Universidad de los Andes
Facultad de Ciencias Económicas y Sociales
Escuela de Estadística

Interpretaciones de Probabilidad

Prof. Gudberto José León Rangel

MÉRIDA- VENEZUELA, 2015

Preámbulo [1]

En la vida cotidiana la gente está acostumbrada hacer comentarios que por naturaleza son probabilísticos y que transmiten la idea de chance. Por ejemplo, se puede hablar acerca de la probabilidad de que un bus llegue a tiempo, o que nazca un varón, o que un jugador de un *home run*, etc.

Un ejemplo muy llamativo es el de la persona que predice el tiempo (meteorólogo) quien diligentemente reporta “la probabilidad de precipitación”. La predicción del meteorólogo es probablemente recibida con escepticismo. El razonamiento es quizás como sigue: “Bien, la última vez que él predijo lluvia con *una probabilidad del 90%* no llovió”, así que a él no se le puede creer. ¿Está justificada esta crítica al meteorólogo? ¿O será que se está interpretando mal la información que fue proporcionada? Parecería razonable asumir que el meteorólogo sirve para algún propósito, de otra manera no tendría el trabajo por mucho tiempo.

A favor del meteorólogo, considérese la siguiente situación: Supóngase una caja que contiene 15 bolas las cuales son parecidas en todo, excepto que 14 son amarillas y una es negra. Si una persona vendada selecciona una bola de la caja, ¿es posible decir con certeza si la bola será negra o amarilla?; ¡Definitivamente no! Sin embargo, si alguien es llamado para predecir el color ¿Quién no predeciría amarilla? El reporte del meteorólogo, cuando él predice lluvia con alta probabilidad, debería ser interpretado con el mismo espíritu: Nadie puede estar seguro que lloverá, pero se debería estar preparado para eso.

Actualmente, la teoría de probabilidad encuentra aplicaciones en diversas disciplinas tales como biología, economía, investigación de operaciones y astronomía, para mencionar sólo unas pocas. Un biólogo podría estar interesado en la distribución de bacterias en un cultivo, un economista en las predicciones económicas, un astrónomo en la distribución de estrellas en diferentes galaxias, etc.

[1] Tomado de Khazanie, Ramakant. *Basic Probability Theory and Applications*. Págs. 1-2

¿Cuál es la característica común en todos los fenómenos anteriores? Es que todos ellos carecen de la naturaleza determinística. La información del pasado, así sea voluminosa no permite formular una regla para determinar precisamente que pasará cuando el experimento se repita. Fenómenos como los anteriores, donde el resultado de un experimento es de naturaleza fortuita, son llamados *fenómenos aleatorios*. La teoría de la probabilidad se encarga de su estudio.

La respuesta a la pregunta ¿por qué en estadística se estudia tanto las probabilidades? es expresada por Casella[2]: La teoría de la probabilidad es la fundación sobre la cual toda la estadística está construida, suministrando el método para modelar poblaciones, experimentos, o casi cualquier cosa que podría ser considerada como un *fenómeno aleatorio*. A través de estos modelos, los estadísticos pueden hacer inferencias acerca de poblaciones, inferencias basadas en la examinación de sólo una parte de la totalidad.

[2] Casella, George y Berger, Roger. *Statistical Inference*. Pág. 1.

Interpretaciones de la Probabilidad [3]

A pesar de que el concepto de probabilidad es una parte tan común y natural de la experiencia de la gente, no existe una única interpretación científica del término probabilidad aceptada por todos los estadísticos, filósofos y demás autoridades científicas. A través de los años, cada interpretación de la probabilidad propuesta por unos expertos ha sido criticada por otros. De hecho, el verdadero significado de la probabilidad es todavía un término muy conflictivo y surge en muchas discusiones filosóficas actuales sobre los fundamentos de la estadística.

Se expondrán tres interpretaciones (o definiciones) diferentes de la probabilidad, cada una de estas interpretaciones puede ser útil en la aplicación de la teoría de la probabilidad a problemas prácticos.

