Universidad de los Andes
Facultad de Ciencias Económicas y Sociales
Escuela de Estadística

Apuntes de Métodos Estadísticos I

ELEMENTOS BÁSICOS DEL ÁLGEBRA DE CONJUNTOS

Prof. Gudberto J. León R.

Contenido

Lista de Figuras

Álgebra de Conjuntos (Elementos de la Teoría de Conjuntos) [1]

Un ***conjunto*** es una colección de objetos donde es posible, cuando se requiere, determinar sin ambigüedad si cualquier objeto dado es un miembro o no de la colección.

Cuando una lista completa de los miembros de un conjunto es dada, se acostumbra escribirlos dentro de llaves, separados por comas. Por ejemplo, un conjunto que contiene las cuatro letras a, b, c, d puede ser escrito como $\{a, b, c, d\}$. Como se está hablando solamente de los objetos del conjunto, no hay razón para que los miembros tengan que ser escritos en un orden particular. Por ejemplo, los conjuntos $\{a, b, c, d\}$, $\{d, b, a, c\}$, $\{d, c, a, b\}$ representan la misma colección y en consecuencia el mismo conjunto. Es decir, que el orden en que se listan los miembros de un conjunto es irrelevante. Tampoco hay utilidad alguna en repetir un mismo elemento, así solamente se listan los elementos distintos en un conjunto. Por ejemplo, el conjunto $\{a, a, b, b, b, b, c\}$ es igual al conjunto $\{a, b, c\}$.

Se acostumbra denotar los conjuntos por letras mayúsculas y los elementos de estos conjuntos por letras minúsculas. Si x está en el conjunto A se escribirá:

$$x \in A$$

y significa "x es un elemento del conjunto A".

Si x no está en A, se escribirá:

$$x \notin A$$

y significa "x no es un elemento del conjunto A".

[1] La mayor parte de esta sección está fundamentada en Khazanie, Ramakant. Op. Cit. Págs. 5-13.

Ejemplo 1**:**

Si $A = \{Pedro, María, José\}$, entonces $Pedro \in A$ y $Carlos \notin A$.

■

Como en el conjunto $A = \{Pedro, María, José\}$ se listan todos sus elementos, se dice que está escrito en ***notación por extensión***. Si un conjunto tiene un gran número de elementos puede ser tedioso, o en algunos casos imposible, especificar el conjunto por una lista completa de sus elementos. Una notación que es utilizada para describir tales conjuntos es llamada ***notación por comprensión***. Si se representa un miembro típico del conjunto por x, entonces el conjunto de todos los elementos x tales que x tiene alguna propiedad, digamos la propiedad P, se escribe como:

$\{x \,/\, x$ tiene la propiedad P$\}$.

Ejemplo 2**:**

a. Podría escribirse el conjunto de los números reales mayores que cuatro como:

$\{x \,/\, x$ es un numero real, y $x > 4\}$

b. El conjunto consistente de pares ordenados de números reales, donde el primer componente es dos veces el segundo componente, puede ser escrito como:

$\{(u, v) \,/\, u, v$ números reales, y $u = 2v\}$

■

Las llaves deben leerse como "El conjunto de todos ..." y la barrita vertical como "tal que"

Un conjunto muy importante es el conjunto de todos los *números reales*, denotado por R. Usando la notación por comprensión:

$\mathrm{R} = \{x \,/\, x$ es un numero real, $-\infty < x < \infty\}$

También se necesitan los siguientes conjuntos: Suponga que a y b son números reales con $a < b$. Entonces,

- $[a,b] = \{x / x \in \mathrm{R}, a \le x \le b\}$ (Intervalo cerrado)
- $(a,b) = \{x / x \in \mathrm{R}, a < x < b\}$ (Intervalo abierto)
- $[a,b) = \{x / x \in \mathrm{R}, a \le x < b\}$
- $(a,b] = \{x / x \in \mathrm{R}, a < x \le b\}$
- $(a,\infty) = \{x / x \in \mathrm{R}, a < x < \infty\}$
- $[a,\infty) = \{x / x \in \mathrm{R}, a \le x < \infty\}$
- $(-\infty, a] = \{x / x \in \mathrm{R}, -\infty < x \le a\}$
- $(-\infty, a) = \{x / x \in \mathrm{R}, -\infty < x < a\}$

Un conjunto que no tiene elementos es llamado ***conjunto vacío*** o ***conjunto nulo***. Se denota por $\varnothing$. Los siguientes son ejemplos de conjuntos vacíos:

Ejemplo 3:

1. El conjunto de los enteros impares divisibles por 4
2. $\{(x, y) / x, y \in \mathrm{R}, |x| + |y| < 0\}$
3. $\{x / x \in \mathrm{R}, x^2 = -1\}$

■

Un conjunto que no es vacío es llamado *no vacío*.

En adelante se asumirá que hay un conjunto básico Ω. A Ω se le llamará el ***conjunto universo*** o ***universal*** para la discusión y trabajo estrictamente dentro del rango de este conjunto. El conjunto universal variará de problema en problema, pero dentro de un problema dado será fijo y actuará como el conjunto básico a partir del cual todos los otros conjuntos serán construidos.

Suponga que A y B son dos conjuntos que consisten de elementos de Ω. Entonces, se dice que B es un ***subconjunto*** de A, y se escribe $B \subset A$ (o equivalentemente como $A \supset B$[2]), si cada miembro de B está también en A. Así, se tiene la siguiente definición:
$B \subset A$ significa que si $x \in B$ entonces $x \in A$

Se dice que B es un ***subconjunto propio*** de A, si B es un subconjunto de A y hay algún miembro de A que no está en B. Es decir, si $B \subset A$ y $A \not\subset B$ se dice que B es *subconjunto propio* de A[3].

Ejemplo 4:

a. $\{Tomás, Javier\} \subset \{Tomás, Pedro, Javier\}$

b. $\{(x, y) \,/\, x, y \in \mathrm{R} \text{ y } x = y\} \subset \{(x, y) \,/\, x, y \in \mathrm{R}\}$

■

Obsérvese que si $B \subset A$ no hay nada en B que no esté en A. En vista de este comentario, se tiene que:
$\varnothing \subset A$ para cualquier conjunto A
Dado que el conjunto vacío no tiene nada en él, que no tenga A.

