Guía de Ejercicios No. 3

Tema 2: Distribuciones de funciones de variables aleatorias

1. Suponga que X y Y son variables aleatorias independientes con las siguientes funciones de probabilidad:
   $P\,(X = x) = \frac{x}{6};\ \ x = 1,2,3$ y $P\,(Y = y) = \frac{y+2}{10};\ \ y = 1,2,3.$
   Usando la técnica de la función generatriz de momentos, encuentre las distribuciones de:
   a. $X + Y$ b. $X - Y$
2. Sean $X_1, X_2, \dots, X_n$ variables aleatorias i.i.d , cada una con función de probabilidad :
   $$f_{x_i}{}^{(xi)} = \begin{cases} p^x\ (1-p)^{1-x} & \text{para } x = 0 \text{ o } x = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$
   Encuentre: a. $M^{(t)}_{\sum_{i=1}^{n} X_i}$ b. Diga qué distribución sigue $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Justifique su respuesta.

   Sean $X_1, X_2, \dots, X_n$ variables aleatorias independientes, cada una con función de probabilidad $f_{x_i}{}^{(x_i)} = \lambda e^{-\lambda x_i}\ I^{(x_i)}_{(0,\infty)}$ y $\lambda > 0$. Encuentre: a. $M^{(t)}_{\sum_{i=1}^{n} X_i}$ b. Diga qué distribución conocida sigue $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Justifique su respuesta.
3. Suponga X tiene distribución normal con media 0 y varianza 1. Sea $\mathrm{Y} = \mathrm{X}^2$, encuentre la distribución de Y. [Tomado de Mood A., Graybill F., Boes D. (1974), p. 190].
4. Sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias independientes con distribución normal estándar. Sean:
   $Y_1 = g_1\,(X_1, X_2) = X_1 + X_2$ y $Y_2 = g_2(X_1, X_2) = X_2 - X_1$. Encuentre:
   a. La distribución conjunta de Y_1 y Y_2. b. ¿Son Y_1 y Y_2 independientes?
   [Tomado de Mood A., Graybill F., Boes D. (1974), p. 190].
5. Sea X_1 y X_2 dos variables aleatorias independientes con distribución normal estándar. Sea $Y = \frac{(X_2 - X_1)^2}{2}$. Encuentre la distribución de Y. Use la técnica de la función generatriz de momentos. [Tomado de Mood A., Graybill F., Boes D. (1974), p. 191].
6. Sea X cualquier variable aleatoria continua con función de distribución $F_X^{(x)}$ y función de probabilidad $f_X^{(x)}$. Demuestre que la distribución de $Y = F_X^{(x)}$ es uniforme en el intervalo $[0,1]$. [Tomado de Khazanie, R., (1976), p. 447]
7. Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ son variables aleatorias independientes y la función generatriz de momentos de cada una existe para todo $-h < t < h$ para algún $h > 0$, y sea $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$, demuestre que $M_Y^{(t)} = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}^{(t)}$.
8. Suponga que $X_1, X_2, \dots, X_n$ son variables aleatorias independientes distribuidas Poisson, X_i tiene parámetro λ_i. Halle la distribución de $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$. [Tomado de Mood A., Graybill F., Boes D. (1974), p. 193].
9. Sean $X_1, X_2, \dots, X_n$ variables aleatorias independientes tales que $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$. Halle la distribución de:
   a. $Y = a_i X_i$, con $a_i \in \mathbb{R}$
   b. $W = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$
   c. $U = X_1 + X_2$
   d. $V = X_1 - X_2$
   e. $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$
10. Sea X una variable aletoria con función de masa de probabilidad dada por $f_X^{(x)} = \frac{x}{6}\ I^{(x)}_{\{1,2,3\}}$. Encuentre la distribución de $\mathrm{Y} = \mathrm{X}^2$.
11. Si X una variable aletoria con función de masa de probabilidad dada por $f_X^{(x)} = \frac{x+1}{15}\ I^{(x)}_{\{0,1,2,3,4\}}$. Encuentre la distribución de $\mathrm{Y} = (\mathrm{X} - 2)^2$.