Interpretación Clásica de la Probabilidad (o Probabilidad a priori)

La teoría de la probabilidad en sus comienzos estuvo asociada a los juegos de azar. Esta asociación impulsa la ***interpretación clásica***. Por ejemplo, supóngase que se quiere conocer la probabilidad de que al lanzar una moneda salga cara. Puede argumentarse de la siguiente manera: Como hay solamente dos formas en que la moneda puede caer, cara o sello, y como la moneda esta balanceada, podría esperarse que sea tan probable que salga cara como sello, así la probabilidad de cara estará dada por el valor 1/2.

Esta interpretación de la probabilidad está basada en el concepto de *resultados igualmente probables* que son *mutuamente excluyentes*. Generalizando, si el resultado de algún proceso debe ser uno de n resultados diferentes y éstos n resultados son igualmente probables y mutuamente excluyentes, entonces la probabilidad de cada resultado es $1/n$.

[3] Basado en los siguientes textos: DeGroot, Morris. *Probabilidad y Estadística.* Págs. 2-6; Mood, Graybill y Boes. *Introduction to the Theory of Statistics.* Págs. 3-5.

Considérese otro ejemplo: Si un dado es lanzado (hay seis posibles resultados) cualquiera de las seis caras numeradas pueden salir. Estos seis resultados son *mutuamente excluyentes* dado que dos o más caras no pueden salir simultáneamente, y si el dado es justo[4], los seis resultados son *igualmente probables*, es decir que por la naturaleza del proceso, por su simetría, todas las caras tienen la misma oportunidad de aparecer.

Ahora se quiere la probabilidad de que el resultado de un lanzamiento sea un número par. Tres de los seis posibles resultados tienen este atributo. La probabilidad de que un número par aparecerá cuando el dado es lanzado es 3/6 ó 1/2. Similarmente, la probabilidad que un cinco aparecerá cuando un dado es lanzado es 1/6. La probabilidad que el resultado de un lanzamiento será mayor que 2 es 2/3.

De este modo, se tiene de manera más general que, si los n resultados de un *fenómeno aleatorio* son *mutuamente excluyentes* e *igualmente probables* y si $n(A)$ de estos resultados presentan el atributo A, entonces la probabilidad de A es la *proporción* $n(A)/n$.

Debe notarse que por la interpretación clásica, la probabilidad de A es un número entre 0 y 1 (ambos inclusive). La proporción $n(A)/n$ debe ser menor que o igual a1, ya que el número total de posibles resultados no puede ser menor que el número de resultados con un atributo específico. Si es seguro que un suceso ocurra, su probabilidad es 1; si es imposible que ocurra, su probabilidad es cero. De esta manera, la probabilidad de obtener un 7 al lanzar un dado es 0. La probabilidad que al lanzar un dado se obtenga un número menor que 8 es igual a 1.

Las probabilidades determinadas por la definición clásica son llamadas *probabilidades a priori*, debido a que se llega al resultado solamente por razonamiento deductivo.

Hay algunas limitaciones en la interpretación clásica:

[4] Es decir, el dado es un cubo perfecto en el sentido de que es simétrico y no está *arreglado* para que alguna de sus caras tenga más chance de ocurrir.

1. No proporciona un método sistemático para asignar probabilidades a resultados que no sean igualmente probables.

   Por ejemplo, es lanzada una moneda sabiendo que esta sesgada a favor de las caras, es decir, es más probable que aparezca una cara que un sello. Los dos posibles resultados del lanzamiento de la moneda no son igualmente probables[5]. ¿Cuál es la probabilidad de cara? La definición clásica no tiene la posibilidad de ayudar aquí.

2. Hay otra dificultad cuando a la interpretación clásica se le hacen preguntas como:
   - ¿Cuál es la probabilidad de que nazca un varón en Mérida?
   - ¿Cuál es la probabilidad de que un hombre muera antes de los 50 años?
   - ¿Cuál es la probabilidad de que una persona se case?