Se dice que dos conjuntos A y B son iguales, y se escribe $A = B$, si A y B representan el mismo conjunto, es decir, ellos contienen los mismos elementos. Este será el caso si cada elemento en A está también en B y viceversa. Así,
$A = B$ significa $A \subset B$ y $B \subset A$.
Si A no es igual al conjunto B, se escribe $A \neq B$.

---

[2] También pudiéndose decir que el conjunto A contiene a B

[3] En otras palabras, no se cumple que $A=B$.

Ejemplo 5:

a. Si A representa el conjunto de triángulos con todos los lados iguales, y B el conjunto de triángulos con todos los ángulos iguales, entonces $A = B$.

b. Si $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{a, b, e, d\}$, entonces $A \neq B$.

■

Un conjunto es ***finito***[4] si es vacío o si consta exactamente de n elementos en donde n es un entero positivo; de otra manera es ***infinito***.

Ejemplo 6:

a. Sea D el conjunto de los días de la semana:

$$D = \{lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado \text{ y } domingo\}$$

Entonces D es finito.

b. Sea $R = \{x / \ x$ es un río del planeta Tierra$\}$. Aunque puede ser difícil contar el número de ríos de la tierra, R es un conjunto finito.

c. Sea E el conjunto de los enteros pares (positivos), es decir, $E = \{2, 4, 6, \ldots\}$ Entonces E es un conjunto infinito.

d. Sea I el intervalo de números reales $I = [0, 1]$ ($I = \{x \ / \ 0 \leq x \leq 1 \text{ y } x \in \mathrm{R}\}$). Entonces I es un conjunto infinito.

■

Se dice que un conjunto *infinito* es ***numerable*** si se puede poner en correspondencia uno a uno con el conjunto de los enteros positivos. En otras palabras un conjunto es *numerable* si sus elementos pueden ser ordenados en forma de sucesión. Si un conjunto *infinito* no es numerable, se dice que es ***no numerable***.

[4] Tomado Lipschutz, Seymour. *Probabilidad.* Pág. 4.

Por otra parte, se dice que un conjunto es ***contable*** si es *finito* o *numerable*, de lo contrario el conjunto es ***no contable***. El conjunto del ejemplo 6 c. es numerable y por tanto contable, mientras se puede comprobar que el conjunto del ejemplo 6 d. no es contable.

Operaciones con Conjuntos

A continuación se considera como los conjuntos pueden ser combinados para producir nuevos conjuntos. Existen tres operaciones principales: Conjunto intersección, conjunto unión y conjunto diferencia.

Intersección de Conjuntos

La ***intersección*** de dos conjuntos *A* y *B*, se escribe $A \cap B$, es el conjunto de elementos que son comunes en *A* y *B*, es decir,

$$A \cap B = \{x / x \in A \text{ y } x \in B\}$$

La notación *AB*, también se usa en lugar de $A \cap B$.

Ejemplo 7:

a. Si $A = \{a,\ b,\ c,\ d\}$ y $B = \{a,\ d,\ c,\ f,\ p\}$ entonces $AB = \{a,\ c,\ d\}$

b. Si *A* es el conjunto de las personas que usan corbata y *B* es el conjunto de las personas que usan saco, entonces *AB* es el conjunto de las personas que usan saco y corbata.

c. Sea, $A = \{(x, y) / x, y \in \mathrm{R},\ \ x \geq 3\}$ y $B = \{(x, y) / x, y \in \mathrm{R},\ \ y \geq \text{-}1\}$

   Entonces:

$$A \cap B = \{(x, y) / x, y \in \mathrm{R},\ \ x \geq 3 \text{ y } y \geq -1\}$$

■

El concepto de intersección puede extenderse a cualquier colección de conjuntos y, en particular, a una colección contable de conjuntos. Así, si $A_1, A_2,...$ representa una colección contable de conjuntos de Ω, su intersección, simbólicamente $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$, es el conjunto cuyos elementos pertenecen a cada uno de los conjuntos A_i, es decir,

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{ x \ / \ x \in A_i \text{ para todo } i\}$$

Ejemplo 8:

a. Si $A_i = \left\{ x \ / \ 2 - \frac{1}{i} < x < 5 + \frac{1}{i} \right\}$, $i = 1, 2, \ldots$, entonces puede ser demostrado que:

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} \left\{ x \ / \ 2 - \frac{1}{i} < x < 5 + \frac{1}{i} \right\} = \{ x \ / \ 2 \leq x \leq 5\} = [2 \ , \ 5]$$

Nótese que 5 está en la intersección ya que $5 \in A_i$ para todo i. Por la misma razón, 2 esta también en la intersección.

b. $\bigcap_{i=1}^{\infty} (a - \frac{1}{i}, a) = \{a\}$

■

Unión de Conjuntos

Si A y B son dos conjuntos, entonces $A \cup B$ es llamada la ***unión*** de A y B, y es el conjunto de elementos que están en A o en B (o en ambos), es decir,

$$A \cup B = \{x / x \in A \ \text{ó} \ x \in B\}$$

Así, cuando se dice "o A o B" se usa con el sentido de "o A o B o ambos".

Ejemplo 9:

a. Si $A = \{a,\ b,\ c,\ d\}$ y $B = \{a,\ d,\ c,\ f,\ p\}$ entonces $A \cup B = \{a,\ b,\ c,\ d,\ f,\ p\}$

b. Si A es el conjunto de personas que visten con corbata, y B es el conjunto de personas que visten con saco, entonces $A \cup B$ es el conjunto de personas que visten con saco o corbata (o ambos).

c. Sea, $A = \{(x, y) \,/\, x, y \in \mathrm{R},\ \ x \geq 3\}$ y $B = \{(x, y) \,/\, x, y \in \mathrm{R},\ \ y \geq -1\}$. Entonces, $A \cup B = \{(x, y) \,/\, x, y \in \mathrm{R},\ \ x \geq 3 \text{ ó } y \geq -1\}$

Así, (4,2), $(2,\ -1/2)$, (5,2) son todos miembros de $A \cup B$. Sin embargo, $(2,-3) \notin A \cup B$.

