac{1}{var}} - A_i \ \text{ para } t_i > 1$$

$$I_{ij} = \left[\left(\beta_1 z_{1i} + \beta_2 z_{2i} + \cdots + \beta_p z_{pi}\right) + \lambda(t)\right].$$

Si $t_i = 1 \ \ B_i = 1 - A_i$

Las Redes Neuronales y el preprocesamiento de los modelos de supervivencia

El análisis de supervivencia permite encontrar la probabilidad condicional de quiebra de una entidad financiera. En realidad, la quiebra de una entidad financiera, no es un suceso que ocurre aisladamente o de manera fortuita, antes de que una entidad financiera quiebre, dicha entidad pasa por diferentes etapas, desde una etapa inicial, en la que no hay problemas hasta etapas en las cuales se gesta la crisis.

Tales etapas pueden ser vistas como categorías y si selecciona un umbral de quiebra por cada banco como patrón de salida para conformar un conjunto de entrenamiento conjuntamente con las razones financieras que permitan construir los modelos de las redes neuronales usando RN-RP. Con este modelo se pretende realizar tal clasificación para cualquier entidad financiera en las categorías preasignadas.

Los modelos serán replicados varias veces con diferentes grupos de datos de entrenamiento manteniendo los parámetros iniciales uniformes, la topología y la arquitectura de la red neuronal. Los errores medio cuadráticos (RMSE) serán calculados para cada modelo entrenado, verificado y generalizado. Luego de su tabulación, serán observadas las variaciones en los resultados del RMSE obtenidos para determinar el grado de consistencia conseguido en la construcción de los modelos bajo condiciones uniformes de diseño. Finalmente, se evalúa la robustez del método verificando el alto grado de consistencia con la variación registrada en los RMSE en cada una de las fases.

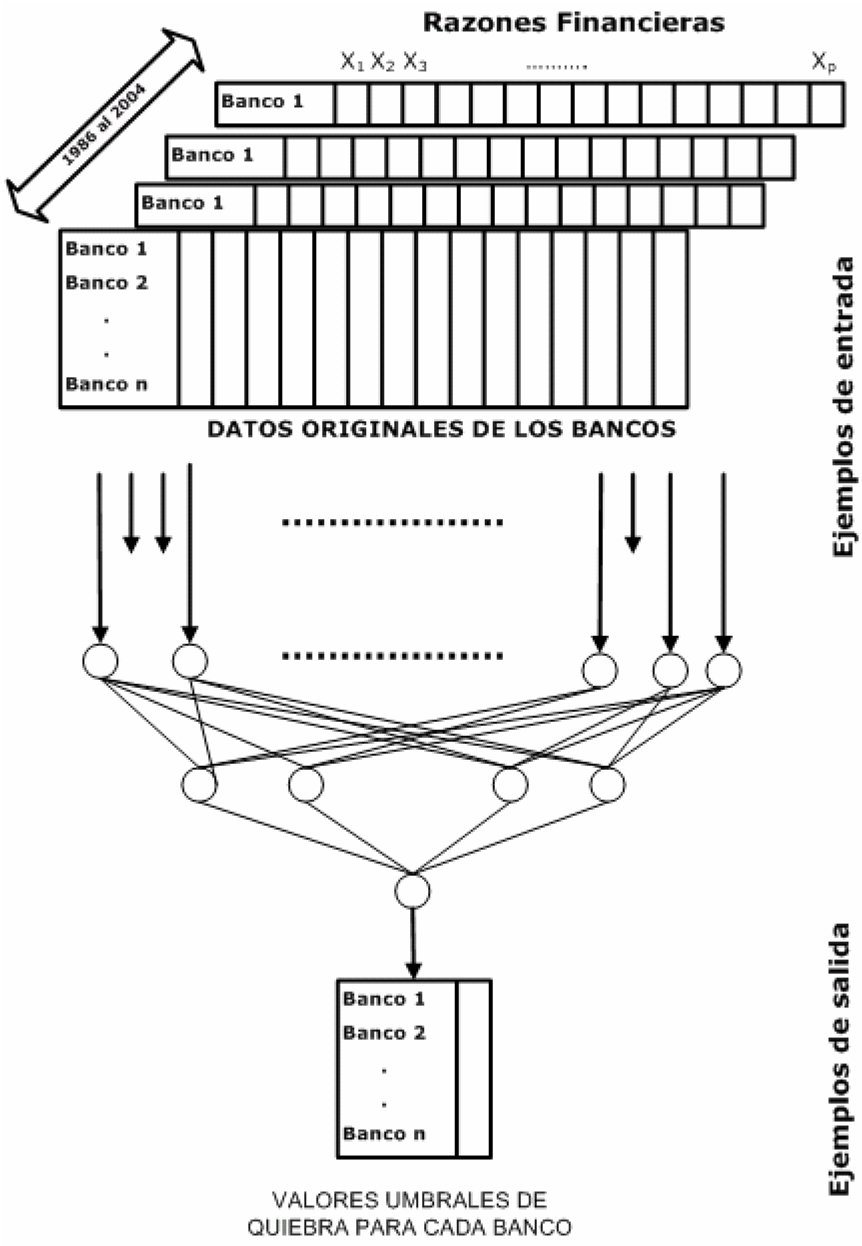


Figura 1. Entrenamiento de una RN-RP usando los valores umbrales de quiebra de las funciones de supervivencia

Las figuras anterior y siguiente muestran el esquema funcional del modelo para ambos casos: la figura 1 muestra el entrenamiento de una red para crear un modelo de pronóstico de quiebra y la figura 2 la estimación de los parámetros libres o pesos sinápticos para las variables explicativas requeridas en las funciones de supervivencia.

