Guía de Ejercicios No. 1

Tema 1 (Vectores Aleatorios)

1. Suponga que X y Y tienen una distribución conjunta, dada por la siguiente función de probabilidad:

x \ y	0	1	3	5
-1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	0
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$
4	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

   a. Grafique la función de probabilidad
   b. Encuentre la función de Distribución Conjunta de X y Y
   c. Encuentre :
      i. $P(X \leq Y)$
      ii. $P(X + Y^2 \leq 8)$

2. La función de probabilidad conjunta de X y Y está dada por:
   $P\ (X = x,\ Y = y) = k\ (x^2 + y^2),\quad x = -1, 0, 1, 3;\quad y = -1, 2, 3$
   a. Encuentre la contante k b. Encuentre $P\ (X \div Y \leq 0)$

3. La distribución conjunta de X y Y se dice que es uniforme sobre el cuadrado unitario $\{(x, y){:}\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$ si la función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1;\ 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   a. Grafique la función de densidad de probabilidad
   b. Encuentre $P(X + Y \leq 1)$
   c. $P\left(\frac{1}{3} \leq X + Y \leq \frac{3}{2}\right)$
   d. Encuentre $P\ (X \geq 2Y)$

4. Suponga una función de densidad de probabilidad conjunta dada por: $f(x, y) = \begin{cases} kx^2y, & 0 < y < x < 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$, donde k es una constante. Encuentre k.

5. La función de Distribución Conjunta de X y Y está dada como sigue:

$$F\ (x\ , y) = \begin{cases} 1 - e^{-x} - e^{-y} + e^{-x-y}, & x \geq 0 \text{ e } y \geq 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}.$$ Encuentre:

   a. $P\ (-2 < X \leq 3,\ 1 < Y \leq 2)$
   b. La función de densidad de probabilidad de X y Y
   c. $P\ (X + Y \geq 3)$
   d. $P\ (X \geq Y)$

6. Suponga que la función de distribución conjunta de X y Y está dada por:
   $F\ (x, y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ o } y < 0 \\ \frac{kxy}{(1+2x)\ (1+3y)}, & x \geq 0 \text{ e } y \geq 0 \end{cases}$, donde k es una constante.
   a. Determine la contaste k b. Encuentre las distribuciones marginales X y Y

7. Si X y Y tienen la función de probabilidad conjunta dada por:

$$P(X = x\ , Y = y) = \frac{1}{42}\ (x + y^2),\qquad x = 1, 4;\ \ y = -1, 0, 1, 3$$

   a. Encuentre las distribuciones marginales de X y Y
   b. Encuentre la distribución condicional de X dada $Y = y$, y de Y dada $X = x$.

Dirección: Av. Las Américas. Universidad de los Andes Conjunto La Liria. Edif. F. Piso 2. Departamento de Estadística. Cubículo 258. Mérida – Venezuela.
Telf. (0274) 2401153 (directo) – 2401122 / 1071 (secretaria). e-mail: gudberto@ula.ve

8. Suponga que X y Y tienen función de densidad de probabilidad conjunta dada por:

$$f(x,y)=\begin{cases}5x^2y, & 0\le x\le 1, \quad 0\le y\le 1, \quad x\ge y\\ 6x^2, & 0\le x\le 1, \quad 0\le y\le 1, \quad x<y\\ 0, & \text{en otro caso}\end{cases}$$

Encuentre la función de densidad de probabilidad de X y de Y.

9. Si la función de densidad de probabilidad conjunta de X y Y está dada por:

$$P\ (X=i\ ,Y=j)=\frac{1}{2^{i-1}\ \ 3^{j}}\,, \qquad i=1,2,\ldots;\ \ j=1,2,\ldots$$

a. Encuentre la distribución condicional de X dada $Y=j$
b. Demuestre que X y Y son independientes

10. Suponga que X y Y tienen función de densidad de probabilidad conjunta dada por:

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & 0<y<x<1\\ 0, & \text{en otro caso}\end{cases}$$

Encuentre:
a. La distribución condicional de X dada $Y=y_0$, donde $0<y_0<1$
b. La distribución condicional de Y dada $X=x_0$, donde $0<x_0<1$
c. $P\left(\frac{1}{3}<Y\le\frac{1}{2}\ /\ X=\frac{2}{3}\right)$
d. Demuestre que variables aleatorias X y Y no son independientes

11. Si la función de densidad de probabilidad conjunta de X y Y está dada por:

$$f(x,y)=\begin{Bmatrix}e^{-y}, & 0<x<y<\infty\\ 0, & \text{en otro caso}\end{Bmatrix}$$

Encuentre:
a. La función de probabilidad condicional de Y dada $X=x_0$
b. La Función de distribución Condicional de Y dada $X=x_0$
c. $P\ (3<Y\le 4\ /\ X=2)$

