Universidad de los Andes
Facultad de Ciencias Económicas y Sociales
Escuela de Estadística

Apuntes de Métodos Estadísticos I

CONTRASTE DE HIPÓTESIS

Prof. Gudberto J. León R.

Contenido

Lista de Figuras y Tablas

Contraste de Hipótesis [1]

La *prueba de hipótesis* y la *estimación* son dos de las ramas principales de la *inferencia estadística*.[2]

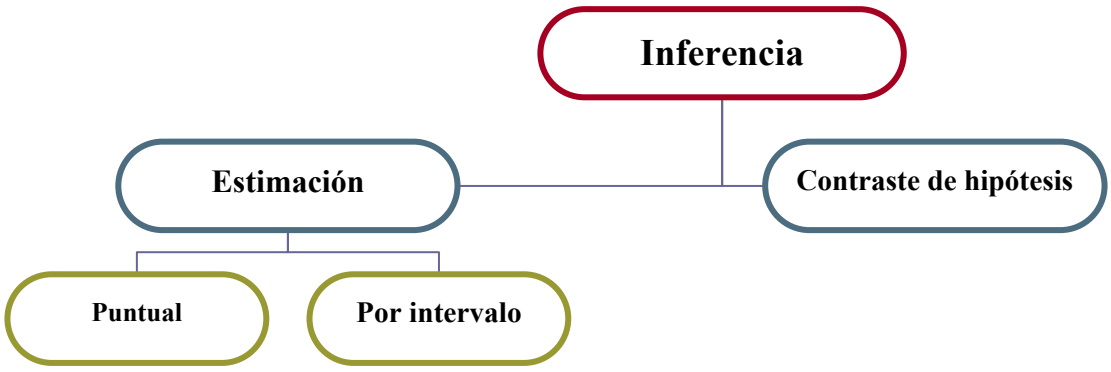

Figura 1. Ramas principales de la Inferencia Estadística

El ***objetivo de la estimación*** es obtener una aproximación al valor de cierto parámetro de la población y la ***finalidad de la prueba de hipótesis*** es decidir si una afirmación acerca de una característica de la población es verdadera.

[1] Otros nombres de contraste de hipótesis utilizados en la bibliografía estadística son: Prueba de hipótesis, docimasia de hipótesis, test de hipótesis, prueba de significación.

[2] Estos Apuntes están basados principalmente en: Newbold, Paul. *Estadística para los Negocios y la Economía.* Y en Stevenson,. W. *Estadística para Administración y Economía*.

Ejemplo 1:

Es posible desear determinar si afirmaciones como las siguientes son ciertas:[3]

1. Un fabricante que produce cereales de desayuno afirma que, en promedio, el contenido de cada caja pesa al menos 200 gramos. Para verificar esta afirmación, se pesa el contenido de una muestra aleatoria y se infiere el resultado a partir de la información muestral.
2. Una compañía recibe un gran cargamento de piezas. Sólo puede aceptar el envío si no hay más de un 5% de piezas defectuosas. La decisión de aceptar la remesa puede basarse en el examen de una muestra aleatoria de piezas.
3. Un profesor está interesado en valorar la utilidad de realizar regularmente pruebas cortas en un curso de estadística. La asignatura consta de dos partes y el profesor realiza esta prueba sólo en una de ellas. Cuando acaba el curso, compara los conocimientos de los estudiantes en las dos partes de la materia mediante un examen final y analiza su hipótesis de que las pruebas cortas aumentan el nivel medio de conocimientos.

■

Los ejemplos propuestos tienen algo en común. La hipótesis se formula sobre la población, y las conclusiones sobre la validez de esta hipótesis se basan en la información muestral.

Hipótesis Estadística

Es cualquier enunciado, teoría, conjetura, tentativo, afirmación que se haga sobre una o más características poblacionales como un parámetro, la distribución de probabilidad de una población, etc.

---

[3] Newbold, Paul. *Estadística para los Negocios y la Economía*. Pág. 281.

Nunca se sabe con absoluta certeza la verdad o falsedad de una hipótesis estadística, a no ser que se examine toda la población. Esto, por supuesto, sería impráctico en la mayoría de las situaciones. En su lugar, se toma una muestra aleatoria de la población de interés y se utilizan los datos que contiene tal muestra para proporcionar evidencias *que confirmen o no la hipótesis*.

La evidencia de la muestra que es inconsistente con la hipótesis planteada conduce a un rechazo de la misma, mientras que la evidencia que apoya la hipótesis conduce a su aceptación. De ahí que el aspecto principal de la prueba de hipótesis sea determinar si la diferencia entre *un valor propuesto de un parámetro poblacional y el valor estadístico de la muestra* se debe razonablemente a la variabilidad del muestreo. O si la discrepancia es demasiado grande para ser considerada de esa manera, lo cual en el argot estadístico es conocido como que la *diferencia es significativa*.

