UNIVERSIDAD
DE LOS ANDES

Universidad de Los Andes
Instituto de Estadística Aplicada y Computación (IEAC)
Mérida, Venezuela

Métodos Estadísticos Básicos

Curso de Nivelación
Maestría en Estadística

Elementos Básicos de Probabilidad

Prof. Gudberto J. León R.
gudberto@ula.ve

Experimentos aleatorios

Los problemas reales a los que se aplica la teoría de la probabilidad están asociados a *experimentos aleatorios*.

Experimento

Un ***experimento*** es cualquier situación en la cual se observa un resultado. Si una moneda es lanzada, se observa si se obtiene una cara o un sello y se puede describir esto como el experimento del lanzamiento de una moneda.

Hay esencialmente dos tipos de experimentos: determinísticos y aleatorios.

En un *experimento determinístico*, a causa de una situación física, los resultados observados no están sujetos al azar.

En otras palabras, si se repite un experimento determinístico bajo exactamente las misma condiciones, se espera el mismo resultado.

Experimentos aleatorios

Por ejemplo:

Si se tiene un alambre recto y una regla (medida en milímetros), un experimento podría consistir en preguntar la medida de la longitud del alambre.

Si el experimento se repite bajo idénticas condiciones, se esperará el mismo resultado dado que el error experimental debería ser despreciable y así el experimento es esencialmente determinístico.

En un *experimento aleatorio* el resultado estará siempre sujeto al azar.

Si el experimento es repetido, el resultado puede ser diferente ya que hay algún fenómeno aleatorio o mecanismo aleatorio trabajando que afecta el resultado.

Ejemplos clásicos de tales experimentos ocurren en los juegos de casinos donde existen juegos basados en lanzamientos de dados, cartas, ruletas, monedas, etc.

Una característica de estos juegos es que cada vez que ellos se repiten cualquier resultado puede aparecer.

Experimentos aleatorios

Un ***experimento aleatorio*** posee las siguientes características:

1. Puede repetirse un número ilimitado de veces bajo *condiciones similares*.
2. Es posible conocer por adelantado todos los posibles resultados a que puede dar origen.
3. No puede predecirse con exactitud el resultado de una realización particular de ese experimento.

Experimentos aleatorios

En ocasiones, un experimento puede ser visto como aleatorio o determinístico, dependiendo de la escogencia del investigador y los objetivos que él espera lograr en la realización del experimento.

En el ejemplo del experimento de la medición de la longitud de un alambre recto:

Si se cambia la regla marcada en milímetros por una marcada más finamente y se pregunta a un grupo de individuos la medida del mismo alambre

entonces las lecturas individuales pueden exhibir un carácter aleatorio en los dígitos menos significativos.

Esta aleatoriedad podría ser causada por una variedad de efectos tales como el ángulo desde el cual se ve el objeto en la lectura (paralaje), diferentes métodos de sostener el alambre, las imperfecciones al final del alambre, etc.

Existe, de hecho, una teoría concerniente a la distribución de los errores en mediciones.

En un nivel macroscópico el experimento puede ser determinístico mientras en un nivel microscópico puede ser aleatorio.

Experimentos aleatorios

En la práctica se encuentra que los experimentos no son precisamente repetibles bajo el supuesto de "*condiciones similares*".

Este es el caso cuando hay factores afectando el resultado, que el experimentador no está consciente o que él no puede controlar.

También, cuando las factores que se suponen bajo control realmente no lo están.

A pesar de tomar las mayores precauciones para mantener la uniformidad en las condiciones del experimento al máximo posible, aparece una *variabilidad* intrínseca que no se puede controlar.

Debido a esta variabilidad, el resultado del experimento varía de forma irregular en las repeticiones sucesivas y el resultado de una realización particular no puede predecirse.

Por tanto, lo de "*condiciones similares*" no debe tomarse literalmente. El resultado no puede ser predicho por un conocimiento de las "condiciones" bajo las cuales el experimento se lleva a cabo.

Experimentos aleatorios

Dado lo impredecible o el elemento de azar en el experimento, los tipos usuales de modelos matemáticos que conllevan a ecuaciones de movimiento o ecuaciones de estado (que expresan leyes físicas, químicas, sociales) son inadecuadas y un nuevo tipo de estructura matemática se necesita para representar lo que toma lugar.

En términos generales, el objetivo de la teoría de la probabilidad es el proporcionar un *modelo matemático* adecuado para la descripción e interpretación de experimentos aleatorios.

Experimentos aleatorios

Los siguientes son ejemplos de experimento aleatorios:

1. En un proceso de fabricación se extrae uno (varios) de los artículos fabricados y se observa si es (son) o no defectuoso(s).
2. En un proceso de fabricación se extrae uno o varios de los artículos fabricados, y se les miden ciertos parámetros para compararlos con las especificaciones previas requeridas.
3. En uno o varios puntos dados de una ruta, se cuenta el número de vehículos que pasan durante un cierto lapso de tiempo.
4. En una planta de prueba se elige aleatoriamente un conjunto de lámparas eléctricas, y se conecta cada una de las que pertenecen a este conjunto hasta que se quema, observando en cada caso el respectivo tiempo de duración (vida útil de la lámpara).
5. Se lanza un dado repetidamente y se cuenta el número de lanzamientos hasta que salga el 6 por primera vez.
6. Se selecciona una empresa, y en un día dado se observa la cotización de sus acciones en la Bolsa.

Espacio muestral

El *espacio muestral*, denotado por Ω, es la colección de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio.

Ejemplos:

1. Una moneda es lanzada. Si es una moneda ordinaria, sus dos caras son diferentes y son llamadas *cara* y *sello*.

   Aunque es concebible que cuando la moneda cae, esta puede aterrizar *de canto*, la natural y útil lista de resultados contiene precisamente estos dos: *cara* y *sello*. Por tanto, Ω={*cara*, *sello*}.

2. Cuando se lanza un dado los posibles resultados son Ω={1, 2, 3, 4, 5, 6}
3. Se lanzan tres monedas. La clasificación mas detallada de resultados incluiría que pasa con cada una de las monedas. Pero si se está interesado en conocer solamente el número de caras que muestran las tres monedas, el espacio muestral Ω = {0, 1, 2, 3}, es adecuado.