■

Si $A_1, A_2, \ldots$ es una colección contable de conjuntos de Ω, entonces su unión, simbólicamente $\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathrm{A}_i$, es el conjunto cuyos elementos pertenecen a A_1, ó A_2, ó $A_3, \ldots$ y así sucesivamente. Es decir, representa el conjunto cuyos elementos pertenece al menos a uno de los conjuntos $A_1, A_2, \ldots$. Aquí,

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{x \ / \ x \in A_i \quad \text{para todo } i\}$$

Ejemplo 10:

a. Considérese una colección de intervalos cerrados A_i, donde:

$$A_i = \left\{ x \ / \ \ 2 \leq x \leq 6 - \frac{1}{i} \right\};\ i = 1, 2, \ldots$$

Puede demostrarse que:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \left\{ x \ / 2 \leq x \leq 6 - \frac{1}{i} \right\} = \left\{ x \ / \ \ 2 \leq x < 6 \right\} \ = [2,\ 6)$$

Nótese que 6 no esta en la unión, ya que 6 no es un miembro de alguno de los conjuntos A_i, $i = 1, 2, \ldots$

b. Si $A_i = \left\{ x \ / \quad 2 + \frac{1}{i} \leq x \leq 6 - \frac{1}{i} \right\}$, entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = (2,6)$, un intervalo abierto.

■

Conjunto Diferencia

Supóngase que *A* y *B* son dos conjuntos. Entonces el conjunto ***diferencia*** *A*–*B* es el conjunto cuyos elementos están en *A* pero no en *B*. Así, se tiene que:

$A - B = \{ x \ / \ x \in A \ \text{ y } \ x \notin B \}$

obsérvese que $B - A = \{ x \ / \ x \in B \ \text{ y } \ x \notin A \}$. En general, *A*–*B* ≠ *B*–*A*.

Ejemplo 11:

a. Si $\text{A} = \{\text{a, b, c, d}\}$ y $\text{B} = \{\text{a, d, c, f, p}\}$ entonces $A - B = \{ b \}$ y $B - A = \{ f, p \}$, y, en consecuencia, *A*–*B* ≠ *B*–*A*.
b. Si *A* es el conjunto de personas que usan corbata, y *B* es el conjunto de personas que usan saco, entonces *A*–*B* es el conjunto de personas que usan corbata pero no saco, y *B*–*A* es el conjunto de personas que usan saco pero no corbata.

■

En particular Ω – *B*, donde Ω es el conjunto universal, es llamado el ***complemento***: de *B* (con respecto a Ω) y se denota por B^c o B'. Así,

$B^c = \{ x \ / \ x \in \Omega \ \text{ y } \ x \notin B \}$

Para encontrar el complemento de un conjunto, es importante conocer completamente el conjunto universal.

Ejemplo 12:

Si Ω = {*a*, *b*, *c*, *d*}, entonces $\{a, c\}^c = \{b, d\}$; mientras, si Ω = {*a*, *b*, *c*, *d*, *e*}, entonces $\{a, c\}^c = \{b, d, e\}$.

■

Ejemplo 13: [5]

Sea $\Omega=\{ (x, y) : 0 \leq x \leq 1 \;\; \text{y} \;\; 0 \leq y \leq 1 \}$, lo cual se lee como "la colección de todos los puntos (*x*, y) para los cuales : $0 \leq x \leq 1$ y $0 \leq y \leq 1$". Se definen los siguientes conjuntos:

$A_1 = \{ (x, y) / \; 0 \leq x \leq 1 \;\; \text{y} \;\; 0 \leq y \leq 1/2\}$

$A_2 = \{ (x, y) / \; 0 \leq x \leq 1/2 \;\; \text{y} \;\; 0 \leq y \leq 1\}$

$A_3 = \{ (x, y) / \; 0 \leq x \leq y \leq 1\}$

$A_4 = \{ (x, y) / \; 0 \leq x \leq 1/2 \;\; \text{y} \;\; 0 \leq y \leq 1/2\}$

Entonces se tiene que:

- $A_4 \subset A_1$
- $A_4 \subset A_2$
- $A_1 \cap A_2 = A_4$
- $A_2 \cup A_3 = A_4 \cup A_3$
- $A_1^c = \{(x, y) / \; 0 \leq x \leq 1 \;\; \text{y} \;\; 1/2 \leq y \leq 1 \}$
- $A_1 - A_4 = \{(x, y) / \; 1/2 \leq x \leq 1 \;\; \text{y} \;\; 0 \leq y \leq 1/2\}$

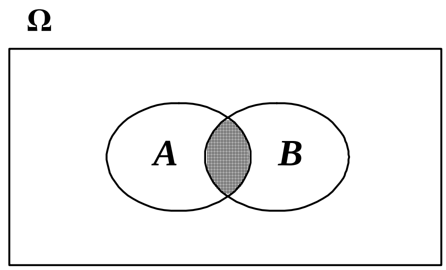
■

Diagramas de Venn

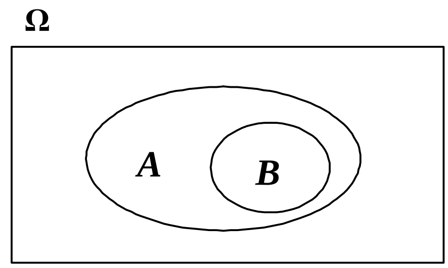
Las operaciones de conjuntos pueden ser ilustradas con los ***diagramas de Venn***. La idea es representar los conjuntos como una figura geométrica. La representación de conjuntos como un diagrama de Venn sirve como una herramienta poderosa para establecer informalmente algunas identidades básicas en la teoría de conjuntos. Por ejemplo en la Figura 1 (h) se puede ver que:

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

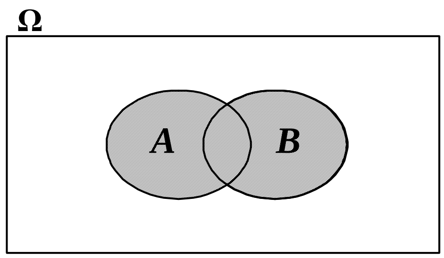
[5] Tomado de Mood, Graybill y Boes. Op. Cit. Pág.11