   Todas estas son preguntas legítimas que se quieren traer al campo de la teoría de probabilidad. Sin embargo, las nociones de "simetría", "igualmente probable", etc., no pueden ser utilizadas como lo son en los juegos de azar.

3. Otro inconveniente surge cuando los resultados del proceso no son finitos. Esto aparece muchas veces cuando el número de resultados posibles del proceso es posiblemente muy grande. Por ejemplo, ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen a una intersección vial más de 500 automóviles entre las 12 PM y la 1 PM?

Nota 1:

Hay que tener cuidado y poner atención a las calificaciones de *mutuamente excluyente*, *igualmente probables* y *aleatorio*. Supóngase que se desea calcular la probabilidad de obtener dos caras si una moneda es lanzada dos veces. Pudiera razonarse que hay tres posibles resultados para los dos lanzamientos: dos caras, dos sellos o una cara y un sello. Uno de estos tres resultados tiene el atributo deseado, es decir, dos caras; Además la probabilidad es 1/3. Este razonamiento es incorrecto ya que los tres resultados dados *no son igualmente probables*. El tercer resultado, una cara y un sello, puede ocurrir de dos maneras debido a que la cara puede aparecer en el primer lanzamiento y el sello en el segundo; o la cara puede aparecer en el segundo lanzamiento y el sello en el primero. Así hay cuatro resultados igualmente probables: (cara, cara), (cara, sello), (sello, cara) y (sello, sello)[6]. El primero de

[5] Esto se conoce con la expresión: la moneda no está balanceada, no es simétrica o no es justa

[6] Los resultados entre paréntesis representan: (resultado del primer lanzamiento, resultado del segundo lanzamiento)

estos tiene el atributo deseado, mientras los otros no. La probabilidad correcta es entonces 1/4. El resultado debería ser el mismo si dos monedas balanceadas fueran lanzadas simultáneamente.

Ahora, supóngase que se desea calcular la probabilidad que una carta extraída de una baraja de bridge será un as o una espada. En la enumeración de los resultados favorables, pueden contarse 4 ases y trece espadas y se concluye que hay 17 resultados con el atributo deseado. Esto es claramente incorrecto ya que estos 17 resultados *no son mutuamente excluyentes* debido a que el as de espadas es tanto as como espada. Hay 16 resultados que son favorables a un as o una espada, así la probabilidad correcta es 16/52 o 4/13.

Interpretación Frecuentista de la Probabilidad (Probabilidad a Posteriori)

En muchos problemas, la probabilidad de obtener algún resultado especifico de un proceso puede ser interpretado en el sentido de la ***frecuencia relativa*** con la que se obtendría ese resultado si el proceso se repitiera un número grande de veces en condiciones similares.

Supóngase que una moneda simétrica la cual parece estar bien balanceada fue lanzada 100 veces, los resultados fueron los siguientes:

Tabla 1.

Resultados obtenidos al lanzar una moneda 100 veces.

Resultado	Frecuencia observada	Frecuencia relativa observada	Frecuencia relativa esperada a largo plazo
C	56	0.56	0.50
S	44	0.44	0.50
TOTAL	**100**	**1**	**1**

Obsérvese que la frecuencia relativa de caras está cerca de 1/2. Esto era lo que se esperaba ya que la moneda era simétrica.

Supóngase ahora que un dado fue lanzado 300 veces, con los siguientes resultados:

Tabla 2.

Resultados obtenidos al lanzar un dado 300 veces.

Resultado	Frecuencia observada	Frecuencia relativa observada	Frecuencia relativa esperada a largo plazo
1	51	0.170	0.1667
2	54	0.180	0.1667
3	48	0.160	0.1667
4	51	0.170	0.1667
5	49	0.163	0.1667
6	47	0.157	0.1667
TOTAL	**300**	**1**	**1**

Nótese ahora que la frecuencia relativa de la cara con 1 está cerca de 1/6; de manera similar para 2, 3, 4, 5 y 6. Estos resultados no son inesperados, ya que el dado estaba balanceado; era de esperarse que cada cara ocurriera con aproximadamente la misma frecuencia en el largo plazo.