Espacio muestral

4. Cuando un misil es disparado a un objetivo en la superficie de la tierra, el resultado no puede ser predicho en términos del conocimiento o cantidades medidas dada la incertidumbre en el propulsor, en las condiciones atmosféricas y en la dirección de puntería.

   El experimento es entonces mejor pensado como un experimento aleatorio.

   El resultado de el experimento es el punto de “aterrizaje” del misil.

   El conjunto de todos los puntos sobre la superficie de la tierra (quizás restringidas dentro de alguna distancia razonable de el objetivo), seria el espacio muestral.

   Si se asume una superficie plana, y una cuadricula rectangular es colocada sobre el área objetivo, la representación de la coordenada del punto de aterrizaje en esta cuadricula puede ser usada para identificar el resultado.

   El espacio muestral es entonces esencialmente la colección de pares ordenados de números, es decir, de conjuntos de coordenadas (x, y).

Espacio muestral

5. En un proceso de fabricación se extrae uno (o varios) de los artículos fabricados y se observa si es (son) o no defectuoso(s).

   Si se extrae un articulo, puede tomarse Ω = {*B*, *D*}, donde *B* indica *bueno* y *D* *defectuoso*.

   Si se extraen *n* artículos puede considerarse

$$\Omega = \{ (x_1, x_2, \cdots, x_n) \setminus x_i = 0 \quad \text{ó} \quad 1 \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \}$$

   donde $x_i = 0$ indica *bueno* y $x_i = 1$ indica *defectuoso*.

   Es decir, Ω es el conjunto de todas las *n* posibles combinaciones de ceros y unos. En este caso, Ω consta de 2^n elementos.

   En particular $\sum_{i=1}^{n} x_i$ indica el número de defectuosos en un elemento de Ω, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Espacio muestral

6. En uno o varios puntos dados de una ruta, se cuenta el número de vehículos que pasan durante un cierto lapso de tiempo.

Se puede tomar como espacio muestral Ω = {0, 1, 2,....}, es decir, el conjunto de los enteros no negativos.

Si se sabe que el número de vehículos considerados no supera por ejemplo a 10^{10}, se puede considerar $\Omega_1 = \left\{ x \setminus 0 \leq x \leq 10^{10} \right\}$

Aunque el hecho de que Ω_1 sea subconjunto de Ω, no necesariamente se puede concluir que la descripción del experimento aleatorio mediante Ω_1 sea mas simple que la que se obtiene utilizando Ω.

Espacio muestral

7. Se elige aleatoriamente una lámpara eléctrica de un lote y se conecta hasta que se quema. Se registra el tiempo de duración (vida útil de la lámpara). Así se puede considerar

$$\Omega = \{x \setminus x \in \mathbb{R},\ x \geq 0\}$$

Es decir, el conjunto de los números reales no negativos. Si se eligen *n* lámparas, puede tomarse

$$\Omega = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \setminus x_i \in \mathbb{R},\ x_i \geq 0\}$$

Espacio muestral

Punto Muestral

Los resultados en el *espacio muestral* Ω son llamados ***puntos muestrales*** o ***resultados elementales***.

Para denotar en general a los puntos muestrales se usa la letra *w*.

Evento

Evento

Cualquier subconjunto *A de* Ω es un ***evento*** (Esta no es una definición precisa. La definición correcta será establecida luego en la asignatura Teoría Estadística I)

El evento *A* es una colección de puntos muestrales.

Se dice que el *evento A* ***ha ocurrido*** si el resultado del experimento corresponde a un elemento de *A*.

Si el resultado no es un punto muestral de *A*, se dice que el *evento A* ***no ha ocurrido***.

Evento

Evento Simple y Evento Compuesto

Cada conjunto formado por un punto muestral *w* es conocido como un ***evento simple o elemental*** (o *indivisible*).

Cualquier *evento simple* de un experimento aleatorio es representado por uno, y sólo un *punto muestral*.

Cuando un evento contiene más de un *punto muestral* se le llama ***evento compuesto***.

Evento

Nota:

Se está interesado principalmente en eventos porque se quiere conocer la probabilidad de que un evento ocurra.

Entonces, seguramente se quiere incluir Ω, el evento seguro.

También, si A es un evento, significa que se puede hablar acerca de la probabilidad de que A ocurra.

Entonces A^c debería también ser un evento tal que se pueda hablar de la probabilidad de que A no ocurra.

Similarmente, si A_1 y A_2 son eventos entonces $A_1 \cup A_2$ debería ser también un evento.

Álgebra de Eventos

EVENTOS	CONJUNTOS
• Evento seguro	Ω
• Evento imposible	$\varnothing$
• Que ocurra A, y B no; ó que no ocurra A y B sí; o que ocurran ambos A y B	$w \in A \cup B$
• Que ocurra el evento A y el evento B	$w \in A \cap B$
• A y B son mutuamente excluyentes (no pueden ocurrir simultáneamente)	$A \cap B = \varnothing$
• Que no ocurra A	$w \in A^c = \Omega - A$
• A y B son exhaustivos	$A \cup B = \Omega$
• A y B son exhaustivos y excluyentes	$A \cup B = \Omega$ y $A \cap B = \varnothing$
• A ocurre si ocurre B	$A \supset B$
• Exactamente ocurre uno de los sucesos A o B	$w \in (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$

Evento

Ejemplos:

1. Considérese el lanzamiento de una moneda.

   El espacio muestral es el conjunto $\Omega = \{c, s\}$

2. Si la moneda es lanzada dos veces, entonces Ω = {cc, cs, sc, ss}, donde el primer elemento denota el resultado del primer lanzamiento y el segundo elemento el resultado del segundo lanzamiento.

   Sea el evento,

   A = {Que el resultado del lanzamiento sea al menos una cara}.

   Entonces se tiene que A esta formada por los puntos muestrales:

   A = {cc, cs, sc}.