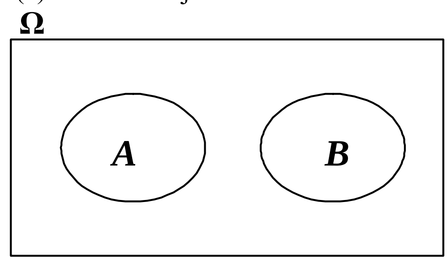
(a) La región sombreada es $A \cap B$



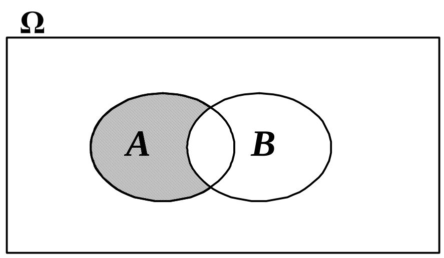
(b) B es subconjunto de A: $B \subset A$



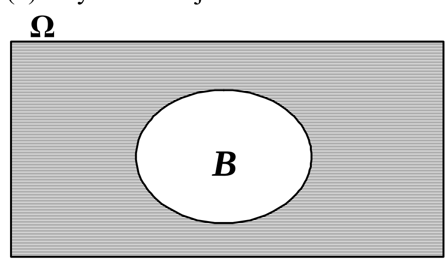
(c) La región sombreada es $A \cup B$



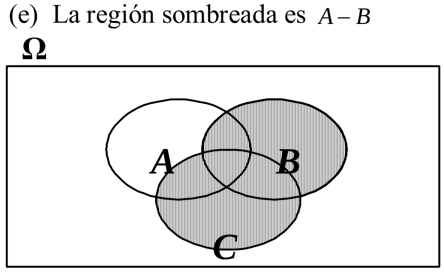
(d) A y B son disjuntos: $A \cap B = \varnothing$



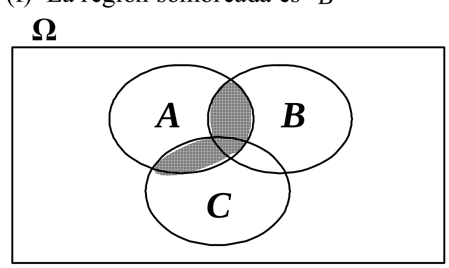
(e) La región sombreada es $A - B$



(f) La región sombreada es B^c



(g) La región sombreada es $B \cup C$



(h) La región sombreada es $A \cap (B \cup C)$

Figura 1.

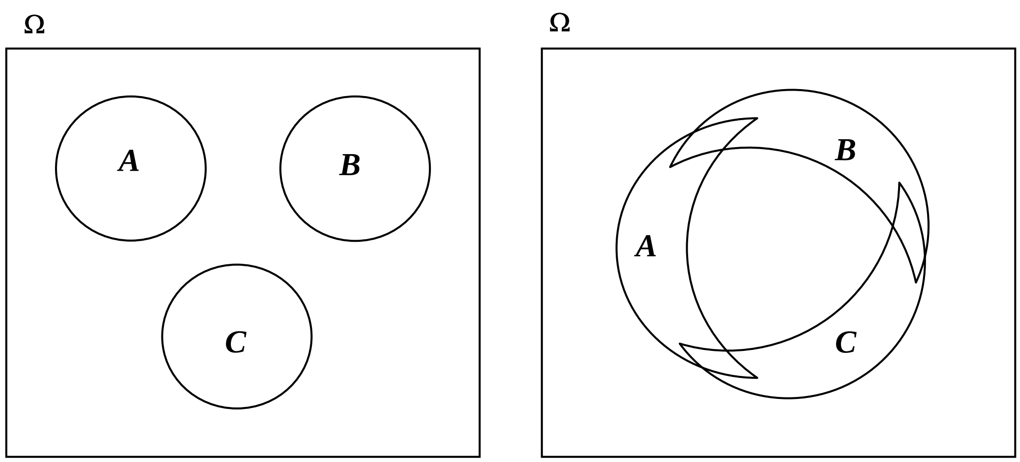
Ejemplos de diagramas de Venn.

Conjuntos Disjuntos o Mutuamente Excluyentes

Se dice que dos conjuntos A y B son ***disjuntos*** o ***mutuamente excluyentes*** si ellos no tienen elementos en común, es decir, si $A \cap B = \varnothing$. De manera más general, si A_1, A_2,..., es una colección de conjuntos, entonces se dice que los conjuntos son ***disjuntos dos a dos*** si A_i y A_j son disjuntos, donde $i \neq j$.

***Nota* 1:**[6]

Se dice que cualquier número de conjuntos son *disjuntos*, cuando cada par de ellos son disjuntos (son disjuntos dos a dos). Así, "A, B, C son disjuntos" significa más que $A \cap B \cap C = \varnothing$, significa que: $A \cap B = \varnothing$, $A \cap C = \varnothing$, $B \cap C = \varnothing$. Ver Figura 2.



A, B y C son disjuntos

$A \cap B \cap C = \varnothing$, pero A, B y C no son disjuntos

Figura 2.

Diagramas de Venn que ilustran que sólo $A \cap B \cap C = \varnothing$ no implica que tres conjuntos sean disjuntos.

[6] Tomado de apuntes de clase dictadas por el Prof. Giampaolo Orlandoni.

Conjuntos Exhaustivos

Se dice que dos o más conjuntos son ***exhaustivos*** si su unión es el conjunto universo.

Entonces, los conjuntos $A_1, A_2, ..., A_n$ son *exhaustivos* si:

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$$

Relaciones que involucran Uniones, Intersecciones y Complementos de Conjuntos

Sean A y B conjuntos cualesquiera en Ω. Entonces se cumple que:

1. Si $A \subset B$, entonces: $A \cup B = B$
2. Si $A \subset B$, entonces: $A \cap B = A$
3. $A \cap \Omega = A$
4. $A \cup \Omega = \Omega$
5. $A \cap \varnothing = \varnothing$
6. $A \cup \varnothing = A$
7. $A \cap A = A$
8. $A \cup A = A$
9. $(A^c)^c = A$
10. $\Omega^c = \varnothing$
11. $\varnothing^c = \Omega$
12. $A \cup A^c = \Omega$
13. $A \cap A^c = \varnothing$

Prueba de relaciones 1 y 6:

Si $A\subset B$, entonces $A\cup B = B$, y viceversa. (En particular $A\cup\varnothing=A$).

