UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS Y SOCIALES
ESCUELA DE ADMINISTRACIÓN Y CONTADURÍA PÚBLICA
DEPARTAMENTO DE EMPRESAS
CATEDRA DE PRODUCCIÓN Y ANÁLISIS DE LA INVERSIÓN

FUNCIONES DE PRODUCCIÓN Y PROGRAMACIÓN LINEAL

Prof. Francisco García

Mérida, 03 de febrero de 2004

Función de Producción

Relación (o función matemática) que especifica la cantidad de producción que puede producir una empresa, con la cantidad de

1) Productividad Total (PT) :

$$\mathbf{PT = Q = f\,(X, X^0)}$$

Se denota X como el insumo que permanece variable y el resto de los insumos que permanecen fijos se denotan como $X^{0.}$

Suponiendo que sólo interviene un factor variable. La productividad total está dada por la variación del volumen total de producto, al variar las cantidades empleadas del factor.

2) Productividad Media (PMe):

$$\mathbf{PMe = PT/X}$$
$$\mathbf{PMe = f\,(X, X^0)/X}$$

Es la cantidad de producto generado por cada unidad de insumo utilizado.

3) Productividad Marginal (PMg):

$$\mathbf{PMg = \Delta PT/\Delta X = \partial PT/\,\partial X}$$

Representa la última unidad generada de producto, por la última unidad de insumo variable utilizada.

Etapas de la función de producción simple

Etapa I, Rendimientos Crecientes: Se inicia donde el nivel de X es cero y finaliza al nivel en el cual el PMe y el PMg se cruzan, es decir en el punto del Óptimo Técnico.

Óptimo Técnico: Es aquella combinación de insumo variable e insumo fijo que hacen constante o fijo el producto medio.

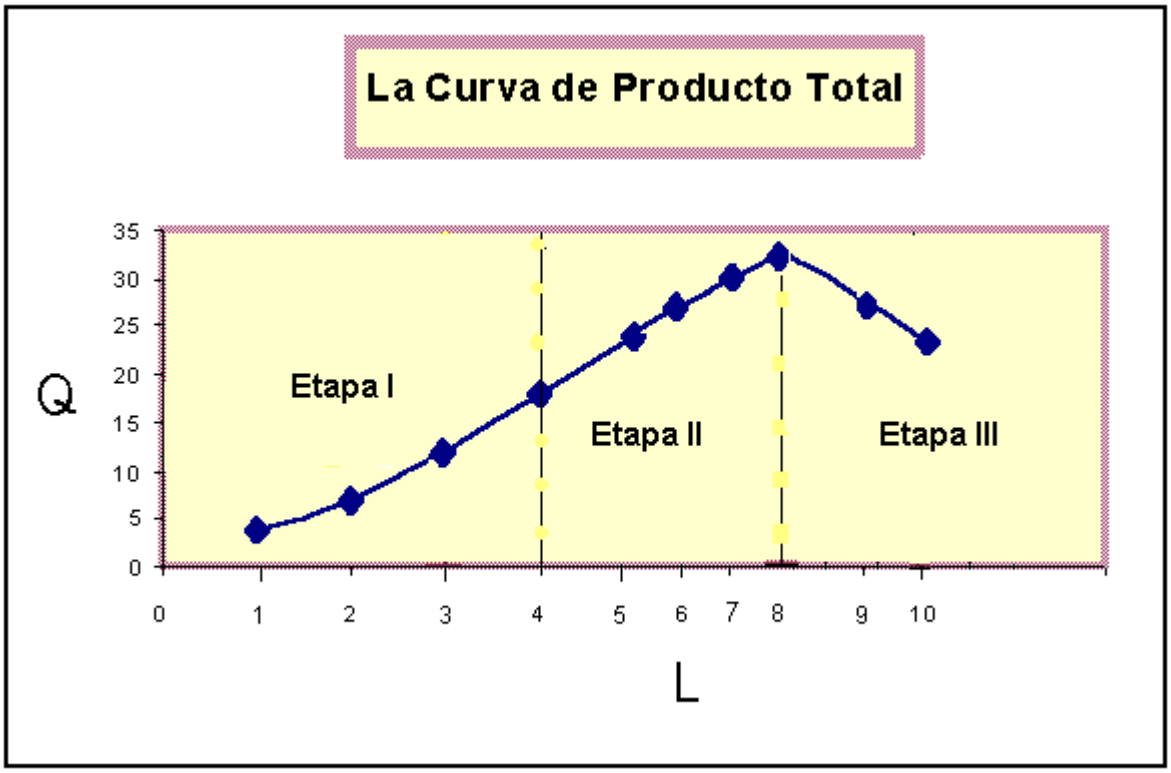
Etapa II, Rendimientos Decrecientes: Se inicia en el máximo gradiente y finaliza al nivel del insumo para el cual el PMg se hace cero y el PT alcanza su máximo, es decir en el Máximo Técnico.