   El evento B = {a lo más una cara}, es B = {cs, sc, ss}

Evento

3. Un dado es lanzado n veces.

El espacio muestral es:

$\Omega = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \setminus x_i = 1, 2, 3, 4, 5, 6;\ i = 1,2,\ldots, n\}$

Ω contiene 6^n puntos muestrales. El evento A que el resultado es al menos un uno, es el conjunto:

$A = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \setminus$ al menos uno de los x_i $(i = 1,2,\ldots, n)$ es $1\}$

$A = \Omega - \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \setminus$ ninguno de los x_i $(i = 1,2,\ldots, n)$ es $1\}$

$A = \Omega - \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \setminus x_i = 2, 3, 4, 5, 6;\ i = 1,2,\ldots, n\}$

Evento

4. Se elige al azar una lámpara eléctrica y se conecta hasta que se quema. Se registra el tiempo de duración.

   El espacio muestral es:

   $$\Omega = \{x / x \in R\}$$

   sea el evento:

   A = {*La lámpara dura al menos t horas pero se quema antes de h horas*}.

   Así,

   $A = \{x \setminus t \leq x \leq h;\ \ x,t,h \in \mathbf{R};\ x \geq 0;\ 0 \leq t \leq h\}$

   Entonces A es un evento para cualquier $0 \leq t \leq h$

Definición axiomática de probabilidad

Sea Ω un espacio muestral cualquiera y *A* cualquier evento asociado a éste. Se llamará ***función de probabilidad*** (o simplemente ***probabilidad***) a *P*(*A*) si satisface los siguientes axiomas (*axiomas de Kolmogorov*):

1. $P(A) \geq 0$ para todo evento *A*
2. $P(\Omega) = 1$
3. Sea $\{A_i\}$, $i=1,2,...$, una sucesión disjunta de eventos, es decir, $A_i \cap A_k = \emptyset$ para $i \neq k$. Entonces:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Nota

P(*A*) se lee: "La probabilidad del evento *A*" o "La probabilidad de que el evento *A* ocurra", lo cual significa la probabilidad de que cualquier resultado en *A* ocurra.

Propiedades de P

Las siguientes son algunas de las propiedades que son consecuencia de los axiomas de Kolmogorov:

<u>Teorema</u> Probabilidad del evento imposible

La probabilidad del evento imposible es cero: $P(\varnothing) = 0$

<u>Teorema</u> Probabilidad de la unión finita de eventos disjuntos

Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ son eventos mutuamente excluyentes, entonces:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

<u>Teorema</u> Probabilidad del evento complemento

Si A es un evento, entonces: $P(A^c) = 1 - P(A)$

Corolario

Para cualquier evento A, $P(A) \leq 1$

<u>Teorema</u> Probabilidad del evento $A \cap B^c$

Si A y B son eventos cualesquiera , entonces:

$P(A) = P(AB) + P(AB^c)$

$P(A-B) = P(A) - P(AB) = P(AB^c)$

<u>Teorema</u> Probabilidad de la unión de dos eventos cualesquiera

Sean A y B dos eventos cualesquiera, entonces:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Nota:

Si A es el evento seguro (Ω) entonces $P(A) = 1$, y si A es el evento imposible ($\emptyset$) entonces $P(A) = 0$. Debe tenerse cuidado con lo contrario de estas aseveraciones, ya que no necesariamente son verdaderas.

Ejemplo :

Considere el espacio muestral, Ω, que consiste de precisamente dos puntos "*a*" y "*b*", y $P(\emptyset) = P(\{a\}) = 0,\;\; P(\Omega) = P(\{b\}) = 1$

Entonces $P(\{a\}) = 0$, pero el evento $\{a\}$ no es imposible (es decir, $\{a\} \neq \emptyset$).

Sin alguna formalidad, puede considerarse el experimento de escoger un número aleatorio del intervalo (0,1).

Sea $A = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ (es decir *A* es el evento que el número aleatoriamente escogido es ½), entonces es intuitivamente claro que $P(A) = 0$. Sin embargo *A* no es imposible.

La aseveración que $P(A)=0$ puede también ser discutida en términos de las frecuencias relativas, cuando eso es equivalente a decir que $n(A)/n$ esta cercano a 0 para un número grande de realizaciones del experimento. Así, en cualquier simple ejecución del experimento es virtualmente cierto que *A* no ocurrirá.

Ejemplo:

Supóngase que A y B son dos eventos para los cuales $P(A) = 0{,}6$; $P(B) = 0{,}7$; y $P(AB) = 0{,}4$. Encuentre las siguientes probabilidades:

1. $P(A \cup B)$
2. $P(AB^c)$
3. $P(BA^c)$
4. $P\left[(AB)^c\right]$
5. $P\left[(A \cup B)^c\right]$
6. $P(A^c \cap B^c)$

<u>Ejemplo</u>: (**Probabilidad de que ocurra exactamente uno de los dos eventos**)

Supóngase que A y B son dos eventos. Demuestre que la probabilidad de que exactamente uno de los eventos ocurra es igual a $P(A) + P(B) - 2\,P(AB)$.

<u>Ejemplo</u>

La probabilidad de que una persona vaya a un concierto el sábado es 2/3 , y la probabilidad que vaya al juego de béisbol el domingo es 4/9. Si la probabilidad de que vaya a cualquiera o ambos espectáculos es 7/9, encuentre las siguientes probabilidades:

a. La persona va a ambos programas
b. La persona va el sábado al concierto, pero no al juego de béisbol
c. La persona va exactamente a un programa

Probabilidad Condicional

Ejemplo:

En la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales (FACES) de la Universidad de los Andes coexisten cuatro carreras universitarias: Estadística, Economía, Contaduría y Administración de Empresas. Supóngase que se selecciona al azar un estudiante de la FACES. Determine como calcular:

a. La probabilidad de que el estudiante seleccionado sea mujer.
b. La probabilidad de que el estudiante seleccionado estudie la carrera de Estadística.
c. La probabilidad de que el estudiante seleccionado sea mujer y estudie Estadística.
d. La probabilidad de que el estudiante seleccionado estudie estadística si se sabe que es mujer.