(→): Prueba de que "Si $A\subset B$, entonces $A\cup B = B$". Para probar que dos conjuntos son iguales, debe demostrarse que cada conjunto contiene al otro.

Nótese que si $x \in A\cup B$, entonces $x\in A$ ó $x\in B$.

Como $A\subset B$, se tiene que si $x\in A\Rightarrow x\in B$.

Entonces, si $x\in(A\cup B) \Rightarrow x\in B$. Así $\boxed{(A\cup B)\subset B}$.

Además, de la definición de unión, $\boxed{B\subset(A\cup B)}$.

De esta manera se tiene que $\boxed{A \cup B=B}$.

Por la otra parte,

(←): Prueba de que "Si $A\cup B = B$, entonces $A\subset B$"

Sea $x\in A$, entonces $x\in(A\cup B)$,

o como $A\cup B=B$, $x\in B$.

Por tanto, $\boxed{A\subset B}$.

Prueba de relaciones 2 y 5:

Si $A\subset B$, entonces $A\cap B=A$, y viceversa. En particular, $A\cap\varnothing=\varnothing$.

(→): Prueba de que "si $A\subset B$, entonces $A\cap B=A$". Hay que probar que $A\cap B\subset A$ y que $A\supset(A\cap B)$, para probar la igualdad $A\cap B=A$.

Si $x\in A\cap B$, entonces $x\in A$ y $x\in B$.

Como $A\subset B$, sigue que si $x\in A \Rightarrow x\in B$.

Es decir, $\boxed{A\subset(A\cap B)}$.

Por definición de intersección se sabe que $\boxed{A\supset(A\cap B)}$,

por lo tanto $\boxed{A\cap B=A}$.

Por el otro lado,

(←): Prueba de que "Si $A\cap B=A$, entonces $A\subset B$"

Como $A \cap B = A$, si $x \in A \Rightarrow x \in A \cap B$

Pero por definición de intersección, si $x \in A \cap B \Rightarrow x \in B$.

Así se tiene que $\boxed{A \subset B}$.

Propiedades de las Operaciones de Conjuntos

1. *Propiedad Conmutativa*

$A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

2. *Propiedad Asociativa*

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

3. *Propiedad Distributiva*

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Prueba de la propiedad distributiva $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$**:**[7]

Para probar que dos conjuntos son iguales, debe demostrarse que cada conjunto contiene al otro. Entonces,

$A \cap (B \cup C) = \{x \in \Omega / x \in A \text{ y } x \in (B \cup C)\}$;

$(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{x \in \Omega / x \in (A \cap B) \text{ ó } x \in (A \cap C)\}$

Primero se demostrará que $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$

[7] Basada en Casella, George y Berger, Roger. Op. Cit. Pág. 4.

Sea $x \in (A \cap (B \cup C))$. Se tiene por la definición de intersección que $x \in (B \cup C)$, es decir, $x \in B$ ó $x \in C$.

Como x también debe estar en A, se tiene que $x \in (A \cap B)$ ó $x \in (A \cap C)$

Así, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Dado que si $x \in (A \cap (B \cup C)) \Rightarrow x \in ((A \cap B) \cup (A \cap C))$, entonces se concluye que $\boxed{A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)}$.

Ahora, asúmase que $x \in ((A \cap B) \cup (A \cap C))$. Por definición de unión, esto implica que: $x \in (A \cap B)$ ó $x \in (A \cap C)$

Si $x \in (A \cap B)$, entonces x está en A y en B.

Ya que $x \in B \Rightarrow x \in (B \cup C)$

Entonces debe cumplirse que $x \in (A \cap (B \cup C))$

Si, por otro lado, $x \in (A \cap C)$, el argumento es similar, y se concluye nuevamente que $x \in (A \cap (B \cup C))$.

Así se ha establecido que $\boxed{(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)}$, demostrando la contención en la otra dirección, y por tanto la prueba de la *Propiedad Distributiva*: $\boxed{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)}$

4. *Leyes de "De Morgan"*

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

De manera más general se puede establecer que:

i. Si $A_1, A_2, \ldots$ es una colección *contable* de conjuntos, entonces

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c$$

En palabras, "el complemento de la unión de cualquier colección de conjuntos es igual a la intersección de sus complementos".

ii. El complemento de la intersección de cualquier colección de conjuntos es igual a la unión de sus complementos. Es decir,

$$\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c$$

Prueba de $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$:

Sea $x \in (A \cup B)^c$.

Entonces, por definición de complemento, $x \notin (A \cup B)$.

Así $x \notin A$ y $x \notin B$. En consecuencia $x \in A^c$ y $x \in B^c$.

Además $x \in A^c \cap B^c$, y ha sido demostrado que $\boxed{(A \cup B)^c \subset A^c \cap B^c}$.

Ahora supóngase $x \in A^c \cap B^c$.

Entonces, por definición de intersección, $x \in A^c$ y $x \in B^c$.

De aquí $x \notin A$ y $x \notin B$, y en consecuencia, $x \notin A \cup B$.

Entonces sigue que $x \in (A \cup B)^c$ y además $\boxed{A^c \cap B^c \subset (A \cup B)^c}$.

Por tanto, se concluye que $\boxed{(A \cup B)^c = A^c \cap B^c}$.