12. Suponga que la función de distribución conjunta de X y Y está dada por :

$$F(x,y)\begin{cases}0, & x<0\ \ o\ \ y<0\\ xy(x+y-xy^2), & 0\le x<1\ \text{ e }\ 0\le y<1\\ y(1+y-y^2), & x\ge 1\ \text{ e }\ 0\le y<1\\ x, & 0<x<1\ \text{ e }\ y\ \ge 1\\ 1, & x\ge 1\ \text{ e }\ y\ge 1\end{cases}$$

Encuentre:
a. La función de probabilidad condicional de Y dada $X\ =X_0$
b. La función de probabilidad condicional de X dada $Y=y_0$
c. $P\left(X>\frac{1}{2}\ \ /\ Y=\frac{1}{3}\ \right)$

13. Suponga que las variables aleatorias X y Y tienen la siguiente función de distribución conjunta:

$$F\ (x,y)=\begin{cases}0, & x<0\ \text{ o }\ y<0\\ 1-2e^{-y}+e^{-2y}, & x>y\ \text{ e }\ y\ge 0\\ 1-e^{-2x}+2e^{-(x+y)}-2e^{-y}, & x\ge 0\ \text{ e }\ y\ge x\end{cases}$$

Demuestre que X y Y no son independientes.

14. Si X y Y son dos variables aleatorias independientes con funciones de probabilidad

$$fx^{(x)}\ =\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}, & x\ge 1\\ 0, & \text{en otro caso}\end{cases} \qquad \text{y} \qquad fy^{(y)}\ =\ \begin{cases}e^{-y}, & y>0\\ 0, & \text{en otro caso}\end{cases}$$

Encuentre la función de probabilidad conjunta de X y Y.

15. Si la función de densidad conjunta de dos variables aleatorias de X y Y está dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{3}\,(x+2y) & \text{para} \quad 0 < x < 1\,,\ 0 < y < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Determine la media condicional y la varianza condicional de X dada $Y = \frac{1}{2}$.

16. X y Y tienen la siguiente función de densidad conjunta de probabilidad

$$P(X = x,\ Y = y) = \begin{cases} \frac{1}{42}, & (x + y^2), \quad x = 1, 4; \ \ y = -1, 0, 1, 3 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Encuentre: a. $E\left(\frac{Y^2}{X}\right)$ b. $E(XY)$ c. $Var(X/Y = 0)$

17. Se lanza 3 veces una moneda. Sea X la variable aleatoria que representa el número de caras en los primeros dos lanzamientos e Y el número de caras en los últimos dos lanzamientos.
Encuentre: a. $E\,(XY)$ b. $E\,(X+Y)$

18. La función de densidad de probabilidad conjunta de X y Y está dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2x(x-y), & 0 < x < 1; \ -x < y < x \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Encuentre: $E\,(X^n Y^k)$, la varianza de X y la varianza de Y. **<u>Nota</u>:** n y k son enteros no negativos.

19. Suponga que X y Y tienen una distribución conjunta con función de probabilidad :

$$f\,(x\,,y\,) = \begin{cases} 10x^2y\,, & 0 \le y \le x \le 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Encuentre: a. $Var(X)$ y $Var(Y)$ b. $Cov(X,Y)$ c. $\rho_{X,Y}$

20. Un experimento consiste de n ensayos idénticos e independientes, donde cada ensayo puede resultar en un éxito, un fracaso o un empate, con probabilidades iguales a p, q y $1-p-q$, respectivamente. Sea X: Número de éxitos en n ensayos e Y: Número de fracasos en n ensayos. Encuentre la distribución conjunta de X y Y. [Tomado de Khazanie, R., (1976), p. 279]

21. Suponga que un profesor tiene el hábito de asignar una *A*, *B* o *F* a un estudiante como su nota final con respectivas probabilidades 0,2; 0,5 y 0,3. Si el profesor tiene veinte estudiantes en una clase, cuál es la probabilidad de que él otorgue cinco *A* y seis *B* (y, en consecuencia, nueve *F*). [Tomado de Khazanie, R., (1976), p. 280]

22. Suponga que X y Y tienen la distribución trinomial con n ensayos y parámetros p, q. Encuentre:
   a. Las distribuciones marginales de X y Y
   b. La distribución condicional de X dada $Y = j,\ 0 \le j \le n$
   c. $Cov(X,Y)$
   d. $\rho(X,Y)$

23. Sea (X,Y) un vector aleatorio normal bivariante, demuestre que:
   a. X e Y son independientes cuando $\rho = 0$.
   b. ρ, en la función de densidad de probabilidad es efectivamente el coeficiente de correlación de X e Y. Sugerencia: Use $\rho = E\left[\left(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)\right]$.

24. Sea (X,Y) un vector aleatorio normal bivariante, determine $E(Y \backslash X)$

25. La función de densidad de probabilidad de un vector aleatorio normal bivariante (X,Y), está dada por:

$f_{X,Y}^{(x,y)} = \frac{1}{2\sqrt{3}\pi} exp\left[-\frac{1}{3}(x^2 - xy + y^2 + x - 2y + 1)\right], \quad -\infty < x, y < \infty$. Encuentre:
   a. Las medias de X e Y
   b. Las varianzas de X e Y
   c. El coeficiente de correlación de X e Y