

Estudio Empírico de la Selección y Estimación de los Modelos de Crecimiento Estadístico

S. Amirkhalhali, U.L.G. Rao and S. Amirkhalkhali¹

Resumen: En este papel se comparan los modelos de crecimiento Lineal y Exponencial con el fin de permitirle al investigador seleccionar el modelo apropiado con el propósito de estimar la tasa de crecimiento. Concluye que el modelo exponencial se sobre impone al modelo Lineal. *Empirical Economics*, Vol. 10, 1985, páginas 201-208²

1. Introducción

En su trabajo pionero Pesek (1961) se pregunta acerca de los métodos utilizados para calcular las tasas de crecimiento. Desafortunadamente Pesek no consideró ningún modelo estadístico formal, ni comparó las propiedades de los estimadores usados para calcular las tasas de crecimiento. Los investigadores empíricos a menudo utilizan dos modelos de crecimiento estadístico, a saber: el modelo Lineal (ML) y el modelo Exponencial (ME). De acuerdo con esto, nosotros consideramos estos dos modelos y formulamos la siguiente interrogante: ¿Cuál de los dos modelos provee una mejor caracterización, en sentido estadístico, del proceso bajo investigación?. Con este fin se estiman y comparan las tasas de crecimiento de varios agregados macroeconómicos para un grupo de países industrializados. Más importante aún, se usará el criterio Error Absoluto Medio Porcentual (MAPE, por sus siglas en inglés) para comparar la actuación relativa de los modelos estimados. En la sección 2 se introducen los modelos. También se discuten las tasas de crecimiento basadas en cada uno de ellos y el criterio del MAPE para seleccionar el mejor modelo. En la sección 3 se presentan e interpretan los resultados empíricos. Finalmente, en la sección 4 se resumen las conclusiones³.

2. Objetivos

1. Estimar los parámetros α , β y σ^2 para cada uno de los modelos considerados
2. Seleccionar el modelo que mejor se ajuste a los datos de la muestra
3. Estimar la tasa de crecimiento θ basado en cada uno de los modelos

3 Los Modelos y los Estimadores de las Tasas de Crecimiento

En esta sección se especifican los dos modelos y los estimadores correspondientes de las tasas de crecimiento. También se discute el criterio para seleccionar el mejor modelo.

¹ Samad Amirkhalkhali, U.L. Gouranga Rao y Saleh Amirkhalkhali, An Empirical Study of Selection and Estimation of Statistical Growth Models. Departamento de Economía, Universidad Dalhousie. Halifax, Nueva Escocia, Canada, B311 315

² Traducción, adaptación y comentarios de Héctor L. MATA Brito, Profesor titular de la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales (FACES) de la Universidad de los Andes (ULA), para uso exclusivo de los alumnos de Economía Aplicada y Econometría I, respectivamente. Mérida, Marzo de 1997

³ Los números entre corchetes indican los números de las ecuaciones. La literatura citada se indica con números entre paréntesis.

3.1 El Modelo Lineal

El modelo Lineal se especifica de la siguiente forma:

$$[1] \quad y_t = \alpha + \beta t + u_t, \quad t = 1, 2, \dots, T.$$

en donde:

y_t denota la observación t de la variable dependiente y
 t es el período de tiempo.

u_t es el término error, con sus supuestos característicos: $NID(0, \sigma^2)$

La pendiente $\beta = dy_t/dt$ (derivada de la variable dependiente con respecto al tiempo) mide la tendencia lineal en el agregado macroeconómico y . Dado que el modelo lineal [1] satisface todos los supuestos estándar del modelo de regresión normal, se puede utilizar los estimadores Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO) con el fin de obtener los estimados óptimos $\hat{\alpha}$ de α , $\hat{\beta}$ de β y $\hat{\sigma}^2$ de σ^2 . Noten que los estimados $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ serán idénticos a los estimados de Máxima Verosimilitud (MV) debido a que los errores u_t siguen una ley de probabilidad normal.

La tasa de crecimiento se estima, a partir del modelo Lineal, de la siguiente forma:

$$[2] \quad \theta = \hat{\beta} / \bar{y}$$

en donde:

θ es la tasa de crecimiento

$\hat{\beta}$ es la pendiente o coeficiente de regresión estimado a partir del modelo lineal

\bar{y} es la media aritmética de la variable y_t . Por lo que θ mide la tasa de crecimiento promedio en y durante los T períodos

3.2 El Modelo Exponencial

El modelo Exponencial se especifica tal como sigue:

$$[3] \quad y_t = AB^t e^{u_t}, \quad A, B > 0, \quad t = 1, 2, \dots, T.$$

en donde

y_t , t y u_t tienen el mismo significado que en el modelo Lineal

Debido a que los errores están normal e independientemente distribuidos, $u_t \approx NID(0, \sigma^2)$, el antilogaritmo de los errores u_t (recuerden que la variable y_t fue transformada en logaritmos) son variables aleatorias independientemente distribuidas las cuales siguen una ley de probabilidad Log normal con media igual al antilogaritmo de $(\sigma^2 / 2)$ y varianza igual al antilogaritmo de σ^2 (antilogaritmo(σ^2)-1).