Considérese la siguiente situación:
Se inspecciona una muestra de 150 productos de un enorme lote y se observa que el 7% de ellos está defectuoso. El proveedor de dichos productos garantizó que un porcentaje igual al 5% de cualquier cargamento tendría defectos. La pregunta que se habrá de contestar mediante la prueba de hipótesis es si la información proporcionada por el proveedor es verdadera.

Si la proposición realmente es cierta, ¿Cuál sería la causa del hecho de que una muestra señalara un 7% de partes defectuosas? Una posibilidad es que la causa sea la *variabilidad del muestreo*. Si la decisión después de efectuar el análisis es *aceptar* la afirmación del proveedor, significa que la discrepancia entre el porcentaje de productos defectuosos observado en la muestra y el porcentaje de elementos defectuosos propuesto se debe razonablemente a la variabilidad del muestreo (al azar). Por el contrario, la decisión de *rechazar* la afirmación del proveedor, significa

que la diferencia entre el valor observado y el propuesto es demasiado grande como para deberse únicamente al azar.

Hipótesis Nula (H_0)

Es la hipótesis que se considera cierta a no ser que se produzca suficiente evidencia en contra, lo cual puede entenderse como *mantener la hipótesis*. Es la hipótesis que se plantea para juzgar si puede ser o no rechazada. En general, se enuncia como *hipótesis nula* lo que se viene aceptando, creyendo o asumiendo como lo que es cierto con anterioridad al estudio.

Hipótesis Alternativa (H_1)

Es la hipótesis que se plantea para oponerla a la hipótesis nula. Es un enunciado que ofrece una alternativa a la proposición en H_0, es decir, afirma que la proposición en la hipótesis nula es falsa. En general, se enuncia en H_1 lo que se presume que está sucediendo (actualmente) y que ha cambiado con respecto a lo que se suponía como verdadero (anteriormente). En la práctica, esta es la hipótesis de interés para el investigador debido a que representa generalmente la proposición hipotética que él desea probar.

<u>Ejemplo 2</u>:

Supóngase que una persona es llevada a juicio en un tribunal de justicia. Las hipótesis nula y alternativa son:

H_0: Es inocente

H_1: Es culpable

Cuando la persona acusada es llevada ante un tribunal de justicia, en principio, goza de la presunción de inocencia ("toda persona es inocente hasta que se demuestre lo

contrario"). Como en la hipótesis nula se enuncia lo que se asume como cierto, en este caso H_0: Es inocente.

Por otra parte, en la hipótesis alternativa se plantea lo que se *presume o se cree* que es la situación actual y que ha cambiado con respecto a lo enunciado en H_0 y es lo que se quiere probar. De esta manera, debe plantearse bajo esta circunstancia que H_1: Es culpable.

Por lo tanto, la acusación debe presentar evidencia suficientemente clara como para conseguir un veredicto de culpabilidad. Puede darse el caso de que *no se rechace* que el enjuiciado "sea inocente" dado que no se han presentado suficientes evidencias.

■

En el contexto del contraste de hipótesis clásico, la hipótesis nula se considera cierta inicialmente. La tarea de persuadirnos de lo contrario corresponde a los datos de la muestra. La aceptación de una hipótesis nula implica tan sólo que los datos de la muestra no proporcionan evidencia suficiente para rechazarla. Por otro lado, el rechazo implica que la evidencia muestral la refuta.

Tipos de Hipótesis Nula y Alternativa

Para hacer más general la exposición, se denotará por θ al parámetro poblacional de interés (por ejemplo, la media poblacional, la varianza o una proporción) y por θ_0 para designar un valor que puede tomar el parámetro θ.

Una hipótesis nula o alternativa, puede designar un único valor, llamado θ_0, para el parámetro poblacional θ. En este caso, se dice que la hipótesis es **simple**. La notación simbólica para una hipótesis de este tipo es

$$H_0: \theta = \theta_0$$

que se lee "La hipótesis nula es que el parámetro poblacional θ es igual al valor específico θ_0". Por ejemplo, en la situación de los productos defectuosos de un gran lote, el investigador podría comenzar el estudio con la hipótesis simple de que el porcentaje de artículos defectuosos es igual a 5%.

Una hipótesis también puede designar un *rango* de valores para el parámetro poblacional desconocido. Una hipótesis de este tipo se denomina **compuesta** y será cierta para más de un valor del parámetro poblacional. Por ejemplo, la hipótesis nula de que el peso medio de las cajas de cereales es al menos 200 gramos es compuesta. La hipótesis es cierta para *cualquier* peso medio poblacional mayor o igual que 200 gramos.

En muchas situaciones, se contrasta una hipótesis nula simple, digamos, $H_0: \theta = \theta_0$, frente a una alternativa compuesta. En algunos casos, sólo interesan alternativas a un lado de la hipótesis nula. Por ejemplo, podría quererse contrastar esta hipótesis nula frente a la hipótesis alternativa de que el verdadero valor de θ es mayor que θ_0, lo cual puede escribirse como

$$H_1: \theta > \theta_0$$

Por el contrario, la alternativa de interés puede ser

$$H_1: \theta < \theta_0$$

Las hipótesis alternativas de este tipo se denominan **alternativas unilaterales**. Otra posibilidad es que se quiera contrastar esta hipótesis nula simple frente a la alternativa general de que el valor de θ es cualquiera distinto de θ_0, es decir,

$$H_1: \theta \neq \theta_0$$

Ésta se conoce como **alternativa bilateral**.