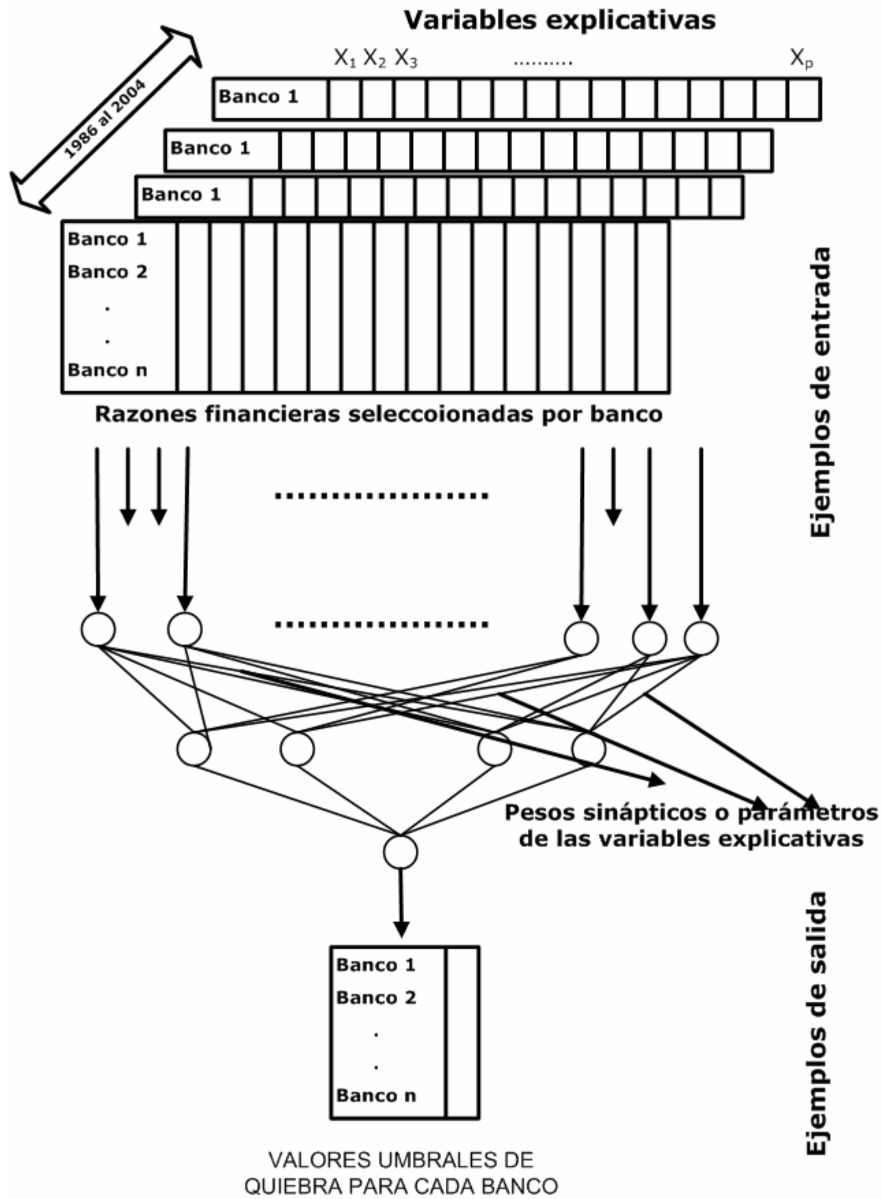


Figura 2. Estimación de los parámetros de las variables explicativas requeridas en las funciones de supervivencia

La ventaja de utilizar redes neuronales en este sentido, radica en el hecho de las redes pueden sintetizar algoritmos a través de un proceso de aprendizaje.

Referencias.

Klein , J. And M. Moeschberguer. Survival Analysis. Techniques for Censored and Truncated Data. Springer – Verlag. New York Inc. 1997.

Allison, P. D. (1982). Discrete time methods for the analysis of event histories. Sociological Methodology. Bass Publishers, San Francisco.

Hosmer y Lemeshow. Applied Survival Analysis. John Wiley & Sons, INC. (1999)

Pita Fernández, S. CAD ATEN PRIMARIA 1995; 2: 130-135.

Prentice R. L. Y Gloecler (1978). Regression Analysis of grouped survival data with application to breast cancer data. Biometrics 34 pág. 57-67

Meyer, B. D. (1990). Unemployment insurance and unemployment spells. Econometrika 58 (4) pág. 757 – 782.