Esto sugiere que se pueden usar las frecuencias relativas como una aproximación para la probabilidad. En otras palabras, se supone que la proporción de lanzamientos en los que se obtiene una cara en el lanzamiento de una moneda o de los números de un dado se puede usar como una aproximación de la respectiva probabilidad. Adviértase que aunque las frecuencias relativas de los diferentes resultados son predecibles, el resultado actual de un lanzamiento individual es impredecible.

En los ejemplos anteriores puede usarse la interpretación clásica o la frecuentista y se obtienen aproximadamente los mismos resultados. Esto se debe a que la moneda y el dado están bien balanceados y son simétricos. Supóngase ahora que la moneda no está balanceada, así que los dos casos: cara y sello, no son igualmente probables que ocurran. Aquí la definición clásica no es útil en la misión de encontrar el valor de una probabilidad. Entonces, podría utilizarse la interpretación de la frecuencia relativa o posiblemente algún análisis físico de la moneda no balanceada.

En muchas investigaciones científicas, se toman observaciones las cuales tienen un elemento de incertidumbre o son impredecibles. Como un ejemplo, supóngase que se quiere predecir, si al nacer un bebe en cierta localidad será varón o hembra. Esto es individualmente un evento incierto, pero los resultados de grupos de nacimientos pueden ser satisfactorios. Se ha encontrado que existe una cierta regularidad a largo plazo, la cual es similar a la regularidad a largo plazo de la frecuencia relativa de una cara cuando una moneda es lanzada. Si por ejemplo es encontrado, examinando registros, que alrededor de 51% de los nacimientos en esta localidad son masculinos, este número puede ser tomado como una aproximación a la probabilidad de que nazca un varón en esa localidad.

Para hacer esta idea más concreta, se asumirá que una serie de observaciones pueden ser obtenidas bajo condiciones uniformes. Es decir, una observación de un experimento aleatorio es hecha; entonces el experimento se repitió bajo las mismas condiciones y se tomó otra observación. Esto se repite muchas veces, y mientras las condiciones son similares cada vez, hay una variación incontrolable la cual es aleatoria, así que las observaciones son individualmente impredecibles. En muchos de estos casos las observaciones caen dentro de ciertas clases en donde las frecuencias relativas son muy estables. Esto sugiere que se postule un número “p”, llamado la probabilidad del evento, y “p” será aproximado por la frecuencia relativa con la cual las observaciones repetidas satisfacen el evento en particular.

En la Figura 1 se muestran los resultados de efectuar en cinco oportunidades, el experimento de lanzar 150 veces una moneda balanceada y graficar el comportamiento de la respectiva frecuencia relativa de cara. Como era de esperarse, en los cinco casos, al principio existe cierta fluctuación en las respectivas frecuencias relativas. A medida que aumenta el número de lanzamientos, esta frecuencia relativa se va estabilizando mostrando una tendencia clara hacia la frecuencia relativa 0,5. Nótese que algunas de las curvas tienden más rápido a 0,5 que otras. Por tanto, según la interpretación frecuentista de la probabilidad, p=0,5; que es el mismo valor de la probabilidad de cara que se obtiene bajo la interpretación clásica. Esta es una ilustración de cómo se comporta la frecuencia relativa en el largo plazo[7].

[7] Este comportamiento de la frecuencia relativa de un resultado en el largo plazo se debe a la *Ley de los grandes números*, la cual se estudia en Teoría Estadística II.