En resumen, se pueden tener las siguientes combinaciones de hipótesis nulas y alternativas:

1. H_0: $\theta = \theta_0$ vs. H_1: $\theta > \theta_0$
2. H_0: $\theta = \theta_0$ vs. H_1: $\theta < \theta_0$
3. H_0: $\theta = \theta_0$ vs. H_1: $\theta \neq \theta_0$
4. H_0: $\theta \leq \theta_0$ vs. H_1: $\theta > \theta_0$
5. H_0: $\theta \geq \theta_0$ vs. H_1: $\theta < \theta_0$

Obsérvese que en la hipótesis nula siempre se encuentra la posibilidad de la *igualdad* del planteamiento. Esto se debe a que, como se mencionó anteriormente, la hipótesis nula inicialmente se considera cierta.

***Nota* 1:**

La especificación de las hipótesis nula y alternativa apropiadas depende del problema.

Ejemplo 3:

Para ilustrar estos conceptos, se considerarán los ejemplos enunciados al principio de estas notas:

1. Sea θ el peso medio poblacional (en gramos) de cereales por caja. La hipótesis nula es que esta media es al menos 200 gramos, luego se tiene la hipótesis nula compuesta

   $$H_0: \theta \geq 200$$

   La alternativa obvia es que el verdadero peso medio es inferior a 200 gramos, es decir,

   $$H_1: \theta < 200$$

2. La compañía resuelve aceptar envíos de piezas siempre que no tenga evidencia para sospechar que más del 5% son defectuosas. Denotando por θ la proporción

poblacional de piezas defectuosas. La hipótesis nula aquí es que esta proporción es como mucho 0.05, es decir,

$$H_0: \theta \leq 0{,}05$$

Basándose en la información muestral, se contrasta esta hipótesis frente a la alternativa

$$H_1: \theta > 0{,}05$$

La hipótesis nula, entonces, es que el cargamento de piezas tiene una calidad adecuada, mientras que la hipótesis alternativa es que no la tiene.

3. Supóngase que la conjetura del profesor es que la realización de pruebas cortas regularmente no produce diferencias en el promedio de las puntuaciones del examen final. Denotando por θ la diferencia entre las puntuaciones medias poblacionales para las dos partes del curso, con y sin pruebas cortas regulares. La hipótesis nula es, entonces, una hipótesis simple

$$H_0: \theta = 0$$

Sin embargo, el profesor puede sospechar que posiblemente los controles produzcan un incremento en el promedio y, en consecuencia, querrá contrastar la hipótesis nula frente a la hipótesis alternativa

$$H_1: \theta > 0$$

■

Después de especificar las hipótesis nula y alternativa, y de recoger información muestral, debe tomarse una decisión sobre la hipótesis nula. Las dos posibilidades son **no rechazar** (aceptar) la hipótesis nula o **rechazarla** en favor de la alternativa. Con el fin de llegar a una de estas conclusiones, se adopta una **regla de decisión** basada en la evidencia muestral. Más adelante se estudiaran reglas de decisión concretas.

Tipos de Errores que se pueden cometer en un Contraste de Hipótesis

Si sólo se dispone de una muestra de la población, entonces el parámetro poblacional no se conocerá con exactitud (¿Por qué?). Por consiguiente, no se puede saber con seguridad si la hipótesis nula es cierta o falsa. Por tanto, cualquier regla de decisión adoptada tiene cierta probabilidad de llegar a una conclusión errónea sobre el parámetro poblacional de interés.

Existen dos tipos de errores que son inherentes al proceso de contraste de hipótesis:

- Error Tipo I: Consiste en rechazar la hipótesis nula (H_0) cuando realmente es cierta
- Error Tipo II: Consiste en aceptar la hipótesis nula (H_0) cuando realmente es falsa

Si la regla de decisión es tal que $P(\textit{cometer Error Tipo I}) = \alpha$, es decir, la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando es cierta es α, entonces $\boldsymbol{\alpha}$ se llama **nivel de significación** del contraste. Nótese que α es una probabilidad condicional,

$$P(\textit{Rechazar } H_0 / H_0 \textit{ es cierta}) = \alpha$$

Puesto que la hipótesis nula tiene que ser aceptada o rechazada, la probabilidad de aceptar la hipótesis nula cuando es cierta es $(1-\alpha)$, es decir,

$$P(\textit{Aceptar } H_0 / H_0 \textit{ es cierta}) = 1-\alpha.$$

Por otro lado, la $P(\textit{cometer Error Tipo II}) = \beta$, es decir, la probabilidad de aceptar una hipótesis nula falsa se denota por β. También puede verse como,

$$P(\textit{Aceptar } H_0 / H_0 \textit{ es falsa}) = \beta$$

Entonces, la probabilidad de rechazar una hipótesis nula falsa es $(1-\beta)$, y se denomina **potencia** del contraste. Visto como una probabilidad condicional,

$$P(\textit{Rechaza } H_0 / H_0 \textit{ es falsa}) = 1-\beta.$$

En la Tabla 1 se resumen las situaciones posibles en un contraste de hipótesis al tomar la decisión sobre la hipótesis nula.