5. *Propiedad de Descomposición de Conjuntos*

Si A y B son subconjuntos de Ω, entonces:

i) $A = AB \cup AB^c$

ii) $AB \cap AB^c = \varnothing$

Prueba:

i. $A = A \cap \Omega$

$= A \cap (B \cup B^c) = AB \cup AB^c$

ii. $AB \cap AB^c = AA\,BB^c = A\varnothing = \varnothing$

6. Descomposición en Átomos[8]

Para cualquier conjunto *A*, se tiene la descomposición obvia:

$$\Omega = A \cup A^c$$

La forma de pensar esto es: El conjunto *A* da una clasificación de todos los elementos *x* en Ω de acuerdo a si *x* pertenece a *A* ó a A^c. Un estudiante universitario puede ser clasificado de acuerdo a si él es del ultimo año de medicina o no, pero el también puede ser clasificado de acuerdo a si él es del primer año en la Universidad o no, si es mayor de edad o no, tiene un carro o no,…, es mujer o no. Cada clasificación dicotómica divide al conjunto universal en dos conjuntos disjuntos, y si varios de estos son superpuestos uno sobre otro se obtiene, por ejemplo, como se observa en la Figura 3.

1. $\Omega = (A \cup A^c) \cap (B \cup B^c) = AB \cup AB^c \cup A^cB \cup A^cB^c$
2. $\Omega = (A \cup A^c) \cap (B \cup B^c) \cap (C \cup C^c) = (ABC) \cup (ABC^c) \cup (AB^cC) \cup (AB^cC^c) \cup$ $(A^cBC) \cup (A^cBC^c) \cup (A^cB^cC) \cup (A^cB^cC^c)$

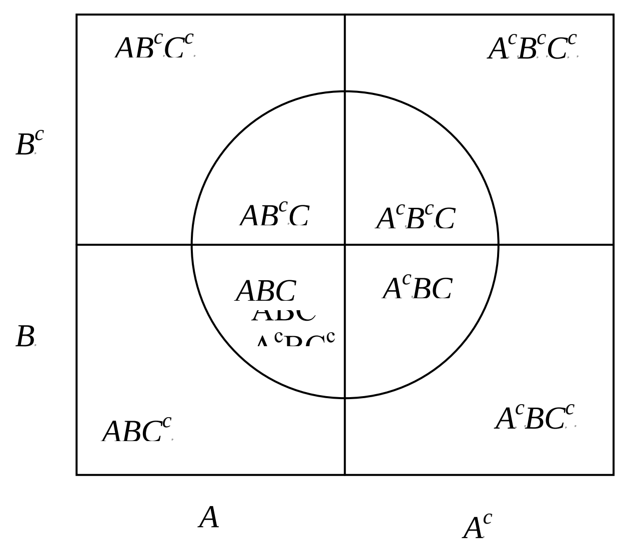


Figura 3.
Descomposición en átomos.

[8] Tomado de Apuntes de clase dictadas por el Prof. Giampaolo Orlandoni.

A las piezas de tal descomposición se le llamarán los átomos. Hay 2, 4, 8 átomos respectivamente, de acuerdo a si 1, 2, 3 conjuntos son considerados. En general habrá 2^n átomos si n conjuntos son considerados. Ahora estos átomos tienen una notable propiedad la cual será ilustrada con el caso 2 presentado en la página anterior:

Hágase lo que se haga con las operaciones sobre los tres conjuntos *A*, *B*, *C* y las veces que se haga, el conjunto resultante puede siempre ser escrito como la unión de algunos de los átomos.

Ejemplo 14:

a. $A \cup B = ABC \cup ABC^c \cup AB^cC \cup AB^cC^c \cup A^cBC^c \cup A^cBC$

b. $(A-B) - C^c = AB^cC$

∎

El Conjunto Potencia (o Conjunto de las Partes)

El ***conjunto potencia*** o ***conjunto de las partes*** de un conjunto *A* es aquel cuyos miembros son *todos* los subconjuntos de *A*. Como $\varnothing$ es un subconjunto de cualquier conjunto, entonces $\varnothing$ es siempre un miembro de cualquier conjunto potencia. También como *A* es un subconjunto de el mismo, está también incluido en el conjunto potencia. El conjunto potencia de *A* se denota por $\mathcal{P}(A)$.

Ejemplo 15:

Suponga $A = \{x, y\}$. Entonces, $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$. Hay 4 subconjuntos de *A*.

∎

La mejor manera de escribir los miembros de P (A) es listar el conjunto vacío primero, después los subconjuntos de A consistentes de conjuntos unitarios, conjuntos binarios y así sucesivamente hasta el mismo conjunto A.

Ejemplo 16:
Si $A = \{Pedro, José, Simón\}$, entonces
P $(A) = \{\varnothing, \{Pedro\}, \{José\}, \{Simón\}, \{Pedro, José\}, \{Pedro, Simón\}, \{José, Simón\}, \{Pedro, José, Simón\}\}$.
Hay 8 miembros en P (A).

■

En general, si A tiene n elementos, entonces P (A) tiene 2^n miembros[9].

Producto Cartesiano

Un par de elementos a y b, donde "a" es llamado el primer elemento y "b" el segundo elemento, se dice que es un ***par ordenado*** y se escribe (a, b). El par (a, b) debe distinguirse del par (b, a) donde "b" es el primer elemento. Dos pares ordenados (a, b) y (c, d) se dice que son iguales si y sólo si sus correspondientes componentes son iguales, es decir $a = c$ y $b = d$.

Sean A y B conjuntos cualesquiera, el ***producto cartesiano*** de A y B, denotado por $A \times B$, es el conjunto de todos los pares ordenados de elementos donde la primera entrada es de A y la segunda entrada de B. Así,

$$A \times B = \{(a, b) \,/\, a \in A, b \in B\}.$$

[9] Esto será probado en los apuntes correspondientes a las técnicas de conteo.

Ejemplo 17:

Si $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{p, q\}$, entonces,

$$A \times B = \{(a, p), (a, q), (b, p), (b, q), (c, p), (c, q)\}$$

$$\text{y} \quad B \times A = \{(p, a), (q, a), (p, b), (q, b), (p, c), (q, c)\}$$

■

Nótese que en general el producto cartesiano de A y B, $A \times B$, no es el mismo que el producto cartesiano de B y A, $B \times A$. Así, a diferencia de la unión e intersección de conjuntos, el producto cartesiano de conjuntos no es conmutativo.