12. Sean X_i $(i = 1,2)$ variables aleatorias discretas independientes, tales que $f_{X_i}^{(x_i)} = \frac{e^{-\lambda_i}\lambda_i^{x_i}}{x_i!} I_{\{0,1,2,\dots\}}^{(x_i)}$. Halle la distribución de $Y = X_1 + X_2$. Diga qué distribución conocida sigue $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Justifique su respuesta.
13. Si X tiene la distribución exponencial dada por $f(x) = e^{-x}\, I_{(0,\infty)}^{(x)}$, obtenga la densidad de probabilidad de la variable aleatoria $Y = \sqrt{X}$. [Tomado de Freund, J. y Walpole, R. (1987), p. 255].
14. Supóngase que X tiene una distribución Beta. ¿Cuál es la distribución de $Y = -Ln\, X$? [Tomado de Mood A., Graybill F., Boes D. (1974), p. 200].
15. Suponga que X tiene la densidad Pareto $f_X^{(x)} = \theta x^{-\theta-1} I_{[1,\infty]}^{(x)}$, se desea hallar la distribución de $Y = LnX$. [Tomado de Mood A., Graybill F., Boes D. (1974), p. 201].
16. Sea X una variable aleatoria cuya función de densidad de probabilidad es $\mathrm{f_X^{(x)}} = \frac{1}{\mathrm{X}^2}\, \mathrm{I}_{[1,\infty)}^{(\mathrm{x})}$ y sea $\mathrm{Y} = \mathrm{g(x)} = \mathrm{e^{-x}}$. Determine la función de densidad de probabilidad de Y. [Tomado de Quesada, Pedro. (1987), p. 233].
17. Suponga que X es una variable aleatoria cuya función de densidad de probabilidad es $\mathrm{f(x)} = 3\mathrm{x}^2\, \mathrm{I}_{(0,1)}^{(\mathrm{x})}$. Determine la función de densidad de probabilidad de $\mathrm{Y} = 1 - \mathrm{X}^2$. [Tomado de DeGroot, M. (1986), p. 147].
18. Sea X una variable aleatoria continua con densidad $f_X^{(x)}$, y sea $Y = g(x) = X^2$. Halle la función de probabilidad de Y si: a. $f_X^{(x)} = \left(\frac{1}{2}\right) e^{-|x|}\, I_{(-\infty,\infty)}^{(x)}$ b. $f_X^{(x)} = \frac{2}{9}(x+1)\, I_{(-1,2)}^{(x)}$.
    [Tomado de Mood A., Graybill F., Boes D. (1974), p. 201].
19. Sea $X \sim f_X^{(x)} = 2x\, I_{(0,1)}^{(x)}$. Encuentre la densidad de $Y = 8X^3$.
20. Sea X_i $(i = 1,2)$ variables aleatorias independientes con densidad dada por $f_{X_i}^{(x_i)} = e^{-x_i} I_{(0,\infty)}^{(x_i)}$. Sean $Y_1 = X_1 + X_2$ y $Y_2 = \frac{X_1}{X_1+X_2}$.
    a. Encuentre la distribución conjunta de Y_1 y Y_2.
    b. ¿ Y_1 y Y_2 son variables aleatorias independientes? Justifique su respuesta.
21. Si la densidad conjunta de X_1 y X_2 está dada por $f_{X_1,X_2}^{(x_1,x_2)} = I_{(0,1)}^{(x_1)}\, I_{(0,1)}^{(x_2)}$. Determine:
    a. La densidad conjunta de $Y_1 = X_1 + X_2$ y $Y_2 = X_2$.
    b. La densidad marginal de Y_1. Diga qué distribución de probabilidad conocida sigue Y_1. Justifique su respuesta.
    [Tomado de Freund, J. y Walpole, R. (1987), p. 263].
22. Suponga que X_1 y X_2 son variables aleatorias independientes, cada una distribuida uniformemente sobre el intervalo (0,1). Sean $Y_1 = X_1 + X_2$ y $Y_2 = X_2 - X_1$. (Tomado de MGB, p.205)
    a. Grafique el recorrido de los valores de X_1 y X_2.
    b. Grafique el recorrido de los valores de Y_1 y Y_2.
    c. Halle la función de densidad de Y_1. Diga qué distribución de probabilidad conocida sigue Y_1. Justifique su respuesta.
    d. Halle la función de densidad de Y_2. Diga qué distribución de probabilidad conocida sigue Y_1. Justifique su respuesta.
    [Tomado de Mood A., Graybill F., Boes D. (1974), p. 205].

23. Sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias independientes con distribución normal estándar. Sea, $Y_1 = X_1 + X_2$ y $Y_2 = \frac{X_1}{X_2}$.
    a. Encuentre la distribución marginal de Y_2.
    b. Diga qué distribución de probabilidad conocida sigue Y_1. Justifique su respuesta.

    [Tomado de Mood A., Graybill F., Boes D. (1974), p. 206].
24. Suponga que X_i tiene una densidad gamma con parámetros n_i y λ para $i = 1,2$. Asuma que X_1 y X_2 son independientes. [Tomado de Mood A., Graybill F., Boes D. (1974), p. 207].
    a. Encuentre la distribución conjunta de $\mathrm{Y}_1 = \mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2$ y $\mathrm{Y}_2 = \frac{\mathrm{X}_1}{\mathrm{X}_2}$.
    b. Halle la función de densidad de Y_1. Diga qué distribución de probabilidad conocida sigue Y_1. Justifique su respuesta.
    c. ¿Y_1 y Y_2 son variables aleatorias independientes? Justifique su respuesta.
25. Suponga que X_i tiene una distribución gamma con parámetros n_i y λ para $i = 1,2$, y asuma que X_1 y X_2 son independientes. Halle la distribución de $Y_1 = \frac{X_1}{X_1+X_2}$. [Tomado de Mood A., Graybill F., Boes D. (1974), p. 208].
26. Asuma que X_1 y X_2 son variables aleatorias independientes con distribución normal estándar. Sea, $Y_1 = X_1^2 + X_2^2$ y $Y_2 = X_2$. [Tomado de Mood A., Graybill F., Boes D. (1974), p. 210].
    a. Encuentre la densidad conjunta de Y_1 y Y_2.
    b. Encuentre la densidad marginal de Y_1. Diga qué distribución de probabilidad conocida sigue Y_1. Justifique su respuesta.
27. Sean X_1, X_2 y X_3 variables aleatorias independientes, cada una con distribución normal estándar. Además, $Y_1 = X_1$, $Y_2 = (X_1 + X_2)/2$ y $Y_3 = (X_1 + X_2 + X_3)/3$. Halle la densidad $f_{Y_3}^{(y_3)}$. [Tomado de Mood A., Graybill F., Boes D. (1974), p. 211].
28. Si X es una variable aleatoria continua tal que $X \sim F_X^{(x)}$, encuentre:
    a. La densidad de $Y = aX + b$
    b. La densidad de $W = X^2$
29. Si la densidad de probabilidad de X está dada por $\mathrm{f}_\mathrm{X}^{(\mathrm{x})} = 6\mathrm{x}(1-\mathrm{x})\, \mathrm{I}_{(0,1)}^{(\mathrm{x})}$, determine la densidad de probabilidad de $\mathrm{Y} = \mathrm{X}^3$. [Tomado de Freund, J. y Walpole, R. (1987), p. 246].
30. Sea la variable aleatoria continua X que tiene función de densidad de probabilidad dada por $f_X^{(x)} = e^{-x} I_{(0,\infty)}^{(x)}$. Encuentre la función de densidad de $Y = e^x$ usando la técnica de la función de distribución. [Tomado de Khazanie, R., (1976), p. 202]
31. Sea X una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad dada por $f_X^{(x)} = 2x\, I_{(0,1)}^{(x)}$, halle la función de densidad de $Y = \frac{1}{X+1}$. Use la técnica de la función de distribución. [Tomado de Khazanie, R., (1976), p. 207]
32. Suponga que X está uniformemente distribuida sobre el intervalo $[-\pi, \pi]$. Mediante la técnica de la función de distribución, encuentre la distribución de: [Tomado de Khazanie, R., (1976), p. 202]
    a. $Y = Cox(X)$
    b. $W = |X|$
33. Suponga que X y Y son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con densidad $f_X^{(x)} = f_Y^{(y)} = I_{(0,1)}^{(x)}$. Encuentre la distribución de $Z = X + Y$. Use la fórmula de la convolución.