Máximo Técnico: Es aquella combinación de insumos variable el insumo fijo que permiten alcanzar un máximo el la curva de la productividad total.

En esta etapa la curva del PMe es decreciente, pero no llega a ser cero. A medida que aumenta el insumo variable, la producción se incrementa pero en menor proporción. Esta es la etapa racional de producción.

Etapa III, Rendimientos Negativos: Comienza en el punto del Máximo Técnico y finaliza cuando el PT y el PMg se hacen igual a cero.

La curva de producto total se divide en tres etapas de producción como ilustra la siguiente gráfica.

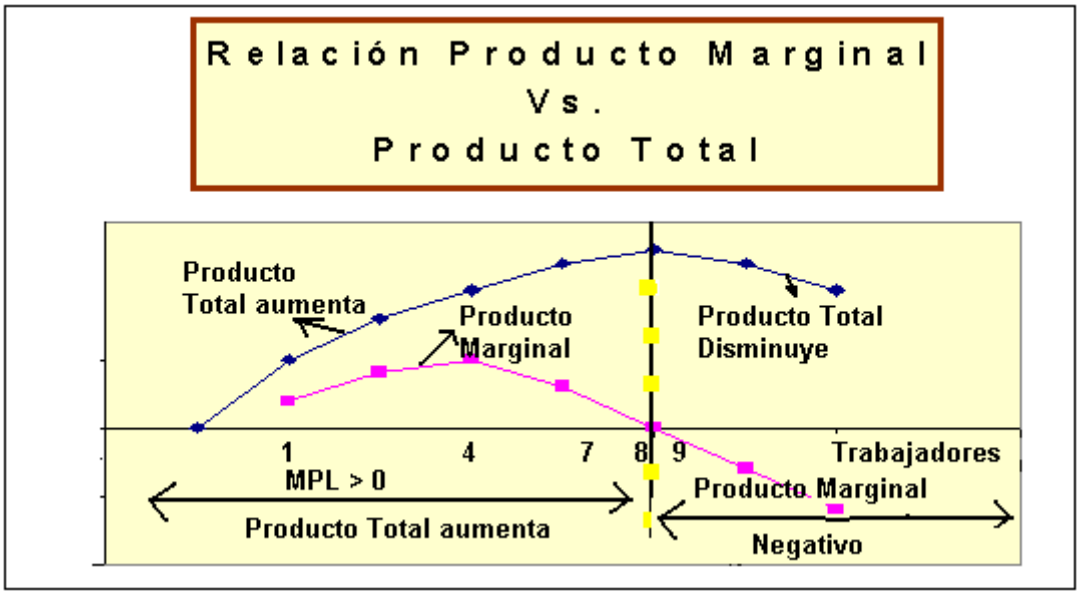


