Solución Examen III

Nombre: Apellido: C.I.: Firma: Fecha: 20/05/2005

Prof. Gudberto León

MÉTODOS ESTADÍSTICOS I – EXAMEN III

PARTE I: (2 puntos)
Llene los espacios en blanco

1. Si $Z \sim N(0;1)$, entonces:
   a. $P(Z=0)$ = **0**
   b. $P(Z>-4{,}25)$ = **1**

2. Sean U y W dos variables aleatorias independientes, si $U \sim N(\mu_U = 5;\ \sigma_U = 2)$ y $W \sim N(\mu_W = 2;\ \sigma_W = 1)$, entonces $(U+W) \sim N(\mu_{U+W} = 5+2 = 7;\ \sigma^2_{U+W} = \sigma^2_U + \sigma^2_W = 2^2 + 1^2 = 5)$

PARTE II:

Nota*: ** Recuerde que este es un examen de desarrollo por lo que **debe** incluir **todos** los pasos necesarios que justifiquen los resultados. Favor encerrar sus respuestas de forma tal que sea fácil de encontrarlas en su desarrollo. **Solamente** se responderán aquellas preguntas tendientes a aclarar enunciados de los problemas. Las respuestas a las preguntas de la Parte II de este examen debe escribirlas en papel **tipo examen** (papel ministro) No son válidas las respuestas escritas en esta hoja de preguntas. *En los problemas que lo ameriten,* ***debe *definir las variables aleatorias que utilice en forma explícita y en términos del problema y escribir como se distribuye* (esto útimo tiene una puntuación de 0,5 puntos).

1. Un análisis estadístico de 1000 llamadas de larga distancia realizadas en las oficinas principales de la empresa Andes Corporation indica que la duración de estas llamadas tiene una distribución normal con media 240 segundos y desviación estándar 40 segundos.
   a. ¿Qué porcentaje de estas llamadas duró menos de de 180 segundos?
   b. ¿Cuál es la probabilidad de que cierta llamada dure entre 160 y 320 segundos?
   c. ¿Cuál es la duración de una llamada en particular si sólo 1% de las llamadas son más breves? **(4 puntos)**

2. El número promedio de clientes que llegan a un banco es de 120 por hora.
   a. ¿Cuál es la probabilidad de que en una hora lleguen exactamente 40 clientes?
   b. ¿Cuál es la probabilidad de que en un minuto lleguen por lo menos tres clientes?
   c. ¿Cuál es la desviación estándar ? **(3,5 puntos)**

3. Se recibe un pedido de cajas con 100 tornillos cada una. Una caja es aceptada si, elegida una muestra aleatoria de 10 tornillos, resultan a lo sumo 2 defectuosos. Si la caja que va a ser examinada tiene 3 unidades defectuosas, ¿Cuál es la probabilidad de que se acepte? **(3 puntos)**

4. Un club nacional de automovilistas comienza una campaña telefónica con el propósito de aumentar el número de miembros. Con base en experiencia previa, se sabe que una de cada 10 personas que reciben la llamada se une al club. Si en un día 2500 personas reciben la llamada telefónica ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos 230 de ellas se inscriban en el club? **(3 puntos)**

5. Supóngase que la probabilidad de que alguien que se conecta por Internet al sitio en la web “www.TaBarato.com” compre algún artículo es 0,20. Si el sitio tiene 10 personas conectadas en el minuto siguiente,
   a. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna de las personas compre un artículo?
   b. ¿Cuál es la probabilidad de que cuando mucho dos personas compren un artículo?
   c. ¿Cuál es la probabilidad de que 9 de las personas no compre algún artículo?
   d. ¿Cuál es el número esperado de personas que compran un artículo? **(4,5 puntos)**

FORMULARIO:

$$P(X=x) = p^x(1-p)^{1-x};\quad x = 0,1.$$

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{(n-x)!\,x!}$$

$$P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x};\quad x = 0,1,\ \dots,n$$

$$P(X=x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!};\quad x = 0,1,2,\dots$$

$$P(X=x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$
$$-\infty < x < \infty;\ -\infty < \mu < \infty;\quad \sigma > 0$$

Solución Examen III

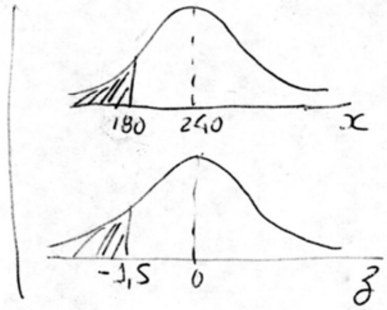
1) X : Duración de las llamadas telefónicas en las oficinas principales de Andes Corporation.