Existe una excepción en el caso del producto cartesiano de un conjunto con el conjunto vacío. Para cualquier conjunto A, se puede interpretar que $A \times \varnothing = \varnothing$. Similarmente $\varnothing \times A = \varnothing$. Así,

$$A \times \varnothing = \varnothing \times A = \varnothing \qquad \text{para cualquier conjunto } A.$$

Es el único caso en que el producto cartesiano es conmutativo.

El producto cartesiano de más de dos conjuntos se define análogamente. Así, el producto cartesiano de $A_1, A_2, ..., A_n$ es

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,/\, x_i \in A_i,\ i=1, 2, \ldots, n\}$$

Si $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, se denota el producto cartesiano $A \times A \times ... \times A$ por A^n.

Ejemplo 18:

Sea $A = \{1, 2\}$, $B = \{a\}$, $C = \{b, c\}$. Encuentre:

a. $A \times (B \times C)$

b. $(A \times B) \times C$

c. $A \times B \times C$

Solución:

a. $A \times (B{\times}C) = \{1, 2\}{\times}\{ (a, b), (a, c)\}$

$= \{(1, (a, b)), (1, (a, c)), (2, (a, b)), (2, (a, c))\}.$

b. $(A \times B) \times C = \{ (1, a), (2, a) \} \times \{b, c\}$

$= \{((1, a), b), ((1, a), c), ((2, a), b), ((2, a), c)\}.$

c. $A \times B \times C = \{(1, a, b), (1, a, c), (2, a, b), (2, a, c)\}.$

■

De este ejemplo, se observa que $A \times (B \times C)$, $(A \times B) \times C$ y $A \times B \times C$ representan distintos conjuntos (no tienen la propiedad asociativa) Además nótese que ellos tienen el mismo número de elementos: cuatro. En general, si $n(A)$ representa el número de elementos en A, es decir, el ***cardinal*** de A, entonces lo siguiente es verdadero:

$$n(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) = n(A_1){*}n(A_2){*}\ldots{*}n(A_n).$$

Un hecho importante es que la operación producto cartesiano es *distributiva* sobre la operación unión y sobre la operación intersección. Es decir,

$$A \times (B{\cup}C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

y

$$A \times (B{\cap}C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

Ejemplo 19:

Para los conjuntos $A = \{a, b\}$, $B = \{a, b, c\}$, $C = \{b, d\}$ demuestre que:

a. $A \times (B{\cup}C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

b. $A \times (B{\cap}C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

Solución:

a. Dado que $B{\cup}C = \{a, b, c, d\}$, se tiene que

$A \times (B{\cup}C) = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, a), (b, b), (b, c), (b, d)\}$

Ahora,

$A \times B = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c)\}$

y

$A \times C = \{(a, b), (a, d), (b, b), (b, d)\}$

Además,

$(A \times B) \cup (A \times C) = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, a), (b, b), (b, c), (b, d)\}$

$= A \times (B \cup C)$.

b. En a) se ha encontrado $A \times B$ y $A \times C$. Así,

$(A \times B) \cap (A \times C) = \{(a, b), (b, b)\}$

Luego, dado que $(B \cap C) = \{b\}$, se obtiene

$A \times (B \cap C) = \{(a, b), (b, b)\} = (A \times B) \cap (A \times C)$

■

Límite de una Sucesión de Conjuntos [10]

Una colección infinita de conjuntos $A_1, A_2, \ldots$ es llamada una ***sucesión de conjuntos*** y es frecuentemente escrita como $\{A_n\}$, donde obviamente $n = 1, 2, 3, \ldots$

Sea $\{A_n\}$ una sucesión de conjuntos de Ω, se definen como ***límite superior*** y ***límite inferior de la sucesión de conjuntos*** $\{A_n\}$ a los siguientes conjuntos, respectivamente:

$$\underset{n\to\infty}{Lim\ Sup}\ A_n = \overline{\underset{n\to\infty}{Lim}}\ A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

$$= \left\{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right\} \cap \left\{\bigcup_{k=2}^{\infty} A_k\right\} \cap \left\{\bigcup_{k=3}^{\infty} A_k\right\} \cap \cdots$$

[10] Basado en Rohatgi,V.K. *An Introduction to Probability Theory and Mathematical Statistics*. Pág. 2; Quesada, Pedro. *Probabilidad y Distribuciones*. Págs. 3-5

$$\underset{n\to\infty}{Lim\ Inf}\ A_n = \underset{n\to\infty}{\underline{Lim}}\ A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$
$$= \left\{\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right\} \cup \left\{\bigcap_{k=2}^{\infty} A_k\right\} \cup \left\{\bigcap_{k=3}^{\infty} A_k\right\} \cup \cdots$$

Como $\underset{n\to\infty}{Lim\ Sup}\, A_n$ es la intersección de los conjuntos $\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$, se tiene que un punto pertenece al límite superior si, para todo *n*, el punto esta contenido en al menos uno de los conjuntos A_k para $k \geq n$. Esto es equivalente a decir que el punto esta contenido en un infinito número de conjuntos A_n, $n \geq 1$. En otras palabras, el límite superior A_n esta formado por todos los puntos que están contenidos en un número infinito de conjuntos A_n, $n \geq 1$.

Un punto pertenece al límite inferior de A_n si, para algún *n*, él esta contenido en $\bigcap A_k$, $k \geq n$, es decir, si para algún *n*, el punto pertenece a A_k para todo $k \geq n$. En otras palabras, $\underset{n\to\infty}{Lim\ Inf}\ A_n$ está formado por los puntos que están contenidos en todos, excepto en un número finito de conjuntos A_n, $n \geq 1$.