Relación entre Producto Marginal y Producto Promedio

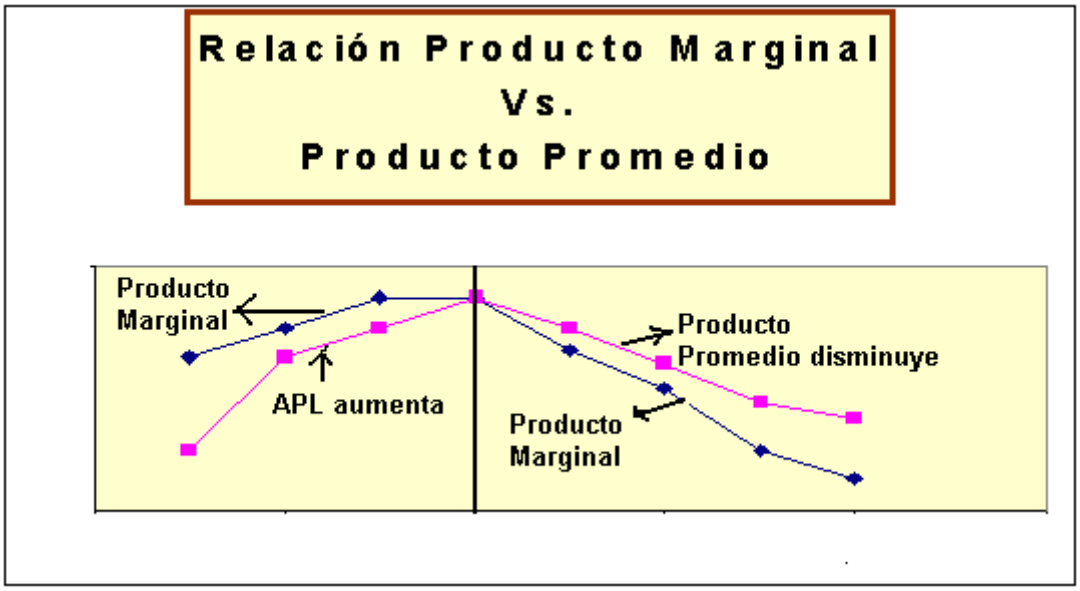
Mientras que el PMg está por encima del PMe, notamos que el producto promedio aumenta.

Cuando el PMg es igual al PMe, el producto promedio es máximo. Observamos que el producto promedio empieza a disminuir cuando el producto marginal físico es menor que el producto promedio es decir PMg < PMe.

La siguiente gráfica ilustra la relación entre el producto marginal y el producto total.



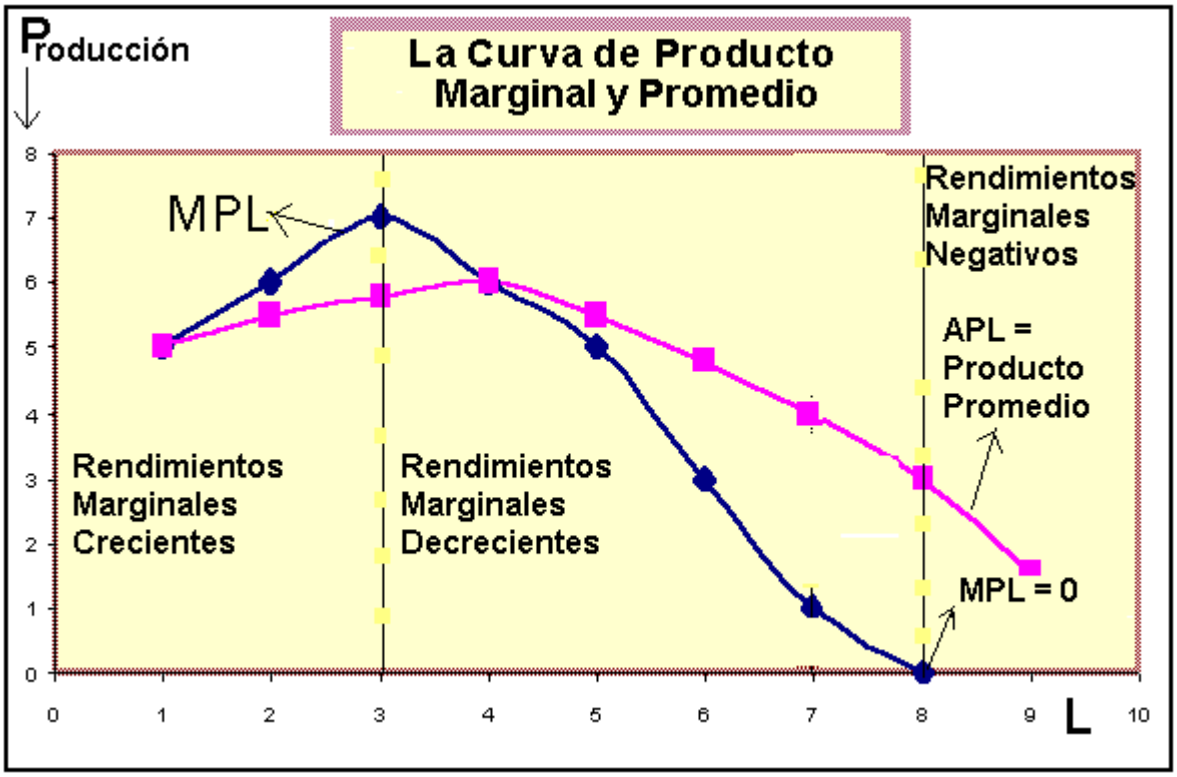
La siguiente gráfica ilustra la relación entre el producto marginal y el producto Promedio.