Probabilidad Condicional

Solución:

Sean los eventos:

S = {*El estudiante cursa la carrera de Estadística*}

E = {*El estudiante cursa la carrera de Economía*}

A = {*El estudiante cursa la carrera de Administración*}

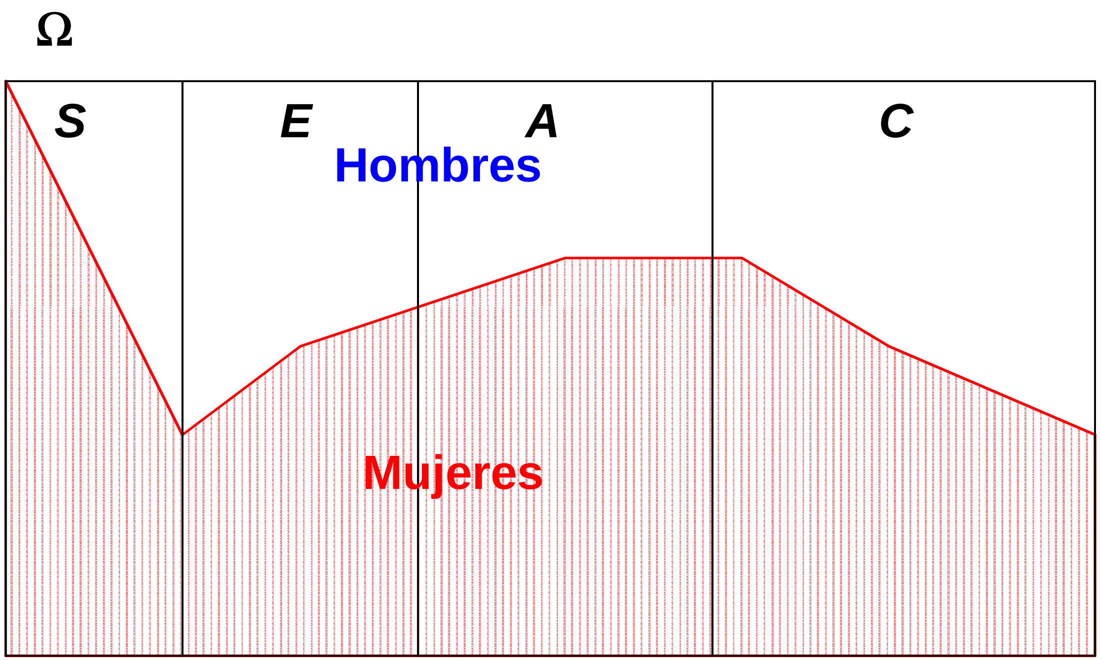
C = {*El estudiante cursa la carrera de Contaduría*}

M = {*El estudiante es mujer*}

H = {*El estudiante es hombre*}

Probabilidad Condicional

Asumiendo que ningún estudiante puede estar cursando dos carreras simultáneamente, se puede ilustrar en un diagrama de Venn los eventos de interés, tal y como se muestra en la siguiente Figura:



De este modo el espacio muestral viene dado por:

$$\Omega = \{SM,\ SH,\ EM,\ EH,\ AM,\ AH,\ CM,\ CH\}$$

a. Se desea calcular $P(M)$. Contando con la información adecuada se puede encontrar esta probabilidad de la siguiente forma:

$$P(M) = \frac{n(M)}{n(\Omega)}$$

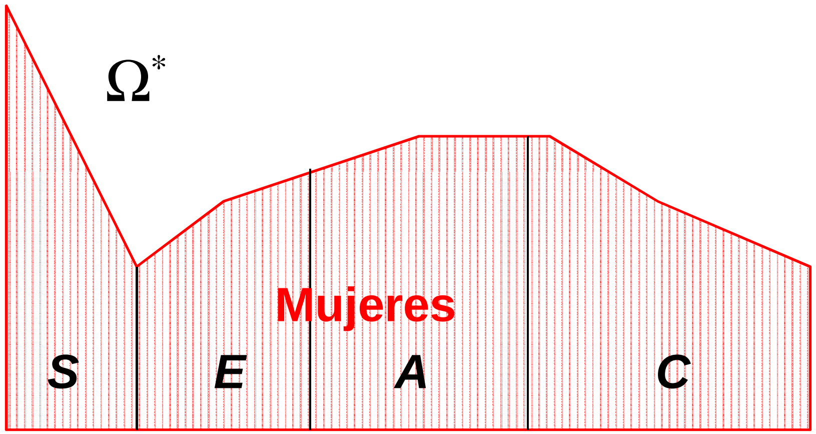
b. De manera similar a la parte a., para calcular $P(E)$ se tiene que:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)}$$

c. Ahora se desea $P(M \cap E)$. Igual que antes,

$$P(M \cap E) = \frac{n(M \cap E)}{n(\Omega)}$$

En este caso ya se tiene una información adicional: “se sabe que el estudiante seleccionado es mujer”. Por lo tanto, la información referente a los hombres ya es innecesaria. Véase en la siguiente figura cómo la información sobre los hombres ya no hace falta, debido a que se conoce que el estudiante seleccionado es mujer.



De esta manera, se elimina del espacio muestral la información correspondiente a los hombres:

$$\{SM,\ \cancel{SH},\ EM,\ \cancel{EH},\ AM,\ \cancel{AH},\ CM,\ \cancel{CH}\}$$

Probabilidad Condicional

Nótese que ahora el espacio muestral (reducido) es:

$$\Omega^* = M = \{SM, EM, AM, CM\}$$

De este modo, para responder la pregunta solamente se tomarán en cuenta a las mujeres que estudian la carrera de Estadística. En otras palabras, se debe calcular la probabilidad que el estudiante curse la carrera de Estadística, pero sobre el espacio muestral Ω^*.