[Tomado de Mood A., Graybill F., Boes D. (1974), p. 186].

34. Sean X y Y variables aleatorias con función de densidad de probabilidad conjunta dada por:

$$f_{X,Y}^{(x,y)} = \begin{cases} 2e^{-(x+y)} & \text{si} \quad 0 \leq y \leq x < \infty \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Encuentre la distribución de $Z = X + Y$. [Tomado de Khazanie, R., (1976), p. 358]

35. La función de densidad de probabilidad conjunta de X y Y está dada por $f_{X,Y}^{(x,y)} = \frac{2y}{x^2} I_{[1,\infty)}^{(x)} I_{[0,1]}^{(y)}$. Encuentre la distribución de $Z = X + Y$. [Tomado de Khazanie, R., (1976), p. 359]

36. Determine la función de densidad de probabilidad de la variable $U = X + Y$, donde X y Y son variables aleatorias independientes con funciones de densidad de probabilidad dadas por:

$f_X^{(x)} = \frac{1}{4} I_{(-2,2)}^{(x)}$ y $f_Y^{(y)} = (y+1)I_{(-1,0]}^{(y)} + (1-y)I_{(0,1]}^{(y)}$

[Tomado de Quesada, Pedro. (1987), p. 254].

Suponga que X y Y son variables aleatorias independientes, cada una distribuida uniformemente sobre el intervalo $(0,1)$. Encuentre la función de densidad de probabilidad de $Z = XY$ y $U = \frac{X}{Y}$.

[Tomado de Mood A., Graybill F., Boes D. (1974), p. 188].

37. Sean $X_1, X_2, \dots, X_n$ variables aleatorias independientes. Además, $Y_1 = min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ y $Y_n = max(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Pruebe que:

    a. $F_{Y_n}^{(y)} = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}^{(y)}$

    b. $F_{Y_1}^{(y)} = 1 - \prod_{i=1}^{n} \left[1 - F_{X_i}^{(y)}\right]$

38. Sean $X_1, X_2, \dots, X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución acumulada común $F_X^{(x)}$. Además, $Y_1 = min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ y $Y_n = max(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Pruebe que:

    a. $F_{Y_n}^{(y)} = \left[F_X^{(y)}\right]^n$

    b. $F_{Y_1}^{(y)} = 1 - \left[1 - F_X^{(y)}\right]^n$

    c. $f_{Y_n}^{(y)} = n\left[F_X^{(y)}\right]^{n-1} f_X^{(y)}$

    d. $f_{Y_1}^{(y)} = n\left[1 - F_X^{(y)}\right]^{n-1} f_X^{(y)}$

Dirección: Av. Las Américas. Universidad de los Andes Conjunto La Liria. Edif. F. Piso 2. Departamento de Estadística. Cubículo 258. Mérida – Venezuela.
Telf. (0274) 2401153 (directo) – 2401122 / 1071 (secretaria). e-mail: gudberto@ula.ve