Ley de los Rendimientos Marginales Decrecientes

Manteniendo constante la tecnología y todos los insumos excepto uno de ellos, a medida que el insumo variable se incrementa más allá de cierto punto, la tasa de incremento del nivel de producción resultante disminuirá.

La siguiente gráfica ilustra la ley de rendimientos marginales decrecientes.



<u>Producción con varios Insumos Variables (relación insumo-insumo)</u>

Objetivos:

c) Determinación de la combinación óptima de factores.
d) Cual combinación de factores proporciona máximo beneficio.

Cuando una empresa puede cambiar el uso de un insumo actúa a corto plazo, mientras que a largo plazo puede cambiar todos los insumos.

Simplificando, si sólo hay insumos variables, la función de producción es del tipo:

$$Q = f(K,L)$$

Isocuantas

Muestran todas las combinaciones de insumos o factores que una empresa puede utilizar para obtener una cantidad específica de producto (Curvas de Iso-Producción).

Curva Isocuanta:

$$Q = f(K,L)$$

Características de una curva Isocuanta

- Debe tener pendiente negativa en todos los puntos que indiquen las combinaciones que el empresario funcional y racional debe utilizar.
- La isocuantas no se cortan entre si.
- La curva isocuanta es convexa con respecto al origen (generalmente)

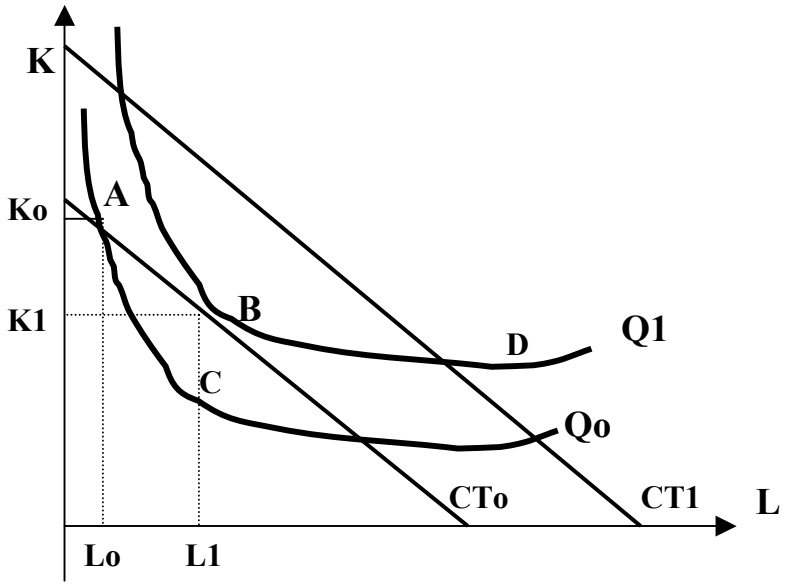
Isocostos

Muestra todas las combinaciones de dos insumos que se pueden emplear con un egreso total dado para insumos.

Siguiendo con el supuesto : $Q = f(K,L)$
Suponga : w, es el precio del factor trabajo (L)
R, es el precio del factor capital(K)

Recta de Isocosto : $CT = w\,L + r\,K$

Pendiente de la recta de Isocosto : $- W/r$



- Punto óptimo (minimización de costos) : B

- El punto A no minimiza el costo. Los recursos no son asignados Eficientemente.

- En A y B los costos son iguales ; pero en B se produce mas.

- El punto C implica un costo menor pero también menor producción. El punto D es inalcanzable.