Tabla 1. Situación Real y decisiones sobre la hipótesis nula, con las probabilidades asociadas a cada decisión, dada una determinado situación real

DECISIONES SOBRE LA HIPÓTESIS NULA	**SITUACIÓN REAL**	
	H_0 VERDADERA	**H_0 FALSA**
ACEPTAR H_0	***Decisión correcta*** Probabilidad = $1-\alpha$	***Error Tipo II*** Probabilidad = β
RECHAZAR H_0	***Error Tipo I*** Probabilidad = α	***Decisión correcta*** Probabilidad = $1-\beta$

Ejemplo 4:

Haciendo referencia al ejemplo del juicio, se aclararán estas ideas. Se tiene que determinar si la persona llevada a juicio a un tribunal de justicia es inocente o culpable. Como se estableció más atrás, se consideró como hipótesis nula el que esta persona es inocente contrastándose con la hipótesis alternativa de que es culpable. Cuando la decisión es tomada se está en presencia de las situaciones expuestas en la Tabla 1.

Si el veredicto es que el acusado es declarado culpable, es decir, se rechaza H_0, entonces esta *decisión* puede ser la *correcta* si efectivamente esta persona es culpable. O por el contrario, se puede estar ante la presencia de un *Error Tipo I* que en este caso significa que ¡se está condenando a una persona inocente!

Pero, si el veredicto declara que el acusado es inocente, en otras palabras, se acepta H_0, esta puede ser la *decisión correcta* si ciertamente esta persona no cometió el delito. O se puede estar cometiendo un *Error Tipo II*, lo cual implica que ¡se está declarando inocente a una persona que realmente es culpable!

■

Ejercicio

¿Cuál de los dos errores anteriores es más grave? Justifique su respuesta.

Influencia de las Probabilidades α y β sobre una Prueba de Hipótesis

Evidentemente, lo ideal sería que las probabilidades de los dos tipos de error fuesen lo más pequeñas posible. Sin embargo, hay una clara compensación entre las dos. Cuando se ha tomado una muestra, cualquier modificación de la regla de decisión que haga menos probable rechazar una hipótesis nula cierta, inevitablemente, se traducirá en mayor probabilidad de aceptar esta hipótesis cuando es falsa. En otras palabras, cuando α decrece, β aumenta y viceversa.

Supóngase que se quiere contrastar, basándose en una muestra aleatoria, la hipótesis nula de que el verdadero peso medio del contenido de las cajas de cereales es al menos de 200 gramos: H_0: $\theta \geq 200$. Dado un tamaño muestral específico, digamos n = 30 observaciones, se puede adoptar la *regla de decisión* de "rechazar la hipótesis nula si el peso medio en la muestra es inferior a 185 gramos". Ahora, es fácil encontrar otra regla de decisión para la cual, la probabilidad de cometer un error de Tipo I es menor. Si se modifica la *regla de decisión* anterior para "rechazar la hipótesis nula si el peso medio en la muestra es inferior a 180 gramos", se conseguirá este objetivo.

Sin embargo, hay que pagar un precio. Si se usa la *regla de decisión modificada*, será más probable aceptar la hipótesis nula, tanto si es cierta como si es falsa (¿Por qué?) Por tanto, al disminuir la probabilidad de cometer un error de Tipo I, se ha aumentado la probabilidad de cometer un error de Tipo II. La única manera de disminuir simultáneamente las dos probabilidades de error será obtener más información sobre la verdadera media de la población, tomando una muestra mayor.

Habitualmente, lo que se hace en la práctica, es fijar la probabilidad de cometer un error de Tipo I a un nivel deseado, es decir, se fija el nivel de significación α. Esto determina, entonces, la regla de decisión adecuada, que a su vez determina la probabilidad de un error de Tipo II. Este procedimiento se ilustra en la Figura 2.

Para ilustrar este procedimiento, considérese de nuevo el problema de contrastar, a partir de una muestra de 30 observaciones, si el verdadero peso medio de las cajas de cereales es al menos de 200 gramos. Dada una regla de decisión, se pueden determinar las probabilidades de los errores de Tipo I y de Tipo II asociadas al contraste. Sin embargo, en realidad, se procede fijando primero la probabilidad de error de Tipo I. Supóngase, por ejemplo, que se quiere asegurar que la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando es cierta sea como mucho 0,05. Esto se puede conseguir eligiendo un número, *k*, apropiado a la regla de decisión "rechazar la hipótesis nula si la media muestral es inferior a k gramos" (más adelante se explicará cómo se puede hacer esto). Una vez elegido el número *k*, pueden calcularse las probabilidades del error de Tipo II usando los procedimientos que se expondrán más adelante. Así se puede observar que la regla de decisión queda determinada por el nivel de significación elegido.[4]

