Guía de Ejercicios No. 6:

Probabilidad Condicional e Independencia de Eventos

1. Suponga que el espacio muestral Ω está dado por: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$. Si las probabilidades de los eventos simples están definidas por: $P(\omega_1) = 1/10$, $P(\omega_2) = 1/10, P(\omega_3) = 3/20, P(\omega_4) = 3/20$, y $P(\omega_5) = 1/2$, encuentre la probabilidad condicional de:
   a. $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ dado $\{\omega_2, \omega_5\}$
   b. $\{\omega_2, \omega_5\}$ dado $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$
2. Considere el experimento de lanzar dos monedas. Sea $\Omega = \{(c, c), (c, s), (s, c), (s, s)\}$, y asuma que cada punto es igualmente probable. Encuentre:
   a. La probabilidad de obtener dos caras dado que salió cara en la primera moneda.
   b. La probabilidad de obtener dos caras dado que en al menos una de las monedas salió cara.
3. Dos dados (balanceados) son lanzados. Dado que la suma de los dados es mayor que 7, encuentre la probabilidad de que los dados muestren el mismo número.
4. Un comité de cuatro personas es formado de un grupo consistente de ocho abogados y siete médicos. Dado que al menos hay un abogado en el comité, ¿cuál es la probabilidad de que haya tres abogados?
5. La probabilidad de que el mercado de valores suba un lunes es 0,6; dado que subió el lunes la probabilidad de que suba el martes es 0,3; y, finalmente dado que subió el lunes y el martes la probabilidad de que suba el miércoles es 0,4. Encuentre la probabilidad de que:
   a. El mercado suba en todos los tres días
   b. El mercado suba el lunes y el martes, pero no el miércoles.
6. De los primeros diez enteros, $1, 2, \dots, 10$, un número es seleccionado aleatoriamente. Si este número es i, entonces otro número es seleccionado aleatoriamente de $1, 2 \ \dots, i$; si este número es j, un tercer número es seleccionado de $1, 2, \dots, j$. ¿Cuál es la probabilidad de que los tres números son números primos distintos (nota: 1 no es considerado primo)?
7. Tres bolas son seleccionadas aleatoriamente una por una y sin reemplazo de una caja que contiene cuatro bolas blancas y ocho negras. Sea,
   A: La primera bola es blanca
   B: La segunda bola es blanca
   C: La tercera bola es blanca
   Encuentre: a. $P(A)$ b. $P(B/A)$ c. $P(C/AB)$
8. Tres bolas son seleccionadas aleatoriamente una por una de una caja que contiene cuatro bolas blancas y ocho bolas negras. Encuentre las siguientes probabilidades:
   a. La primera y tercera bola son blancas
   b. La tercera bola es blanca dado que la primera bola es blanca
9. Suponga que A y B son dos eventos con $P(AB^c) = 0,4$ y $P(B) = 0,2$.
   Encuentre:
   a. $P(A/B^c)$ b. $P(A^c/B^c)$ c. $P(A^cB^c)$ d. $P(A \cup B)$
10. Un número es seleccionado aleatoriamente de los enteros 1,2,3,…,1000. Si se sabe que el número es divisible por cuatro, cuál es la probabilidad de que:
    a. Es divisible por seis o por ocho
    b. Es divisible por seis pero no por ocho
    c. Es divisible por exactamente uno de los enteros 6 y 8
11. Se extraen sin reemplazo tres cartas de un juego completo de barajas de bridge. Calcule la probabilidad de que ninguna sea trébol.