- En el punto B :

  La pendiente de la recta de Isocosto = Tasa de Sustitución Técnica

  Osea : $$-\frac{W}{r} = -\frac{\Delta K}{\Delta L}$$

  O también : $$\frac{w}{r} = \frac{PMgL}{PMgK} \Rightarrow \frac{PMgL}{W} = \frac{PMgK}{r}$$

  (Condición de Optimización en la producción)

- La unión de los puntos de tangencia formados por un desplazamiento paralelo de la recta de isocosto da lugar a la llamada *"Senda de Expansión o Ruta de Expansión de la Escala"*

Tasa Marginal de Sustitución Técnica

Mide la cantidad que un factor debe aumentar para sustituir la disminución en una unidad del otro factor para producir la misma cantidad de producto.

Casos

a) Maximizar la cantidad de producto dada una cantidad limitada de dinero.
b) Minimizar el costo, dada una cantidad determinada de insumos para fabricar el producto final.

<u>Producción Conjunta (relación producto-producto)</u>

Objetivos:
a) Determinación las combinaciones óptimas de productos
b) Cual combinación de productos proporciona máximo beneficio o minimiza los costos.

Producción Conjunta Acoplada

Es cuando se puede obtener dos o más productos de un proceso de producción, pero la cantidad que se obtenga de uno de ellos estará sujeta a la cantidad que se obtenga del otro producto.

Producción Conjunta no Acoplada

Es cuando se producen dos o más artículos, pero si uno de ellos aumenta el otro disminuye o viceversa debido a que los productos derivados compiten por el mismo recurso.

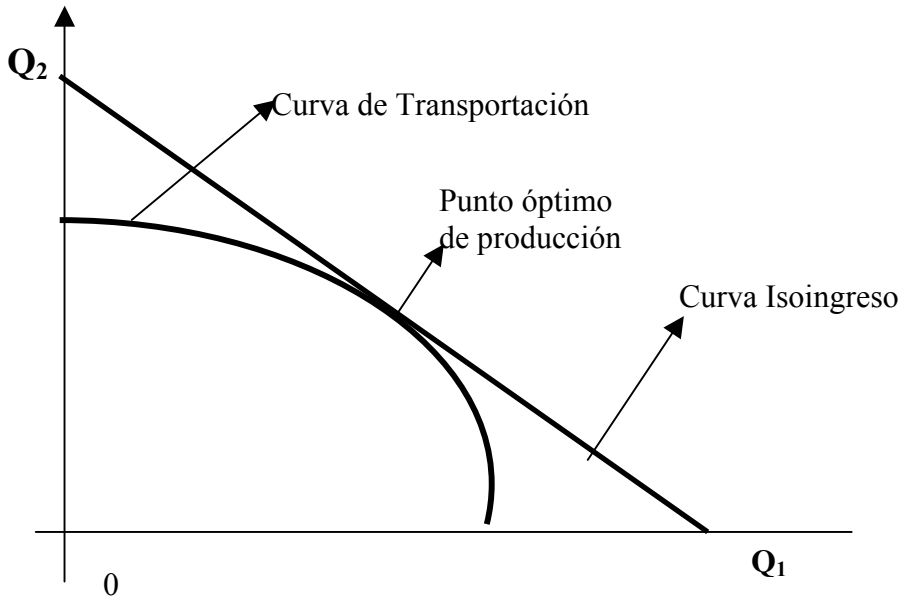
Simplificando, si sólo hay un insumo principal y escaso, la función de producción es del tipo :

$$\mathbf{X = h\ (q_1, q_2)}$$

Donde X, representa una curva de transformación de un recurso escaso.
q_1 y q_2, representan subproductos.

Curva Isoingreso

Muestra todas las combinaciones de dos productos que se pueden emplear con una estimación de ingreso total dado para estos productos.



Casos

c) Dada una cantidad específica de insumo, maximizar la combinación de productos.
d) Dada un capacidad máxima de producción, minimizar el costo del insumo.

<u>Programación Lineal</u>

La programación lineal puede definirse como una técnica matemática que determina la mejor asignación de los recursos limitados optimizando (maximizando o minimizando) un objetivo. El término lineal se refiere a que todas las ecuaciones matemáticas, que representan tanto las restricciones en los recursos como el objetivo a optimizar, deben ser lineales.

Planteamiento del problema

Desde el punto de vista matemático, el enunciado completo de un problema de programación lineal considera:

1. Un conjunto de inecuaciones lineales simultaneas que representan condiciones o restricciones del problema.

2. una función objetivo lineal que justamente expresa o representa lo que va a ser optimizado.