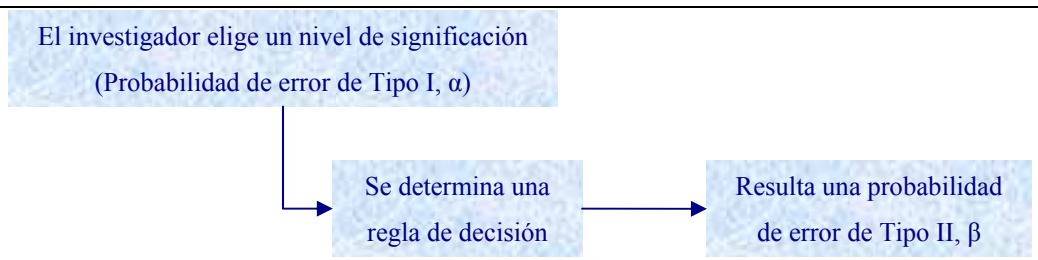

Figura 2. Consecuencias de fijar el nivel de significación de un contraste

[4] Basado en Newbold, Paúl. Op. Cit. Págs. 284-285

***Nota* 2:**

Al usar el criterio de fijar la probabilidad de error Tipo I, α, para encontrar una regla de decisión; implícitamente se está considerando a este error más grave que el error Tipo II. Así, al fijar α en un valor pequeño, el investigador está controlando directamente la probabilidad de cometer un error Tipo I. Por tal razón, al plantear las hipótesis siempre hay que hacerlo tomando en cuenta esto último, es decir, que "rechazar la hipótesis nula cuando es cierta" es un error más grave que "aceptar la hipótesis nula cuando es falsa".

Terminología adicional en el contraste de hipótesis

Estadístico de Contraste (o de Prueba)

Es aquella función de las observaciones muestrales que se usa para determinar si la hipótesis nula debe ser aceptada o rechazada.

Regla de Decisión

Una regla de decisión define las condiciones que llevan a la aceptación o rechazo de la hipótesis nula.

Región de Aceptación

Es un rango de valores, tal que si el estadístico de prueba queda dentro, la hipótesis nula se declara aceptable.

Región de Rechazo

Es un rango separado de valores, tal que si el estadístico de prueba queda dentro, la hipótesis nula se rechaza.

Valor(es) Crítico(s)

Los valores críticos son los números que definen las fronteras de la región de rechazo.

¿Cómo establecer los valores críticos?

Va a depender del:

1. nivel de significación, α.
2. tipo de distribución de probabilidad del estadístico de contraste
3. tipo de hipótesis alternativa que se esté contrastando (bilateral o unilateral)

Los valores críticos pertenecen a la región de rechazo. En la Figura 3 de forma ilustrativa se pueden apreciar las regiones de aceptación y rechazo, como también los valores críticos para las diferentes hipótesis alternativas.