En este caso esta probabilidad se denota $P(S \setminus M)$ y se lee "La probabilidad que el estudiante seleccionado estudie estadística si se sabe que es mujer".

$$P(E \setminus M) = \frac{n(E \cap M)}{n(\Omega^*)} = \frac{n(E \cap M)}{n(M)}$$

Probabilidad Condicional

Nótese lo siguiente:

$$P(E \setminus M) = \frac{n(E \cap M)}{n(M)} = \frac{n(\Omega)}{n(\Omega)} \frac{n(E \cap M)}{n(M)} = \frac{\left(\dfrac{n(E \cap M)}{n(\Omega)}\right)}{\left(\dfrac{n(M)}{n(\Omega)}\right)}$$

$$\therefore P(E \setminus M) = \frac{P(E \cap M)}{P(M)}$$

Nota:

Obsérvese que se está recalculando la probabilidad de ocurrencia del evento *E*, la cual había sido calculada previamente en la parte b., cuando no se tenía información adicional sobre la selección del estudiante. Ahora, cuando de alguna manera se tiene la información de que la persona seleccionada es mujer, entonces, esta probabilidad del evento *E* es corregida al recalcularla tomando en cuenta la nueva información.

Definición de Probabilidad Condicional

Sean A y B dos eventos, la ***probabilidad condicional*** del evento A, dado el evento B, denotada por $P(A \setminus B)$, está definida por:

$$P\left(A \setminus B\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad , \quad \text{si} \quad P(B) > 0$$

Probabilidad Condicional

<u>Ejemplo</u>:

Dos dados (balanceados) son lanzados. Dado que la suma de los dados es mayor que siete, encuentre la probabilidad que los dos dados muestren el mismo número.

Solución:

Sean los eventos,

A = {*La suma de los dados es mayor que* 7}

B = {*Los dados muestran el mismo número*}

Entonces,

$A = \{(2,6),(6,2),(3,5),(5,3),(4,4),(3,6),(6,3),(4,5),(5,4),(5,5),(6,4),(4,6),(5,6),(6,5),(6,6)\}$

$B = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$

Así, $P(B \setminus A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{\frac{3}{36}}{\frac{15}{36}}$ $\qquad \therefore P(B \setminus A) = \dfrac{1}{5}$

Probabilidad Condicional

Ejemplo:

Un transporte de misiles tiene dos mecanismos de frenado: Un freno hidráulico y uno mecánico. Se estima que la probabilidad de que por lo menos uno de ellos funcione correctamente es de 0,99. La probabilidad de que funcione el freno hidráulico es de 0,96. Si el freno hidráulico falla ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra un accidente?

Solución:

Sean los eventos,

A = {*El freno hidráulico funciona correctamente*}

B = {*El freno mecánico funciona correctamente*}

Así se tiene del enunciado que, $P\left(A \cup B\right) = 0{,}99$ y $P\left(A\right) = 0{,}96$. Se debe encontrar $P\left(B^c \setminus A^c\right)$

Probabilidad Condicional

$$P\left(B^c \setminus A^c\right) = \frac{P\left(A^c \cap B^c\right)}{P\left(A^c\right)} = \frac{P\left[\left(A \cup B\right)^c\right]}{P\left(A^c\right)} = \frac{1 - P\left(A \cup B\right)}{1 - P\left(A\right)} = \frac{0{,}01}{0{,}04}$$

$$P\left(B^c \setminus A^c\right) = 0{,}25$$

Teorema de probabilidad total

Motivación

Supóngase que un escritorio tiene dos gavetas.

Una de las gavetas tiene tres bolas verdes, denotadas G_1V_1, G_1V_2, G_1V_3, y dos bolas blancas, denotadas G_1B_1, G_1B_2.

La segunda gaveta tiene cuatro bolas verdes, las cuales se pueden representar por $G_2 V_1$ $G_2 V_2$, $G_2 V_3$, G_2V_4, y tres bolas blancas, denotadas $G_2 B_1$, $G_2 B_2$, $G_2 B_3$.

Una gaveta se selecciona aleatoriamente y una bola se extrae de ella. Interesa encontrar la probabilidad de que esta bola sea verde.

(Tomado de Khazanie, Ramakant. Op. Cit. Págs. 78-79.)

Teorema de probabilidad total

Sea el evento,

A = {La bola es verde}

Se encontrará $P(A)$ por dos métodos. El primero de estos consiste en escribir el espacio muestral explícitamente.

Método 1:

El espacio muestral tiene doce resultados y puede ser escrito como:

$\Omega = \{G_1V_1, G_1V_2, G_1V_3, G_1B_1, G_1B_2, G_2V_1\ G_2V_2, G_2V_3, G_2V_4, G_2B_1, G_2B_2, G_2B_3\}$

Estos resultados no son igualmente probables.

De hecho a los primeros cinco resultados en Ω: G_1V_1, G_1V_2, G_1V_3, G_1B_1, G_1B_2 se les asigna una probabilidad de 1/10, mientras que al resto de los resultados en W se les asigna una probabilidad de 1/14.

Teorema de probabilidad total

Al seleccionar la gaveta se tienen dos posibles resultados.

Si la gaveta seleccionada es la 1 entonces existen 5 posibilidades de seleccionar una bola (tres verdes y dos blancas).

Por la regla básica del conteo se tiene $2*5=10$ maneras de seleccionar una bola de la gaveta 1.

De esta forma la probabilidad de seleccionar una bola de la gaveta 1 es 1/10.

De la misma manera se obtiene la probabilidad de seleccionar una bola de la gaveta 2 (1/14).