El problema podría consistir en:

Maximizar una función condicionada por desigualdades lineales cuando se trata de utilidades productos; o bien, en minimizar una función lineal condicionada por desigualdades lineales, cuando se trata de costos.

El enunciado matemático, en sentido general, de un problema de programación lineal (P.L.) será: Hallar los valores de X_1, X_2,..., X_n que minimizan la función objetivo Z.

$$Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 \ldots + C_n Xn$$

Sujeto a:

1.
$$\begin{array}{c} a_{11} X_1 + a_{12} X2 + \ldots + a_{1n} X_n \leq b_1 \\ a_{12} X_1 + a_{22} X2 + \ldots + a_{2n} X_n \leq b_2 \\ \vdots \\ a_{m2} X_1 + a_{m2} X_2 + \ldots + a_{2m} X_n \leq b_m \end{array}$$

3. $X_1 \geq 0$; $X_2 \geq 0 \ldots X_n \geq 0$, esto es, las variables deben ser no negativas.

Problemas:

1. Dada la siguiente información

No. de Trabajadores	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Capital	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Producto total	0	3	10	15	18	20	20	18	14

Se pide:

a) Calcular el producto medio y el marginal.
b) Graficar el P.T. y el PMg.
c) Explicar las etapas de la producción e indicar donde se está haciendo un uso óptimo del factor variable.
d) Explicar la ley de los rendimientos físicos marginales decrecientes.

2. En cierto tipo de industria química, mano de obra masculina y femenina son factores substituibles con arreglo a la siguiente función de producción determinada mediante observaciones empíricas:

$$q = 8X^{0.4} \text{ x } Y^{0.6}$$

Donde q es el volumen de producción medido por un índice, X y Y es la mano de obra masculina y femenina respectivamente. Se desea generar 1000 unidades de producto. El precio de cada unidad de X es 120 unidades monetarias y Y cuesta 90. Optimice este problema.

3. Una determinada empresa utiliza la siguiente función de producción para generar su producción:

$$q = 737 + 8M^2 + 14A + MA + 4A^2 + 20M$$

Donde q representa la cantidad producida y A y M los insumos utilizados relacionados con la siguiente recta:

$$C = 2M + A$$

Se tiene una limitación presupuestal de 200 unidades monetarias. Utilizar lagrange para optimizar este problema.

4. Una empresa lleva a cabo troquelados de placas circulares de acero de 10 centímetros. Además se obtiene el recorte de la banda de acero. Por cada 1000 placas resultan 60 kilogramos de recorte. El costo de la maquinaria y mano de obra asciende a 500 UM/hora. Se fabrican 200 placas circulares por hora y para una placa se precisan 0.236 kilogramos de acero en rollo, cuyo precio es de 900 UM/kilogramo. El recorte puede venderse a 238 UM/kilogramo. Se laboran 5 días a la semana con jornadas de 8 horas diarias. El precio de venta de cada troquelado es de 1.000 UM cada una.

a) Calcular el número de placas que se fabrican al año.
b) El ingreso total, la ganancia o pérdida correspondiente.

5. Sea la función de producción:

$$q = 1{,}8x^2y^2 - 0{,}02x^3y^3$$

Si hacemos constante a y para 5 unidades.

Se pide:

a) Determinar el producto medio y marginal de la función con respecto a x.
b) Para que valor de x se maximiza la función del producto total.
c) Para que valor de x de maximiza la función del producto medio.
d) Para que valor de x se iguala el PMe con el PMg.
e) ¿Qué valores limitan cada una de las etapas de la producción?
f) Graficar en excel y verificar los resultados obtenidos.
g) Verificar si se cumple la ley de los rendimientos físicos decrecientes.

6. Una compañía determina que el costo total C, el ingreso total I y el número de unidades producidas x están relacionadas por:

$$C = 100 + 0{,}015x^2 \qquad \text{y} \qquad I = 3x$$

Determine la tasa de producción x que maximiza las utilidades de la empresa. Encuentre dicha utilidad cuando x = 100.

7. El costo de reparaciones, C, en función de los números *x* y *y* de inspecciones en dos puntos de un proceso industrial, está dado por:

$$C = 2x^2 + 3y^2 + xy - 22x + 5$$

Para minimizar el costo, ¿qué numero de inspecciones deberá llevarse a cabo en cada punto si $x - y = 2$?