De estas definiciones se deduce que

$$\underset{n\to\infty}{\underline{Lim}}\ A_n \subseteq \underset{n\to\infty}{\overline{Lim}}\ A_n$$

Si en una sucesión de conjuntos dada $\{A_n\}$, se cumple que $\underset{n\to\infty}{\underline{Lim}}\ A_n = \underset{n\to\infty}{\overline{Lim}}\ A_n$ entonces se dice que existe el ***límite de la sucesión*** $\{A_n\}$y es:

$$\underset{n\to\infty}{Lim}\, A_n = \underset{n\to\infty}{\underline{Lim}}\ A_n = \underset{n\to\infty}{\overline{Lim}}\ A_n$$

<u>Ejemplo 20</u>:

a. Sea $E_{2i} = B$ y $E_{2i+1} = C$ para $i = 0, 1, 2, \ldots$, entonces $\underset{n\to\infty}{\underline{Lim}}\, E_n = B \cap C$ y $\underset{n\to\infty}{\overline{Lim}}\, E_n = B \cup C$

b. Sea R el conjunto universal y sea $E_{2i} = \{x \setminus -i < x < i,\ x \in \mathbb{R}\}$ y

$E_{2i+1} = \left\{x \setminus 0 < x < \frac{1}{i},\ x \in \mathbb{R}\right\}$, para $i = 0, 1, 2, \ldots$, entonces,

$\underline{Lim}_{n\to\infty} E_n = \varnothing$ y $\overline{Lim}_{n\to\infty} E_n = \text{R}$

Solución:

$$\begin{aligned}
\underline{Lim}_{n\to\infty} E_n &= \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} E_k = \left(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap \ \cdots\right) \cup \left(E_2 \cap E_3 \cap \cdots\right) \cup \left(E_3 \cap\ E_3 \cap \cdots\right) \cup \cdots \\
&= (\varnothing \cap (-1, 1) \cap (0, 1) \cap (-2, 2) \cap (0, 1/2) \cap \cdots) \ \cup \\
&\quad ((-1, 1) \cap (0, 1) \cap (-2, 2) \cap (0, 1/2) \cap (-3, 3) \cap (0, 1/3) \ \cdots) \cup \cdots \\
&= \varnothing \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \cdots \\
&= \varnothing
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{Lim}_{n\to\infty} E_n &= \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k = \left(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \cdots\right) \ \cap \left(E_2 \cup E_3 \cup \cdots\right) \cap \left(E_3 \cup E_4 \ \cup \cdots\right) \cap \cdots \\
&= (\varnothing \cup (-1, 1) \ \cup (0, 1) \cup (-2, 2) \cup (0, 1/2) \cup \cdots) \ \cap \\
&\quad ((-1, 1) \cup (0, 1) \cup (-2, 2) \cup (0, 1/2) \cup (-3, 3) \cup \ (0, 1/3) \ \cdots) \ \cap \cdots \\
&= \text{R} \cap \text{R} \cap \text{R} \ \cdots \\
&= \text{R}
\end{aligned}$$

■

Límites de Sucesiones Monótonas de Conjuntos

Sea $\{A_n\}$ una sucesión de conjuntos de Ω. Si $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$ se dice que la sucesión es ***monótona no decreciente***. Por otro lado, si $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$ entonces se dice que la sucesión es ***monótona no creciente***. Las sucesiones no decrecientes y no crecientes son llamadas ***sucesiones monótonas***.

Ejemplo 21:

La sucesión $\{A_n\}$, donde $A_n = \left[2+\frac{1}{n},\ 5-\frac{1}{n}\right]$, es una sucesión no decreciente, mientras la sucesión $\{A_n\}$ con $A_n = \left[2-\frac{1}{n},\ 5+\frac{1}{n}\right]$, es una sucesión no creciente.

■

Límite de una Sucesión Monótona No Decreciente de Conjuntos

Si $\{A_n\}$ es una *sucesión no decreciente* de conjuntos el *límite* de esta sucesión es

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n .$$

Ejemplo 22:

Si $A_n = \left[2+\frac{1}{n},\ 5-\frac{1}{n}\right]$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left[2+\frac{1}{n},\ 5-\frac{1}{n}\right] = (2,\ 5)$$

■

Límite de una Sucesión Monótona No Creciente de Conjuntos

Si $\{A_n\}$ es una *sucesión no creciente* de conjuntos, entonces el *límite* de esta sucesión se define como:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n .$$

Ejemplo 23:

Si $A_n = \left[2 - \frac{1}{n},\ 5 + \frac{1}{n}\right]$, entonces, como la sucesión es no creciente:

$$\underset{n\to\infty}{Lim}\, A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left[2 - \frac{1}{n},\ 5 + \frac{1}{n}\right] = (2,\ 5)$$

■

Familias o Clases de Conjuntos

Una ***familia*** o ***clase*** de conjuntos es un nuevo conjunto cuyos elementos son a su vez conjuntos.

Ejemplo 24:

Sea Ω = {c, s}, entonces:

C = {{c}, {s}, {c, s}}, es una clase de conjuntos.

■

Partición de Conjuntos

Una ***partición*** del conjunto Ω es una clase de subconjuntos *disjuntos* de Ω cuya unión es igual a Ω, es decir, una clase de conjuntos *mutuamente excluyentes* y *exhaustivos*.

Ejemplo 25:

a. Los conjuntos $A_i = [i, i+1)$ forman una partición de $[0, \infty)$

b. En el siguiente diagrama de Venn puede verse que los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_6$ forman una partición de Ω:

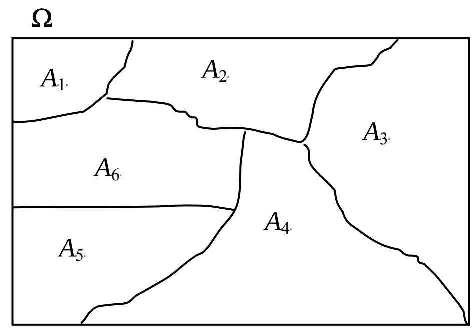


Figura 4.

Partición del conjunto Ω por los conjuntos $A_1, A_2,\ldots, A_6$.

■

Referencias

Casella, G. y Berger, R. (1990). *Statistical Inference*. California: Duxbury Press.

Khazanie, R. (1976). *Basic Probability Theory and Applications*. California: Goodyear Publishing Company, Inc.

Lipschutz, S. (1996). *Probabilidad*. México: McGraw-Hill.

Orlandoni, G. Apuntes tomados en la Asignatura *Teoría Estadística I* en Maestría de Estadística Aplicada. Universidad de los Andes, Mérida. 1998.

Rohatgi,V.K. (1976). *An Introduction to Probability Theory and Mathematical Statistics.* Nueva York: John Wiley and Sons.

Índice