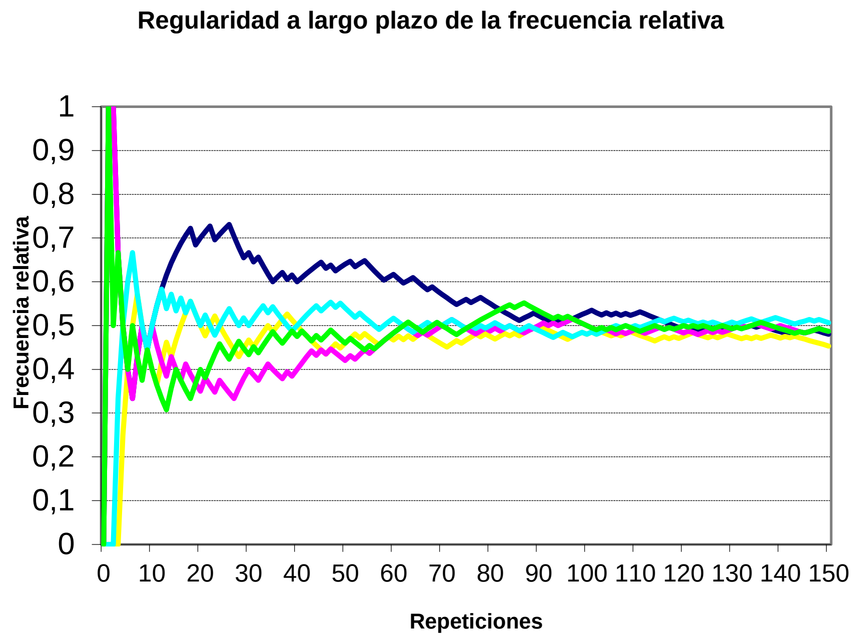

Figura 1.

Comportamiento de la frecuencia relativa de *cara* al lanzar 150 veces una moneda balanceada, en cinco ocasiones.

De este modo para calcular la probabilidad p de que un suceso A ocurra, se realiza el experimento sucesivamente bajo *condiciones similares* y se va contando el número de veces que ocurre A. Sea $n(A)$ el número de veces que ocurre el suceso A en las primeras n repeticiones. Entonces la ***frecuencia relativa*** de ocurrencia de A en las primeras n repeticiones del experimento viene dada por:

$$\frac{n(A)}{n}$$

La probabilidad de A es el límite de este cociente, cuando n tiende a infinito, si este límite existe:

$$p = \lim_{n\to\infty} \frac{n(A)}{n}$$

Para usos prácticos esto significa que $p \approx \frac{n(A)}{n}$, para n *grande*.

Está claro que las condiciones mencionadas son muy vagas para servir como base de una definición científica de probabilidad. Por tanto, este criterio de la probabilidad a posteriori recibe varias críticas, entre las cuales se pueden mencionar las siguientes:

1. Se menciona un *número grande* de repeticiones de un proceso, pero no hay una identificación clara del número específico que podría considerarse suficientemente grande.
2. Se afirma que la moneda debería ser lanzada cada vez *en condiciones similares*, pero estas condiciones no se describen con precisión. Las condiciones en la cual se lanza la moneda no pueden ser completamente idénticas para cada lanzamiento porque entonces los resultados serían todos iguales y se obtendrían sólo caras o sólo sellos. De hecho, una persona experimentada puede lanzar una moneda repetidamente y cogerla de tal manera que obtenga una cara en casi todos los lanzamientos. En consecuencia, los lanzamientos no deben ser completamente controlados sino que deben tener una característica *aleatoria*.
3. Se asevera, además, que la frecuencia relativa de caras sería "aproximadamente 1/2", pero no se especifica un límite para la variación posible respecto al valor 1/2. Si una moneda fuese lanzada 1.000.000 de veces, no se esperaría obtener exactamente 500.000 caras. En realidad, sería muy sorprendente si se obtuvieran exactamente 500.000 caras. Por otro lado, tampoco se espera que el número de caras difiriera mucho de 500.000.
4. Otro inconveniente de la interpretación frecuentista de la probabilidad es que sólo puede utilizarse para un problema en el que pueda haber, al menos en principio, un número grande de repeticiones similares de cierto proceso. Muchos problemas importantes no son de este tipo. Por ejemplo, la interpretación frecuentista de la probabilidad no puede ser aplicada directamente a la probabilidad de que un determinado conocido contraiga matrimonio en los próximos dos años.