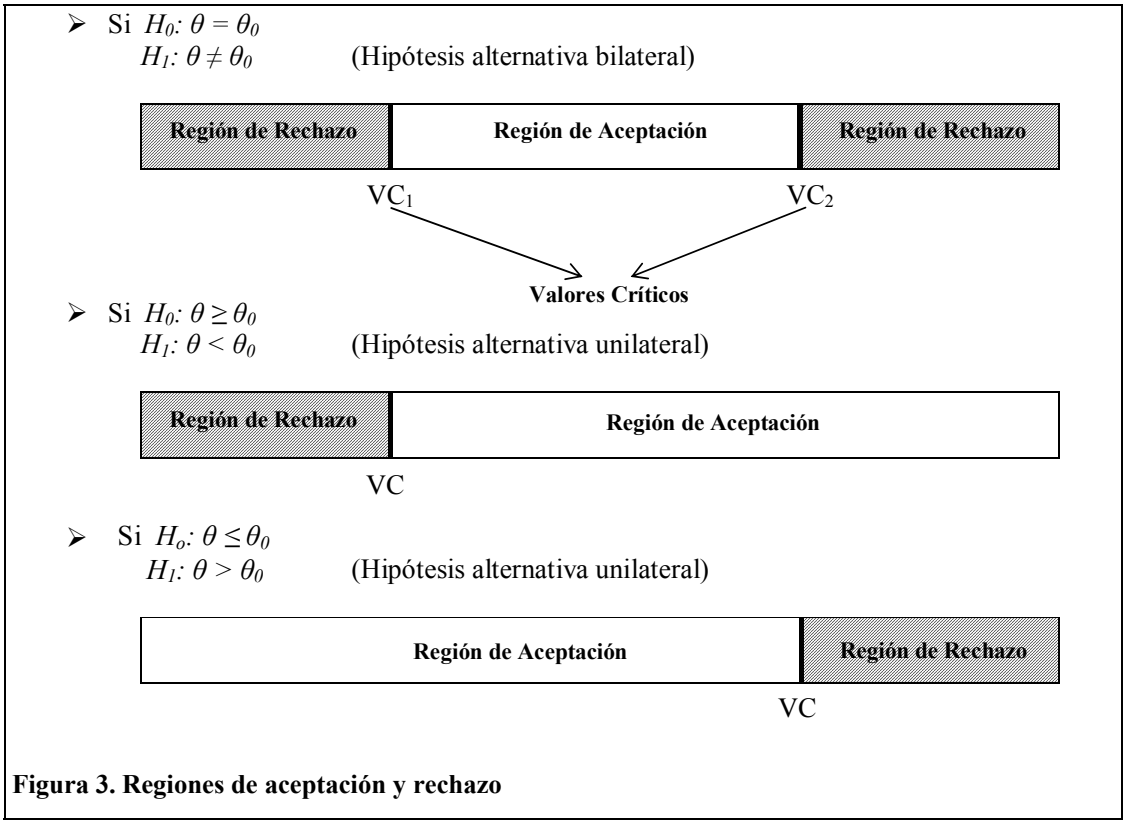

Figura 3. Regiones de aceptación y rechazo

Nota 3:

Los términos *aceptar (no rechazar)* y *rechazar* son comúnmente usados para las posibles decisiones sobre la hipótesis nula en los resúmenes formales de los resultados de un contraste particular. Sin embargo, estos términos no reflejan adecuadamente las consecuencias de un procedimiento en el que se fija el nivel de significación y no se controla la probabilidad de un error de Tipo II. Como ya se ha señalado, la hipótesis nula tiene estatus de hipótesis mantenida, una hipótesis que se considera cierta *salvo que los datos contengan suficiente evidencia en contra*. Además, al fijar el nivel de significación, generalmente en alguna probabilidad pequeña, se está asegurando que el riesgo de rechazar una hipótesis nula cierta sea pequeño.

Con esta estructura, una pequeña cantidad de datos no será suficiente para poderse colocar en posición de rechazar una hipótesis nula, aunque sea completamente errónea. Cuando aumenta el número de observaciones, es decir, aumenta el tamaño de la muestra, también lo hace la capacidad de la técnica de contraste para detectar una hipótesis nula falsa. Por tanto, al "aceptar" una hipótesis nula, no se está asegurando necesariamente, que haya mucho en su favor. Una afirmación más precisa sobre la situación es "los datos disponibles no proporcionan suficiente evidencia para rechazar la hipótesis nula" en lugar de "se acepta la hipótesis nula".
Se seguirá usando "aceptar" como una manera eficiente de expresar esta idea, pero es importante tener en cuenta la interpretación de la frase. La situación es muy similar a la de un tribunal de justicia, donde el acusado, al principio, goza de la presunción de inocencia, y la acusación debe presentar evidencia contraria lo suficientemente clara como para conseguir un veredicto de culpabilidad. En el contexto del contraste de hipótesis clásico, la hipótesis nula se considera cierta inicialmente. La tarea de persuadir de lo contrario corresponde a los datos de la muestra.[5]

[5] Newbold, Paul. Op.Cit. Pág. 286.

Casos Particulares

A continuación se introducirá la metodología del contraste de hipótesis clásico. Supóngase que se dispone de una muestra aleatoria de n observaciones, $X_1, X_{2, \dots,} X_n$, proveniente de una población con media μ y varianza σ^2.

1. Contrastes para la Media Poblacional

El objetivo es contrastar una hipótesis sobre la media poblacional desconocida.

Caso 1.1.

Asumiendo:

- Población con distribución normal
- Varianza poblacional, σ^2, conocida

Se comenzará con el problema de contrastar la hipótesis nula de que la media poblacional es igual a cierto valor, μ_0. Esta hipótesis se representa:

$$H_0: \mu = \mu_0$$

Supóngase que la hipótesis alternativa de interés es que la media poblacional supera este valor específico, es decir,

$$H_1: \mu > \mu_0$$

Es natural que el contraste sobre la media poblacional, se base en la media muestral $\overline{X}$. En este caso particular, el investigador desconfiará de la veracidad de una hipótesis nula, frente a esta alternativa, si la media muestral observada fuese mucho mayor que μ_0.

La idea es buscar la forma de un contraste con un nivel de significación α prefijado. El contraste se apoya en el hecho de que $\overline{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$ dado que la población,

digamos representada por la V.A. X, se distribuye normalmente, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Por tal razón, la variable aleatoria

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

Cuando la *hipótesis nula es cierta*, μ es igual μ_0, y en consecuencia, la variable aleatoria

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1) \qquad \textbf{(1)}$$

La variable Z de la ecuación (1) es lo que se llamará *Estadístico de Contraste* en este caso particular.

Ahora, se rechazará la hipótesis nula si la media muestral es mucho mayor que el valor μ_0 postulado para la media poblacional. Por tanto, H_0 será rechazada si se observa un valor alto para el estadístico de contraste en la ecuación (1)

Se quiere fijar en α la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando es cierta. Al igual que en la parte correspondiente a *intervalos de confianza*, se denotará por z_α el número para el cual

$$P(Z > z_\alpha) = \alpha$$

que significa, que cuando la hipótesis nula es cierta, la probabilidad de que el *estadístico de prueba Z* sea mayor que z_α es α.