8. Una empresa utiliza la siguiente función de transformación:

$$x = 3a^2 + 3b^2 - ab$$

Si cada unidad de a la puedo vender a 60 unidades monetarias y las de b a 50. Determinar el ingreso máximo que se puede obtener si la empresa tiene 5000 unidades de factor. Graficar las curvas de transformación e isoingreso.

9. Una compañía automotriz puede usar su planta para fabricar tanto automóviles compactos, como grandes, o ambos. Si a y b son el número de automóviles compactos y grandes que se producen (en cientos por día), determínese la combinación de automóviles que el optimiza el problema si la relación de transformación es $x = a^2 + b^2 + 40a + 30b$ teniendo presente una restricción de ingreso de $536{,}75 = 30a + 20b$.

10. Una empresa utiliza la siguiente función de producción para optimizar sus productos:

$$q = 15x + 17y + 16xy$$

Donde el precio de cada unidad de x en de 40 unidades monetarias y el de y de 30, si la empresa quiere fabricar y vender 1.000 unidades de producto. Calcular la cantidad mínima de dinero que se puede gastar para obtener la cantidad de producción deseada.

11. Se quieren fabricar dos productos distintos P_1 y P_2, utilizando dos recursos escasos R_1 y R_2. Para producir una unidad de P_1 se necesitan 16 unidades de R_1 y 4 unidades de R_2, para producir una unidad de P_2 se requiere de 12 unidades de R_1 y 8 unidades de R_2. La empresa dispone de 200 unidades de R_1 y 100 unidades de R_2. Cada unidad de P_1 producida y vendida genera una utilidad de 8 unidades monetarias y la de P_2 genera 10 unidades monetarias. Suponiendo que los valores son fijos para cualquier nivel de producción, se debe encontrar la cantidad de cada uno de los productos que se debe generar sin sobrepasar las limitaciones de recursos a fin de que se maximice la utilidad.

12. En un fundo se disponen de 200 jornadas de trabajo, 60.000 unidades monetarias de capital 225 hectáreas de tierra apta para todo cultivo. El dueño desea sembrar trigo y maíz, productos cuyos precios en el mercado es de 30 unidades monetarias para un kilo de trigo y 25 unidades monetarias para la misma cantidad de maíz. Para producir trigo se necesita del doble del capital que para el maíz. Para producir este último se emplean 5 jornadas por tonelada para el trigo 4 jornadas por tonelada. Para producir un kilo de trigo se requiere de 0.0065 hectáreas de tierra y 0.005 para un kilo de maíz. Calcular la cantidad en kilogramos de trigo y maíz que se deben producir para maximizar el ingreso sin sobrepasar las disponibilidades.

13. Hace muchos, mucho años, Lucrecia Borgia invito a cenar a 50 de sus enemigos. El *piece de resístanse* iba a ser veneno. En aquellos oscuros días solamente existían en el mercado, el veneno X y el veneno Y. Antes de preparar el menú, sin embargo, la extraordinariamente talentosa joven consideró alguna de las restricciones de su plan:

a) Si empleara más de media libra de veneno, los invitados lo detectarían fácilmente y se rehusarían a comer.
b) La bruja privada de Lucrecia, una versión medieval del moderno equipo de planeación, en alguna ocasión le había propuesto ciertos números mágicos dentro del siguiente verso:

Uno de Y y de X dos
Si es menos de la mitad
falla y se vuelve calamidad

c) El veneno X matará a 75 y el veneno Y matará a 200 personas por libra.
d) El veneno X cuesta 100 piezas de oro la libra y el veneno Y cuesta 400 piezas de oro la libra.

Después de elegir un menú que permitiera disimular el sabor del veneno, Lucrecia se dio cuenta de que no tenía dinero suficiente. En realidad era poco probable que pudiera organizar otra orgía de envenenamientos ese mismo mes. Así que llamó a su alquimista, un hombre muy sabio y le contó su problema. Ayude al alquimista a resolver este problema. En caso de fracasar, el castigo será una invitación a la cena de Lucrecia.

15. Resolver el siguiente enunciado por el método gráfico:

$$\text{Max } 5000x + 4000y$$

s. a.

