Guía de Ejercicios No. 2 – Conjuntos, Estructuras Algebraicas y Funciones

1. Sea Ω el conjunto de todos los posibles tiempos de duración de un bombillo encendido, elegido al azar.
   a. Escriba por comprensión al conjunto Ω.
   b. Sean los siguientes conjuntos:
      $A_1 = \{\emptyset\}$ (bombillo completamente defectuoso)
      $A_2 = \{x/\ 0 < x < 900\ horas\}$ (duración por debajo de lo normal)
      $A_3 = \{x/\ 900 \leq x \leq 1100\ horas\}$ (duración normal)
      $A_4 = \{x/\ x > 1100\ horas\}$ (duración por encima de lo normal)
      Encuentre:
      i) $A_1 \cap A_2$ ii) $A_2 \cap A_3$ iii) $A_3 \cap A_4$ iv) $A_1 \cap A_3$ v) $A_1 \cap A_4$ v) $A_2 \cap A_4$ vi) $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$
   c. ¿Los conjuntos A_i, $i = 1,2,3,4$; forman una partición de Ω? Justifique.

2. Use diagramas de Venn, para demostrar que dados dos conjuntos A y B, entonces:
   a. $A = AB \cup AB^c$ siendo AB disjunto con AB^c
   b. $B = AB \cup A^cB$ siendo AB disjuntos con A^cB
   c. $A \cup B = A \cup A^cB$ siendo A y A^cB disjuntos
   d. $A \cup B = B \cup B^cA$ siendo B y B^cA disjuntos
   e. $A \cup B = AB \cup A^cB \cup AB^c$ siendo AB, A^cB y AB^c disjuntos dos a dos.

3. Use un diagrama de Venn, para demostrar que, dados tres conjuntos A_1, A_2 y A_3, entonces:
$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A_1 \cup (A_2 - A_1) \cup (A_3 - A_2)$$

4. Considere las siguientes sucesiones de conjuntos de $\mathbb{R}$. En cada caso describa los tres primeros conjuntos A_1, A_2 y A_3 y calcule $\lim_{n\to\infty} A_n$. Represente las sucesiones gráficamente en la recta real.
   a. $A_n = \{x\ /\ 1 + \frac{1}{n} \leq x \leq 4 - \frac{1}{n}\}$
   b. $A_n = \{x\ /\ 1 - \frac{1}{n} \leq x \leq 4 + \frac{1}{n}\}$
   c. $A_n = \{x\ /\ x > 2 - \frac{1}{n}\}$
   d. $A_n = \{x\ /\ x \geq 2 + \frac{1}{n}\}$
   e. $A_n = \{x\ /\ 4 - \frac{1}{n} < x < 4 + \frac{1}{n}\}$

5. Examine la convergencia para las siguientes sucesiones de conjuntos. Si existe la convergencia, encuentre el límite correspondiente.
   a. $A_{2n} = \left(0, \frac{1}{2n}\right)$
   b. $A_{2n+1} = \left[-1, \frac{1}{2n+1}\right]$
   c. $A_n = \begin{cases} \left(2 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{2}{n}\right) & \text{si } n \text{ es impar} \\ \emptyset & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$

6. Sean $\Omega = \{x/\ x \in R;\ x \geq 0\}$ y $A_n = \left\{x \in \Omega/\ 0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{n}\right\}$. Encuentre:
   a. $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$
   b. $\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c$
   c. $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c$
   d. $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c$
   e. $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$
   f. $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c$

7. Si $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$, dé tres sigmas álgebras distintos de Ω.
8. Si $\mathcal{A}$ es una sigma álgebra, demuestre que para algún $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{A}$ entonces: $(A - B) \cup (B - A) \in \mathcal{A}$
9. Si $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$ construya las sigmas álgebras generadas por:
   a. $\mathbb{C}_1 = \{\emptyset\}$ b. $\mathbb{C}_2 = \{\{\emptyset\}, \{a\}\}$ c. $\mathbb{C}_3 = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}$
10. Supóngase que A y B son subconjuntos de Ω (ninguno de los cuales es igual a Ω ó $\emptyset$). Encuentre la sigma álgebra generada por la clase $\{A, B\}$.
11. Sea $\Omega = \mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ la clase integrada por los intervalos de la forma (x, ∞) donde $x \in R$. Pruebe que $\mathbb{C}$ no es un álgebra.
12. Sean $\Omega = \mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ la clase integrada por todos los intervalos abiertos de la forma (a, b). Pruebe que $\mathbb{C}$ no es un álgebra.
13. $\{A_n\}$ una sucesión de conjuntos monótona creciente, que converge a un límite A; pruebe que $\{A_n^c\}$ converge a A^c.
14. Pruebe el siguiente teorema:
   Si $f: \mathcal{A} \to$ R es una función de conjuntos con aditividad finita definida sobre una sigma álgebra $\mathcal{A}$ de conjuntos, entonces para todo par de conjuntos A y B de $\mathcal{A}$ se tiene:
   a. $f(A \cup B) = f(A) + f(B - A)$
   b. $f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B)$
15. Pruebe el siguiente teorema:
   Sea $f: \mathcal{A} \to$ R una medida con aditividad finita definida sobre una sigma álgebra $\mathcal{A}$. Para todos los conjuntos A y B de $\mathcal{A}$ se tiene:
   a. $f(A \cup B) \leq f(A) + f(B)$
   b. $f(B - A) = f(B) - f(A)$ $si\ A \subset B$
   c. $f(A) \leq f(B)$ $si\ A \subset B$ (propiedad de monotonía)
   d. $f(\emptyset) = 0$