Por tanto, denotando por $\bar{x}$ a la media muestral observada y si se adopta la siguiente *regla de decisión*:

$$\textbf{Rechazar } \boldsymbol{H_0} \textbf{ si } \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} > z_\alpha$$

entonces la probabilidad de rechazar H_0 cuando es cierta será α, luego α es el nivel de significación del contraste basado en esta regla de decisión.

Esta situación se observa en la Figura 4, la cual ilustra la distribución muestral del *estadístico de contraste* en ecuación (1) cuando la hipótesis nula es cierta, mediante un gráfico de su función de densidad. En la figura se señala el valor crítico z_α, tal que la probabilidad de superarlo, cuando la hipótesis nula es cierta, es el nivel de significación del contraste. Esto significa que la probabilidad de obtener un resultado muestral en la correspondiente región de rechazo, área sombreada de la figura, debe ser α cuando la hipótesis nula es cierta.

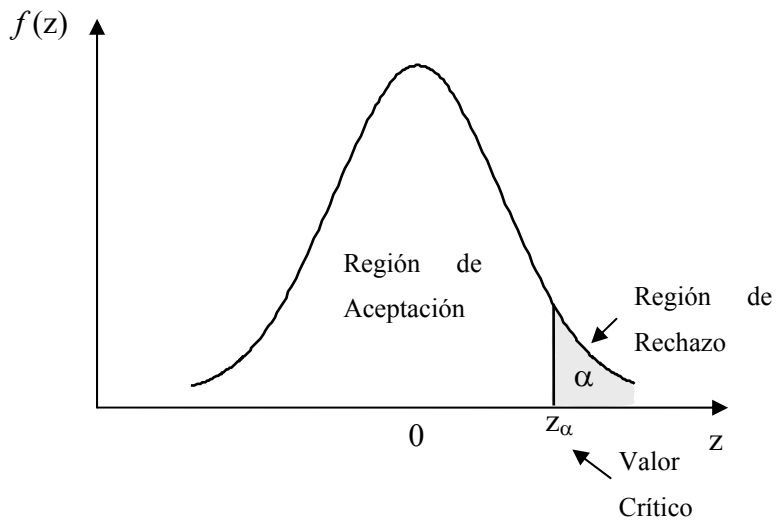

Figura 4. Función de densidad del estadístico de prueba $Z = (\bar{x} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ **cuando** H_0**:** $\mu = \mu_0$ **es cierta y regla de decisión para contrastar** H_0 ***frente a la alternativa*** H_1**:** $\mu > \mu_0$ **al nivel de significación** α

Ejemplo 5:

Cuando un proceso de producción de bolas de rodamiento funciona correctamente, el peso de las bolas tiene una distribución normal con media cinco gramos y desviación estándar 0,1 gramos. Se lleva a cabo una modificación del proceso, y el director de la fábrica sospecha que esto ha incrementado el peso medio de las bolas producidas, sin modificar la desviación estándar. Se toma una muestra aleatoria de 16 bolas, y se comprueba que su peso medio es de 5,038 gramos.

a. ¿Son válidas las sospechas del director de la fábrica? Use un nivel de significación del 5%
b. Responda la pregunta anterior usando, ahora, un nivel de significación del 10%

Solución:

a. Población: Peso (en gramos) de las bolas de rodamiento producidas en una fábrica
Denotando por μ el peso medio (en gramos) de las bolas de rodamientos, se quiere contrastar

$$H_0: \mu = 5$$

frente a

$$H_1: \mu > 5$$

¿Por qué son esas las hipótesis?

La regla de decisión es:

"Se rechaza H_0 ssí $Z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \geq z_\alpha$, en otro caso se acepta (no se rechaza) H_0"

Del enunciado del ejemplo, se tiene que:

$$\bar{x} = 5{,}038 \qquad \mu_0 = 5 \qquad \sigma = 0{,}1 \qquad n = 16$$

De esta manera,

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{5{,}038 - 5}{0{,}1 / \sqrt{16}} = 1{,}52$$

Para un contraste de nivel 5%, en las *tablas estadísticas* se puede hallar que

$$Z_{0,05} = 1{,}645$$

Como 1,52 no es mayor que 1,645, no se puede rechazar la hipótesis nula para un nivel de significación del 5%, es decir, se acepta la hipótesis nula con este nivel de significación. En otras palabras, si se usa un contraste que nos asegure que la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando es cierta es 0,05; los datos de la muestra no contienen suficiente evidencia como para rechazar esta hipótesis.

En términos del problema, se puede decir que no se han encontrado evidencias en la muestra que apoyen la sospecha del director de la fábrica en cuanto a que las modificaciones en el proceso han incrementado el peso medio de las bolas de rodamiento producidas.

b. Para un contraste de nivel 10%, se tiene que

$$Z_{0,10} = 1{,}28$$

Como 1,52 es mayor que 1,28, se rechaza la hipótesis nula para un nivel de significación del 10%. Hasta aquí, existe una cierta evidencia en los datos que sugiere que el verdadero peso medio supera los 5 gramos.