$x + y \geq 5$

$x - 3y \leq 0$

$10x + 15y \leq 150$

$20x + 10y \leq 160$

$30x + 10y \geq 135$

$x, y \geq 0$

ANEXO
Multiplicadores de Lagrange.

Se pueden utilizar los multiplicadores de Lagrange para resolver los problemas no lineales en los cuales las restricciones son igualdades. Consideramos los del tipo siguiente:

$$\begin{aligned} &\max\ (\text{o min})\ z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &s.a \quad g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_1 \\ &\qquad g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_2 \\ &\qquad\qquad \vdots \\ &\qquad g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_m \end{aligned} \quad (1)$$

Para resolverlo, asociamos un **multiplicador l** $_1$ con la i-ésima restricción y formamos el **lagrangiano**

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) &= f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &+ \sum_{i=1}^{i=m} \lambda_i \left[b_i - g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \right] \end{aligned} \quad (2)$$

Donde $\lambda_i (i = 1, 2, \ldots, m)$ son constantes (desconocidas) denominadas *multiplicadores de Lagrange*. Después resuélvase el sistema de n + m ecuaciones:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

Teorema : *Si existe una solución al programa* (1), ésta se encuentra contenida entre las soluciones al sistema anterior, siempre y cuando $f(X)$ y $g_i(X)(i = 1, 2, \ldots, m)$ todas tengan primeras derivadas parciales continuas y la *matriz jacobina* de *m* x *n*,

$$J = \left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right]$$

tenga rango *m* en **X = X***

El método de los multiplicadores de Lagrange es equivalente a emplear las ecuaciones de restricción para eliminar algunas de las variables x de la función objetivo y resolver después un problema de maximización sin restricciones para las restantes variables x.

Ejemplo:

$$\bar{y} = \frac{20}{7} - \frac{1}{4} = \frac{73}{28}$$
$$\bar{x} = \frac{19}{7} - \frac{1}{4} = \frac{69}{28}$$

El hessiano para $f(x,y)$ es

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Ya que cada mejor principal de primer orden es negativo, y $H_2(x,y) = 7 \rangle 0$, $f(x,y)$ es una función cóncava. La restricción es lineal y, por lo tanto da la solución óptima para el programa no lineal.

Así, la empresa tendría que comprar 69/28 minutos de tiempo de televisor y 73/28 minutos de tiempo de radio. Ya que l = ¼ , el gasto de un D extra (en miles) (para un D pequeño) aumentaría los ingresos de la empresa en aproximadamente 0.25 D dólares (en miles).

En general, si la empresa tiene a dólares para gastar en la publicidad, se puede demostrar que $\lambda = \frac{11 - a}{4}$. Vemos que si gasta más dinero en la publicidad, el incremento en el ingreso por cada dólar adicional para la publicidad se hace más pequeño.

BIBLIOGRAFÍA

1.
Textos del Curso:
Nicholson, W. (2002) Teoría Microeconómica, Octava Edición, Thomson Learningl, USA. (N)
Pindyck, R y D. Rubienfeld (2001) **Microeconomía** 5ª. Edición. Prentice Hall. (P)
2.
Referencia Básica de Economía:
Mankiw, N. G. (1998) Principios de Economía, McGraw-Hill, Madird.
3.
Referencia Intermedia de Microeconomía:
Varian, H (1998) **Microeconomia** Intermedia, Cuarta Edición, Antoni Bosch, editor.
Binger, B. R. y E. Hoffman (1998) Microeconomics with Calculus, Segunda Edición,
Addison Wesley.
4.
Referencias Avanzadas de Microeconomía
Jehle, G y P. Reny (2000) Advanced Microeconomic Theory. 2ª.Edición. Addison
Wesley Longman.
Varian, H. (1992) Análisis Microeconómico, Anthoni Bosch, Tercera Edición.
Mas-Collel, A. y M. Whinston (1995) Microeconomic Theory, Oxford U. P.
5.
Referencias de Investigación de Operaciones
Gould, Eppen y Schmidt. (1992) Investigación de Operaciones en la Ciencia Administrativa. Tercera Edición, Prentice Hall. Naulcalpan de Juárez, Edo. de México
Hernández, Marisela. (1985) Programación Lineal: Elementos básicos y problemas resueltos. Coeditado por la Facultad de Economía y el Consejo de Publicaciones de la Universidad de los Andes. Mérida-Venezuela.