12. La probabilidad de que un accidente de aviación debido a fallas estructurales se diagnostique correctamente es 0,85 y la probabilidad de que un accidente no debido a estas fallas se diagnostiquen incorrectamente atribuyéndose a fallas estructurales es 0,45. Si el 35% de todos los accidentes de aviación se deben a fallas estructurales. Encuentre la probabilidad de que un accidente de aviación se deba a fallas estructurales, sabiendo que el diagnostico lo atribuye a ellas.
13. La probabilidad de que una construcción se termine a tiempo es de $17/20$, la probabilidad de que no haya huelga es de $3/4$, la probabilidad de que la construcción se termine a tiempo, partiendo del supuesto que no haya huelga es de $14/15$. Halle la probabilidad de que la construcción se termine a tiempo y de que no haya huelga.
14. Una caja contiene *b* bolas blancas y *r* bolas rojas. Se selecciona una bola al azar y se devuelve a la caja junto con *c* bolas del mismo color y *d* del otro color. Se vuelve a seleccionar una bola y se repite el experimento. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas sean rojas?
15. Una compañía que fabrica expulsores de aluminio, empieza recibir quejas de que sus productos no tienen suficiente resistencia. La compañía comprueba que las quejas son justificadas y usted, como experto, es asignado para descubrir la falla. Como usted es una persona muy capaz, puede determinar rápidamente que la dificultad se debe a la aleación de aluminio recibida del proveedor o a un tratamiento de calor indebido en la fábrica. Al experimentar con barras terminadas, encuentra que el 75% tiene una aleación adecuada o tratamiento correcto, o ambas cosas. También encuentra que de las que contienen una aleación adecuada el 90% tiene un tratamiento correcto. Además, el 60% tiene ambas cosas. ¿Qué porcentaje de tratamiento es incorrecto?
16. El gerente de ventas de una fábrica de juguetes está planeando introducir al mercado un nuevo juguete. En el pasado el 40% de los juguetes creado por la compañía han tenido éxito y el 60% no ha sido exitoso. Antes de que se llegue a comercializar realmente el juguete se lleva a cabo una investigación de mercado y se prepara un informe, favorable o desfavorable. En el pasado el 80% de los juguetes exitosos recibieron informes favorables y el 30% de los que no tuvieron éxito también recibieron informes favorables. Al gerente de mercadotecnia le agradaría conocer la probabilidad de que el nuevo juguete tendrá éxito si recibe un informe favorable.
17. La probabilidad que una persona pase un test de destreza en el primer intento es 0,5; que pase en el segundo intento es 0,7 (por supuesto, dado que fallo en el primer intento), y la probabilidad de que pase en el tercer intento es 0,8 (dado que falló en los primeros dos intentos). Si la persona realiza tres intentos, ¿Cuál es la probabilidad de que pasará el test?
18. En un experimento de laboratorio se intenta enseñar a un animal para que se dirija a la derecha de un laberinto en forma de *T*. Para ayudar en la enseñanza, el animal es recompensado si va hacia la derecha y es castigado si va hacia la izquierda. Supóngase que inicialmente es igualmente probable que el animal vaya a la izquierda o la derecha. Si en un ensayo en particular el animal es recompensado, la probabilidad de que vaya a la derecha en el siguiente ensayo, es $p_1 > 1/2$, y si en el ensayo dado el animal fue castigado, la probabilidad de que vaya a la derecha en el siguiente ensayo es $p_2 > p_1$
    a. ¿Cuál es la probabilidad de que al animal vaya a la derecha en el tercer ensayo?
    b. ¿Cuál es la probabilidad de que el animal vaya a la derecha en el tercer ensayo dado que el animal fue por la derecha en el primer ensayo?
19. Una empresa de servicios de plomería, a través de su departamento de estadística, realiza una encuesta a sus clientes en una ciudad en particular. Se encontró que 10% de los clientes quedaron inconformes con los trabajos de plomería efectuados en sus casas. La mitad de las quejas se referían al plomero *A*. Si el plomero *A* realiza el 40% de los trabajos de plomería en la cuidad, halle las siguientes probabilidades:
    a. Que el cliente reciba un trabajo de plomería que no sea satisfactorio, dado que se trata del plomero *A*.
    b. Que el cliente reciba un servicio de plomería satisfactorio, dado que se trata del plomero *A*.
20. Las probabilidades de que cierto dispositivo electrónico provenga de las fábricas *A*, *B* o *C* son respectivamente 0,25; 0,5 y 0,25. Las probabilidades de que el dispositivo funcione bien durante un lapso de tiempo *T* son de 0,1; 0,2 y 0,4 para cada fábrica, respectivamente. Calcular la probabilidad de que:
    a. Un dispositivo elegido dure un lapso de tiempo *T*.
    b. Un dispositivo provenga de la fábrica *A*, si dura un lapso de tiempo *T*.

21. Supóngase que se lanza un dado equilibrado. Sea A el evento "obtener un número par" y sea B el evento "obtener uno de los números 1, 2, 3 ó 4". ¿Los eventos A y B son independientes?
22. Supóngase que se tienen cuatro tickets con las marcas a, b, c, abc. Estos son colocados en una caja. Se selecciona un ticket al azar, y se asume que es igualmente probable seleccionar cualquiera de ellos. Sean los siguientes eventos: $A = \{a, abc\}$, $B = \{b, abc\}$, $C = \{c, abc\}$. ¿Son los eventos A, B y C mutuamente independientes?
23. Es conocido, según registros médicos, que la probabilidad de seleccionar aleatoriamente una persona con cáncer es 0,2, y la probabilidad que tenga alguna enfermedad cardiaca es 0,1. Asumiendo que los dos eventos son independientes, cual es la probabilidad de que una persona:
    a. Tenga al menos una de esas dos enfermedades.
    b. Tenga una enfermedad.
24. Se sabe que un paciente responde a un tratamiento de una cierta enfermedad con probabilidad igual a 0,9. Si tres pacientes son tratados con el mismo tratamiento de manera independiente, encuentre la probabilidad de que al menos uno de ellos responda al tratamiento.
25. Una caja contiene 20 bolas negras y 30 verdes. Se escoge una bola al azar, se anota su color y se devuelve a la caja, luego se repite el experimento.
    a. Encuentre la probabilidad de que la primera bola verde sea escogida en la cuarta extracción.
    b. Encuentre la probabilidad de que la tercera y cuarta bola verde sean escogidas en la sexta y novena extracción, respectivamente.
26. Suponga que el siguiente espacio muestral $\Omega = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,1)\}$ es equiprobable. Sean los eventos: A: La primera coordenada es 1; B: La segunda coordenada es 1; C: La tercera coordenada es 1.
    a. Demuestre que los eventos son independientes dos a dos.
    b. ¿Los eventos A, B y C son independientes?
27. Suponga que dos dados son lanzados. Sean los siguientes eventos:
    a. A: El primer dado muestra un número par.
    b. B: La suma de los dos dados es 4.
    c. C: Los resultados de los dos dados difieren a lo más por 2. Es decir, $C = \{(x, y): |x - y| \leq 2\}$

    Verifique que $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$, pero que esos eventos no son independientes dos a dos.

Dirección: Av. Las Américas. Universidad de los Andes Conjunto La Liria. Edif. F. Piso 2. Departamento de Estadística. Cubículo 258. Mérida – Venezuela.
Telf. (0274) 2401153 (directo) – 2401122 (secretaria). e-mail: gudberto@ula.ve