¿Qué es lo que se entiende por el *rechazo* de una hipótesis nula?

En el ejemplo anterior, la hipótesis de que el peso medio en la población es 5 gramos fue rechazada por un contraste con nivel de significación 0,1. Desde luego, esto no significa que se haya probado que la verdadera media supera los 5 gramos. Partiendo sólo de la información muestral, nunca será posible asegurar nada sobre un parámetro poblacional. Por el contrario, se puede pensar que los datos suscitan cierta duda sobre la veracidad de la hipótesis nula. **Si esta hipótesis fuese cierta, entonces el valor observado**

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = 1{,}52$$

representaría una observación de una distribución normal estándar. Al contrastar hipótesis, lo que realmente se está cuestionando es la verosimilitud (probabilidad) de observar un valor tan extremo si la hipótesis nula fuese cierta.

En el ejemplo anterior, se vio que la probabilidad de observar un valor mayor que 1,28 es 0,1. Por tanto, al rechazar la hipótesis nula, se está diciendo que la hipótesis nula es falsa o que se ha observado un suceso poco verosímil (que ocurriría sólo con la probabilidad que especifica el nivel de significación). Es en este sentido en el que la información muestral despierta dudas sobre la hipótesis nula.

Obsérvese que en el último ejemplo, la hipótesis nula fue rechazada al nivel de significación 0,10 pero no fue rechazada al menor nivel 0,05. Al rebajar el nivel de significación, se está reduciendo la probabilidad de rechazar un hipótesis nula cierta y, en consecuencia, se está modificando la regla de decisión para hacer menos verosímil que se rechace la hipótesis nula, tanto si es cierta como si no.

Obviamente, cuanto menor sea el nivel de significación al cual puede rechazarse una hipótesis nula, mayor será la duda sobre su veracidad. En lugar de contrastar hipótesis con niveles de significación asignados de antemano, los investigadores suelen determinar el menor nivel de significación al cual puede rechazarse la hipótesis nula.

Valor p

Es el nivel de significación más pequeño que conduce al rechazo de la hipótesis nula H_0.

El *valor p* señala la probabilidad (suponiendo que H_0 sea cierta) de obtener un valor del estadístico de prueba, por lo menos tan extremo como el obtenido.

Por tanto, de acuerdo con la regla de decisión en el problema anterior, se rechaza la hipótesis nula para cualquier nivel de significación α tal que z_α sea mayor que 1,52. El *valor p* del contraste viene dado en este caso por $p = P(Z > 1{,}52)$, que al usar las tablas estadísticas (tabla 8) se encuentra que p = 0,0643. La implicación es que la hipótesis nula puede ser rechazada para todos los niveles de significación mayores que 6,43%.

Este procedimiento compara la probabilidad, llamada **valor *p***, con el nivel de significancia α. Si el citado *valor p* es menor que dicho nivel, H_0 se rechaza. Si tal valor es mayor que el nivel en cuestión, H_0 se acepta.

Interpretación del peso de la evidencias contra H_0

Si el *valor p* es menor que[6]:

a. 0.10, se tiene *regular* evidencia de que H_0 no es verdadera.
b. 0.05, se tiene *fuerte* evidencia de que H_0 no es verdadera.
c. 0.01, se tiene *muy fuerte* evidencia de que H_0 no es verdadera.
d. 0.001, se tiene evidencia *extremadamente fuerte* de que H_0 no es verdadera.

Nota 4:

En los últimos años este concepto ha adquirido gran relevancia. Todos los programas estadísticos modernos proporcionan *valores p*, y algunas calculadoras de bolsillo permiten su cómputo. En consecuencia, actualmente, los estudios aplicados suelen proporcionar *valores p*.

---

[6] Tomado de Mason-Lind-Marchal. *Estadística para Administración y Economía*. Pág. 322.

Supóngase ahora, que en lugar de una hipótesis nula simple, se quiere contrastar la hipótesis nula compuesta

$$H_0: \mu \leq 5$$

frente a la alternativa

$$H_1: \mu > 5$$

al nivel de significación α. Para la regla de decisión desarrollada en el caso de la hipótesis nula simple, se vio que si la media de la población es precisamente μ_0, entonces la probabilidad de rechazar la hipótesis nula es α. <u>Para esta misma regla de decisión</u>, si la verdadera media de la población es menor que μ_0, parece aún menos verosímil rechazar la hipótesis nula. Por tanto, usar esta regla de decisión en el presente contexto garantiza que la probabilidad de rechazar la hipótesis nula compuesta cuando es cierta es como mucho α.

Referencias

1. Stevenson, W. (1981) Estadística para Administración y Economía. México, D.F.: Harla
2. Newbold, P. (1998) Estadística para los Negocios y la Economía. Madrid: Prentice Hall.

Índice