Ahora,

$A = \{G1V1, G_1V_2, G_1V_3, G_2V_1, G_2V_2, G_2V_3, G_2V_4\}$

Por tanto, dado que el espacio muestral es finito:

$$P(A) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{14} + \frac{1}{14} + \frac{1}{14} + \frac{1}{14} = \frac{41}{70}$$

Método 2:

Existe una manera más elegante de encontrar $P(A)$. El método presentado aquí no requiere que se escriba Ω. Se tiene que,

$$\text{Seleccionar una bola verde} \quad \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \text{seleccionar gaveta 1} \\ \text{y} \\ \text{selecionar bola verde} \end{pmatrix} \text{ o } \begin{pmatrix} \text{seleccionar gaveta 2} \\ \text{y} \\ \text{seleccionar bola verde} \end{pmatrix}$$

De esto, sea B_i = {*Gaveta i es seleccionada*}, $i = 1, 2$. Puede escribirse

$$A = (B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A)$$

Entonces,

$P(A) = P(B_1 \cap A) + P(B_2 \cap A)$, por propiedades de la probabilidad, ya que $B_1 \cap A$ y $B_2 \cap A$ son mutuamente excluyentes. Y por la regla de la multiplicación:

$P(A) = P(B_1) * P(A \backslash B_1) + P(B_2) * P(A \backslash B_2)$

Como $P(A\backslash B_1) = 3/5$, $P(A\backslash B_2) = 4/7$ y $P(B_1) = P(B_2) = 1/2$, se tiene finalmente que

$$P(A) = \frac{1}{2} * \frac{3}{5} + \frac{1}{2} * \frac{4}{7} = \frac{41}{70}$$

Teorema de probabilidad total

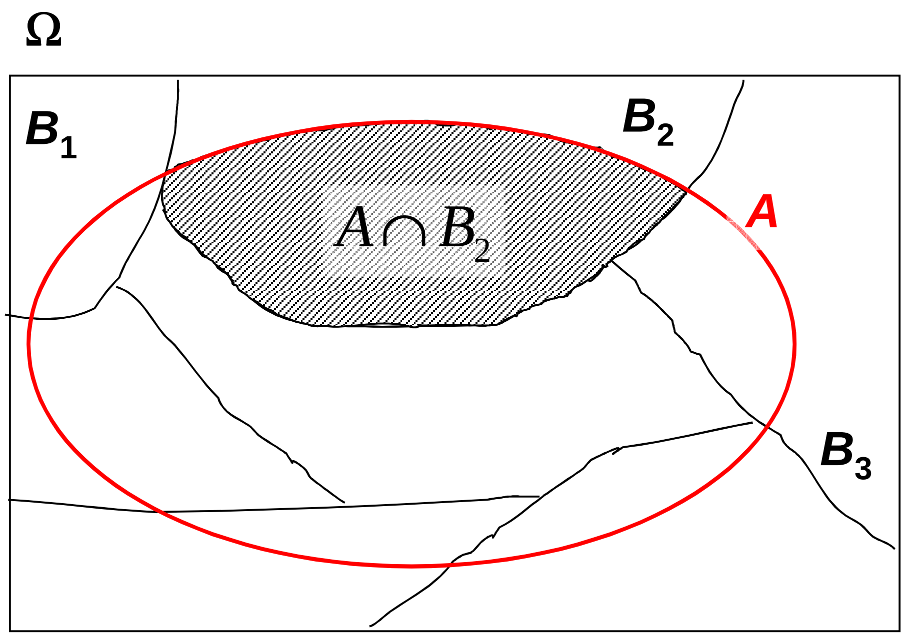
Teorema de Probabilidad Total

Sea un espacio muestral Ω, si $\{B_i\}$ es una colección contable de eventos mutuamente excluyentes y exhaustivos tales que $P(B_i) > 0$, $i = 1, 2, \ldots$. Si A es un evento cualquiera, entonces:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i)P(A \setminus B_i)$$

Teorema de probabilidad total

De manera ilustrativa, en la siguiente figura se puede ver como el evento A ocurre simultáneamente con cada uno de los eventos B_i que forman la partición del espacio muestral:



Teorema de probabilidad total

Prueba:

Como $A = A \cap$W, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(A \cap \Omega) \\
&= P\left[A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \right) \right], \text{ ya que los } B_i \text{ son exhaustivos.} \\
&= P\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap B_i) \right], \text{ por la propiedad distributiva.}
\end{aligned}
$$

Ahora, como $B_i \cap B_j = \varnothing \; \forall i \neq j$, entonces $(AB_i) \cap (AB_j) = \varnothing \; \forall i \neq j$

Así, se llega a que:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A \cap B_i), \quad \text{por axioma 3}$$

Y por regla de la multiplicación, $$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) P(A \setminus B_i)$$

Teorema de probabilidad total

Corolario

Sea el evento B que satisface $0<P(B)<1$; entonces para todo evento A:

$$P(A) = P(A \setminus B) * P(B) + P(A \setminus B^c) * P(B^c)$$

Nota:

El teorema anterior (y su corolario) es particularmente útil para los *experimentos que tienen estados*; es decir, el experimento consiste en realizar primero una cosa (primer estado) y entonces otra (segundo estado). Por ejemplo, uno selecciona primero una gaveta y entonces extrae una bola de la gaveta seleccionada. Para tales experimentos, si B_i es un evento definido solamente en términos del primer estado y A es un evento definido en términos del segundo estado, entonces puede ser fácil encontrar $P(B_i)$; también puede ser fácil encontrar $P(A \setminus B_i)$, y entonces el *teorema de probabilidad total* evalúa $P(A)$ en términos de $P(B_i)$ y $P(A \setminus B_i)$ para $i=1, 2, \ldots, n$. En un experimento consistente de estados, es natural condicionar sobre resultados de un primer estado. (Mood, Graybill y Boes. Introduction to the Theory of Statistics p. 36)

Teorema de Bayes

Si $\{B_i\}$ es una colección contable de eventos mutuamente excluyentes y exhaustivos tales que $P(B_i)>0$, y A un evento arbitrario con $P(A)>0$. Entonces:

$$P(B_i \setminus A) = \frac{P(A/B_i)P(B_i)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(A/B_i)P(B_i)}, \quad \text{para todo } i$$

Teorema de Bayes

Prueba:

La prueba sigue inmediatamente del teorema de probabilidad total. Ya que $P(A)>0$, se tiene que:

$$P(B_i \setminus A) = \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)}$$

Por la regla de la multiplicación, $P(B_i \cap A) = P(A \setminus B_i)P(B_i)$

Y por el teorema de probabilidad total, $P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A \setminus B_i)P(B_i)$

Sustituyendo, queda que:

$$P(B_i / A) = \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A / B_i)P(B_i)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(A / B_i)P(B_i)}$$

Corolario

Sean A y B dos eventos y satisfacen que $P(A) > 0$ y $0 < P(B) < 1$, entonces:

$$P(B \setminus A) = \frac{P(A \setminus B)P(B)}{P(A \setminus B)P(B) + P(A \setminus B^c)P(B^c)}$$

Nota:

1. La regla de Bayes es frecuentemente llamada “regla de Bayes para la ***probabilidad de causas***”. La razón para esto es la siguiente:

   El evento A puede ocurrir en conjunción con los eventos B_i, i=1, 2, … y como tal pueden considerarse los eventos B_i como causas para A. Al intentar encontrar $P\left(B_i \setminus A\right)$, interesa la probabilidad de B_i dado que A ha ocurrido. En otras palabras, dado que A ha ocurrido, se quiere la probabilidad de que fue causada por B_i.