$$X \sim N(\mu = 240 \; ; \; \sigma = 40)$$

a. $P(X < 180) = P\left(Z < \dfrac{180-240}{40}\right)$

$= P(Z < -1{,}5)$

$\boxed{\therefore P(X < 180) = 0{,}0668}$



6,68% de las llamadas duró menos de 180 segundos

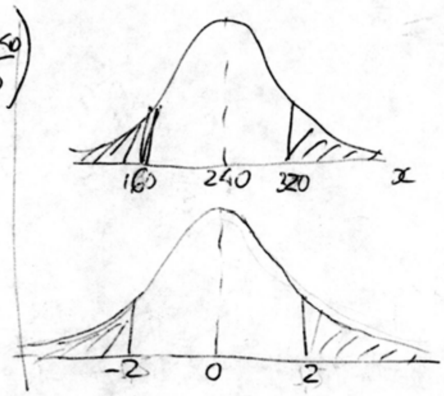
b. $P(160 < X < 320) = P\left(\dfrac{160-240}{40} < Z < \dfrac{320-240}{40}\right)$

$= P(-2 < Z < 2)$

$= P(Z < 2) - P(Z < -2)$

$= 0{,}9772 - 0{,}0228$

$\boxed{\therefore P(160 < X < 320) = 0{,}9544}$



c. $P(X < x) = 0{,}01$

c. $P(X < x) = 0{,}01$

$\Rightarrow P\left(Z < \dfrac{x-240}{40}\right) = 0{,}01$

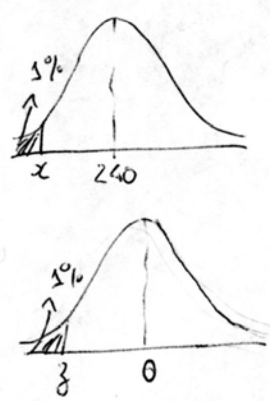
Pero $P(Z < z) = 0{,}01$

y así $z = -2{,}33$

Entonces: $-2{,}33 = \dfrac{x-240}{40}$

$\Rightarrow x = 40(-2{,}33) + 240$

$\boxed{x = 146{,}8 \text{ segundos}}$



Solución Examen III

2) X: Número de clientes que llegan a un banco en <u>una hora</u>.

$$X \sim \text{Poisson}\ (\lambda = 120)$$

a. $P(X = 40) = \dfrac{e^{-120}\ 120^{40}}{40!} \approx 0$

b. Y: Número de clientes que llegan a un banco en <u>un minuto</u>.

$$Y \sim \text{Poisson}\ (\lambda = 120/60 = 2)$$

$$P(Y \geq 3) = 1 - P(Y < 3) = 1 - [P(Y=0) + P(Y=1) + P(Y=2)]$$

$$= 1 - [0{,}13534 + 0{,}27067 + 0{,}27067] = 1 - 0{,}67668$$

$$\boxed{\therefore\ P(Y \geq 3) = 0{,}32332}$$

c. $\sigma = \sqrt{\lambda} = \sigma = \sqrt{120} \Rightarrow \boxed{\sigma = 10{,}95}$

3) X: Número de tornillos defectuosos en una muestra aleatoria de 10 tornillos seleccionados (sin reemplazo) de una caja que contiene 100 tornillos, de los cuales tres están defectuosos

$$X \sim H\ (N = 100;\ M = 3;\ n = 10)$$

$$P(X = x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$$

$$= \frac{\binom{3}{0}\binom{97}{10}}{\binom{100}{10}} + \frac{\binom{3}{1}\binom{97}{9}}{\binom{100}{10}} + \frac{\binom{3}{2}\binom{97}{8}}{\binom{100}{10}}$$

$$= 0{,}7265 + 0{,}2477 + 0{,}0250$$

$$\boxed{\therefore\ P(X \leq 2) = 0{,}9992}$$

Solución Examen III

4) X: Número de personas que se unen al club nacional de automovilistas cuando se contactan telefónicamente 2500 personas.

$$X \sim Bin\left(n = 2500;\ p = 1/10 = 0{,}10\right)$$

$P(X \geq 230)$ =?

Como $n = 2500$ es grande y $p = 0{,}10$ no está cerca de cero ni de uno, además $n \cdot p = 2500 \cdot 0{,}10 = 250 \geq 5$, entonces se puede usar la aproximación normal a la binomial:

$$X \underset{aprox}{\approx} N\left(\mu = n \cdot p = 250;\ \sigma = \sqrt{npq} = 15\right)$$

Así,

$$P(X \geq 230) \approx P\left(Z \geq \frac{(230 - 0{,}5) - 250}{15}\right) = P(Z \geq -1{,}37)$$

$$P(X \geq 230) \approx 1 - P(Z < -1{,}37) = 1 - 0{,}0853$$

$$\boxed{\therefore\ P(X \geq 230) = 0{,}9147}$$

5) X: No. de personas conectadas a "www.ToBarato.com" que compran algún artículo en una m.a de 10 personas conectadas.

$$X \sim Bin(n = 10;\ p = 0{,}20)$$

a. $P(X = 0) = 0{,}1074$
b. $P(X \leq 2) = 0{,}6778$
c. $P(X = 1) = 0{,}2684$
d. $E(X) = n \cdot p = 10 \times 0{,}20 = 2$

Se espera que dos personas compren algún artículo, cuando 10 estan conectadas al sitio web.