Interpretación Subjetiva de la Probabilidad

De acuerdo con la ***interpretación subjetiva*** o personal de la probabilidad, la probabilidad que una persona asigna a uno de los posibles resultados de un proceso representa su propio juicio sobre la probabilidad de que se obtenga el resultado. Este juicio estará basado en las opiniones e información de la persona acerca del proceso. Otra persona que puede tener diferentes opiniones o información distinta puede asignar una probabilidad diferente al mismo resultado. Por esta razón, resulta más apropiado hablar de la probabilidad subjetiva que asigna cierta persona a un resultado, que de la verdadera probabilidad de ese resultado.

Con el objeto de que una persona sea capaz de asignar probabilidades subjetivas a los resultados, debe expresar su grado de creencia en términos numéricos. La interpretación subjetiva de la probabilidad puede ser formalizada, en general, si los juicios de una persona acerca de las probabilidades de diversas combinaciones de resultados satisfacen ciertas condiciones de consistencia. Entonces puede demostrarse que sus probabilidades subjetivas para los diferentes sucesos posibles pueden ser determinadas en forma única.

La interpretación subjetiva tiene, sin embargo, dos dificultades:

1. El requisito de que los juicios de una persona sobre las probabilidades de un número infinito de sucesos sean completamente consistentes y libres de contradicciones no parece humanamente posible.
2. La interpretación subjetiva no proporciona bases "*objetivas*" para que dos o más científicos que trabajan juntos obtengan una evaluación conjunta de su estado de conocimiento en un área científica de interés común.

La evaluación por un determinado científico de la probabilidad de algún resultado incierto debe ser, en última instancia, su propia evaluación, basada en todas las evidencias de que dispone. Esta evaluación puede estar parcialmente basada en la interpretación frecuentista de la probabilidad, ya que el científico puede tener en cuenta la frecuencia relativa de la ocurrencia de este resultado o de resultados similares en el pasado. También puede basarse parcialmente en la interpretación clásica de la probabilidad, puesto que el científico puede tener en cuenta el número total de resultados posibles que considera igualmente probables. Sin embargo, la asignación final de probabilidades numéricas es responsabilidad del propio científico.

La Teoría de la Probabilidad y las Interpretaciones de Probabilidad

La teoría de la probabilidad y la estadística se pueden desarrollar, sin considerar la controversia en torno a las diferentes interpretaciones del término probabilidad. Esta teoría es correcta y puede ser aplicada útilmente, con independencia de la interpretación de probabilidad que se utilice en un problema particular. Una vez asignadas las probabilidades a algunos resultados de algún proceso, todos los expertos están completamente de acuerdo en que la teoría matemática de la probabilidad proporciona la metodología apropiada para ampliar el estudio de estas probabilidades.

Casi todo el trabajo en teoría matemática de la probabilidad, ha estado relacionado con los dos problemas siguientes:

1. Métodos para determinar las probabilidades de ciertos sucesos a partir de las probabilidades especificadas para cada uno de los posibles resultados de un experimento.
2. Métodos para revisar las probabilidades de los sucesos cuando se obtiene información adicional relevante.

Estos métodos se basan en unas técnicas matemáticas comunes. El propósito de las materias Teoría Estadística I y Teoría Estadística II es presentar estas técnicas que, en conjunto, forman la teoría matemática de la probabilidad.

Dirección: Av. Las Américas. Universidad de los Andes Conjunto La Liria. Edif. F. Piso 2. Departamento de Estadística. Cubículo 258. Mérida – Venezuela.
Telf. (0274) 2401153 (directo) – 2401122 (secretaria). e-mail: gudberto@ula.ve

Referencias

Casella, G. y Berger, R. (1990). *Statistical Inference*. California: Duxbury Press.

DeGroot, M. (1988). *Probabilidad y Estadística.* Segunda Edición. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Khazanie, R. (1976). *Basic Probability Theory and Applications*. California: Goodyear Publishing Company, Inc.

Mood, A., Graybill F. y Boes, D. (1974). *Introduction to the Theory of Statistics*. Tercera edición. Nueva York: McGraw-Hill Book Co.