Teorema de Bayes

Como fue el caso con el teorema de probabilidad total, la fórmula de Bayes es particularmente útil para los experimentos consistentes de estados. Si B_i, $i = 1, 2, \ldots$ es un evento definido en términos de un primer estado y A es un evento definido en términos del experimento completo incluyendo un segundo estado, entonces preguntar por $P(B_i \setminus A)$ es como regresarse; uno está preguntando por la probabilidad de un evento definido en términos de un primer estado del experimento condicionado a lo que pasó en un estado posterior de ese experimento. El condicionamiento natural seria sobre que pasa en el primer estado del experimento, y esto es precisamente lo que el teorema de Bayes hace; expresa $P(B_i \setminus A)$ en términos del condicionamiento natural dado por $P(A \setminus B_i)$ y $P(B_i)$, $i = 1, 2, \ldots$.

Teorema de Bayes

2. Las probabilidades $P(B_i)$, i = 1, 2, …, son llamadas ***probabilidades a priori***, y $P\left(B_i \setminus A\right)$ ***probabilidad a posteriori***. La regla de Bayes puede ser usada para calcular las *probabilidades a posteriori* si se conocen las *probabilidades a priori* $P(B_i)$, i = 1, 2, … y las probabilidades condicionales , $P\left(A \setminus B_i\right)$, i = 1, 2,…

(Tomado de Khazanie, Ramakant. Op. Cit. Págs. 80-81 y Mood, Graybill, Boes. Op. Cit. Págs. 36-37.)

Teorema de Bayes

Ejemplo:

El diagnóstico de la hepatitis se hace usualmente por medio de una prueba sanguínea. La confiabilidad de la prueba es como sigue: entre las personas con hepatitis, el 80% de las pruebas detectan la enfermedad pero el 20% de esas pruebas fallan en detectarla. Entre las personas sin hepatitis, la prueba diagnostica erróneamente que el 5% tiene la enfermedad y al 95% las diagnostica correctamente que no la tiene. Supóngase que se selecciona una persona al azar de un grupo grande de personas entre quienes solo el 1% tiene hepatitis y se les realiza una prueba que indica que tiene hepatitis. ¿Cuál es la probabilidad de que esa persona tenga en efecto la enfermedad?

Teorema de Bayes

Solución:

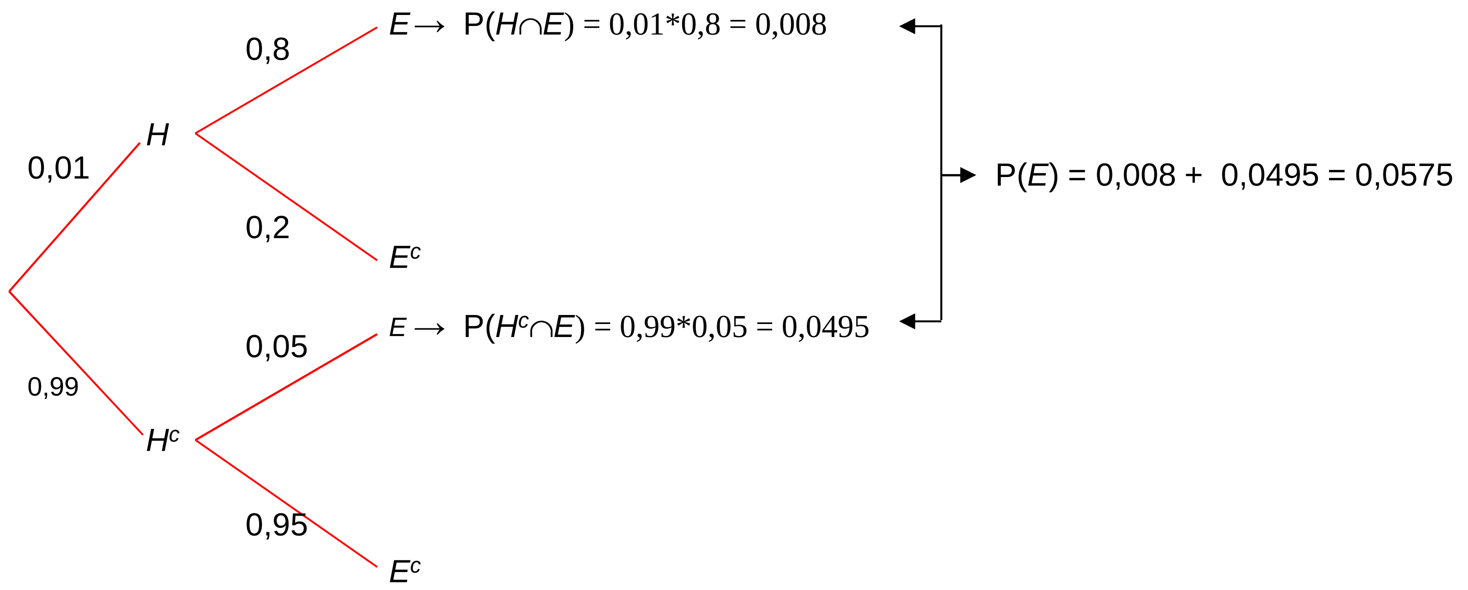
Sean los eventos:

H = {*La persona tiene hepatitis*}

E = {*La prueba indica que tiene la enfermedad*}

E^c = {*La prueba indica que no tiene la enfermedad*}

Una manera sencilla de abordar este tipo de problema es usando el diagrama de árbol, como se ilustra en la siguiente figura:



Teorema de Bayes

Se debe encontrar $P(H\backslash E)$:

$$P(H \backslash E) = \frac{P(H \cap E)}{P(E)} = \frac{0,008}{0,0575}$$

$$\therefore P(H \backslash E) = 0,1391$$

Teorema de Bayes

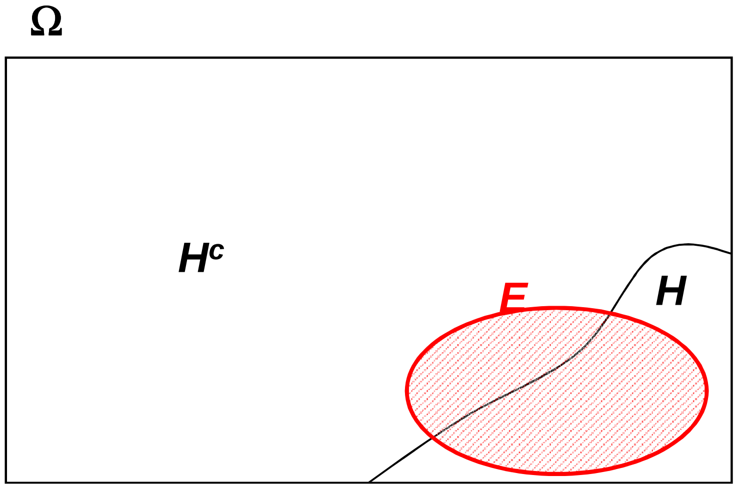
Otra manera de atacar este tipo de problema es la siguiente:

Del enunciado se tiene que:

$P(E \backslash H) = 0{,}80$ $\quad P(E \backslash H^c) = 0{,}05$ $\quad P(H) = 0{,}01$

$P(E^c \backslash H) = 0{,}20$ $\quad P(E^c \backslash H^c) = 0{,}95$ $\quad P(H^c) = 0{,}99$

En la siguiente figura se puede observar que H y H^c conforman una partición del espacio muestral. También se observa que el evento E ocurre simultáneamente con H y H^c. Estas son precisamente las condiciones que se necesitan, según sea el caso, para poder utilizar el *teorema de probabilidad total* o *el teorema de Bayes*.



Teorema de Bayes

Se necesita encontrar *P*(*H*\ *E*), y como se cumplen las condiciones que se ilustran en la figura anterior se usa el *teorema de Bayes:*

$$P(H \setminus E) = \frac{P(H) * P(E \setminus H)}{P(H) * P(E \setminus H) + P\left(H^c\right) * P\left(E \setminus H^c\right)}$$

$$P(H \setminus E) = \frac{0,01 * (0,80)}{0,01 * (0,80) + 0,99 * (0,05)}$$

$$\therefore P(H \setminus E) = 0,1391$$

Eventos Independientes

La noción de probabilidad condicional fue motivada por el hecho de que el conocimiento que un evento *B* ha ocurrido permite *reevaluar* la probabilidad de otro evento *A*.

Es decir, la probabilidad condicional $P\left(B \setminus A\right)$ es la probabilidad de *B* reevaluada a la luz de la información adicional de que se conoce que *A* ha ocurrido.

Por supuesto, puede pasar que la ocurrencia de un evento no tiene influencia sobre la ocurrencia de otro.

En otras palabras, puede pasar que la información adicional deje la estimación de la probabilidad inalterada, es decir, $P\left(B \setminus A\right) = P(B)$.

Por ejemplo, dado el sexo del primer niño parece razonable asumir que esto no tiene influencia en el sexo del segundo niño.

Este es el concepto de lo que se llama *Eventos Independientes*.

Eventos Independientes

Eventos independientes:

Los eventos A y B se definen como *independientes* si y sólo si cualquiera de las siguientes condiciones son satisfechas:

1. $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$
2. $P(A \backslash B) = P(A)$ si $P(B)>0$
3. $P(B \backslash A) = P(B)$ si $P(A)>0$

Eventos independientes vs. Eventos mutuamente excluyentes

Hay que estar conscientes de la distinción entre *eventos independientes* y *eventos mutuamente excluyentes*.

Estos dos conceptos son confundidos frecuentemente.

Dos **eventos son mutuamente excluyentes** cuando ellos no son compatibles, es decir, ellos no pueden ocurrir juntos.

"mutuamente excluyentes" es una propiedad de conjuntos.

En este caso $A \cap B = \varnothing$, así que $P(A \cap B) = 0$.

Dos **eventos son independientes** cuando la ocurrencia de un evento no influye en la ocurrencia de otro.

Así no se puede hacer alguna inferencia en cuanto a la ocurrencia de un evento sobre la base del conocimiento de la ocurrencia de otro.

"Independencia" es una propiedad de la medida de probabilidad.

En este caso $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$

Eventos independientes vs. Eventos mutuamente excluyentes

La propiedad de independencia de dos eventos A y B y la propiedad que A y B son mutuamente excluyentes, aunque distintas están relacionadas:

a. Dos eventos A y B mutuamente excluyentes ($A \cap B = \emptyset$) son independientes si y sólo si $P(A) * P(B) = 0$, lo cual es verdadero si y sólo si $P(A)=0$ ó $P(B)=0$.

b. Si A y B son dos eventos con $P(A)>0$ y $P(B)>0$, entonces , puede ser visto inmediatamente:

   1. Si A y B son independientes, ellos no pueden ser mutuamente excluyentes;

   2. Si A y B son mutuamente excluyentes, ellos no pueden ser independientes.

Eventos Independientes

<u>Ejemplo</u>:

Supóngase que se lanza un dado equilibrado. Sea *A* el evento "obtener un número par" y sea *B* el evento "obtener uno de los números 1, 2, 3 ó 4". ¿Los eventos *A* y *B* son independientes?

Solución:

Se puede determinar que $P(A)=1/2$ y $P(B)=2/3$.

Además, puesto que $A \cap B = \{2,4\}$

se tiene que $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$

Nótese que entonces $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Así, los eventos *A* y *B* son independientes.