Este es el bien conocido modelo de la tasa de crecimiento compuesto el cual es discutido en **Goldberger** [215-216] y **Johnston** [66-68]. Si θ representa la tasa de crecimiento compuesta, entonces $\beta = (1 + \theta)$. El objetivo es estimar los parámetros A, B y σ^2 del modelo exponencial y la tasa de crecimiento θ .

Dado que el modelo [3] no se puede estimar directamente mediante el método de los MCO, se hace necesario linealizarlo previamente en logaritmo, tal como se indica en [4]:

$$[4] \quad \text{Ln } y_t = \alpha + \beta t + u_t, \quad t = 1, 2, \dots, T.$$

en donde:

$$\alpha = \text{Ln } A \quad \text{y} \quad \beta = \text{Ln } B$$

El modelo transformado [4] satisface todos los supuestos del modelo de regresión normal en donde la variable dependiente es el logaritmo del agregado macroeconómico, es decir $\text{Ln } y_t$. De aquí que los estimados de Máxima Verosimilitud \hat{A} de A y \hat{B} de B vienen dados por

$$[5] \quad A = \text{anti logaritmo } (\hat{\alpha}) \\ B = \text{anti logaritmo } (\hat{\beta})$$

En donde $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ son los estimados de máxima verosimilitud de α y β respectivamente. Noten que el mejor estimado insesgado cuadrático (cuadrático en de $\text{Ln } y_t$) $\tilde{\sigma}^2$ de σ^2 se puede obtener a partir de los residuos de la ecuación estimada.

Finalmente, el estimado⁴ de Máxima Verosimilitud de la tasa de crecimiento θ para el modelo de regresión exponencial viene dado por la siguiente expresión:

$$[6] \quad \tilde{\theta} = \tilde{B} - 1$$

4. Selección del Modelo

Uno de los objetivos principales de este estudio consiste en examinar cual de los dos modelos considerados se ajusta mejor a los datos de los agregados macroeconómicos. Para tal fin se utilizará el criterio del Error Absoluto Medio Relativo (MAPE, por sus siglas en inglés) con el fin de medir la bondad del ajuste. El MAPE se define como:

$$[6] \quad \text{MAPE} = 100 * \left(\sum |y_t - \hat{y}_t| / y_t \right) / T$$

⁴ \tilde{A} y \tilde{B} son asintóticamente insesgados, consistentes y asintóticamente eficientes. Esos estimadores estarán insesgados en pequeñas muestras, siendo fácil mostrar que $E(\tilde{B}) = \text{anti logaritmo}(\beta + \text{var}(\tilde{\beta})/2)$. Dado que se conoce el sesgo, se puede corregir el sesgo en \tilde{B} y obtener el estimador insesgado $\hat{B} = \tilde{B} / \text{anti logaritmo}(\text{var}(\tilde{\beta})/2)$. En este trabajo se estimó la tasa de crecimiento basada tanto en el estimador sesgado \tilde{B} como en el estimador insesgado \hat{B} , obteniéndose los mismos resultados. Esto es lo que se esperaba en vista del hecho de que los errores estándar son mucho más pequeños los estimados de las tasa de crecimiento, en todos los casos. Dada esta circunstancia, no se reportan las tasas de crecimiento estimadas a partir de \hat{B}

en donde:

y_t son los valores observados de la serie macroeconómica

\hat{y}_t son los valores estimados de la variable dependiente

El MAPE es por definición un número puro y positivo que no depende de las unidades de medida.

Para decidir cual de los dos modelos se ajusta mejor a los datos de los agregados macroeconómicos se calculan y comparan sus respectivos MAPEs, seleccionando aquel que tenga el MAPE más bajo. Además del criterio MAPE existen otros para medir la bondad del ajuste. El MAPE parece ser el más popular entre los investigadores, por lo que será utilizado en este trabajo. Para una discusión adicional acerca de las medidas de la bondad del ajuste, consulten a **Klein** [242-243].

Adicionalmente, cuando se estima un modelo usando series temporales, tal como es nuestro caso, generalmente resulta que los errores de la ecuación estimada están seriamente auto correlacionados. Confrontados con esa situación, la mayor parte de los investigadores asumen que los errores siguen un esquema auto regresivo de primer orden. La prueba estadística de Durbin-Watson (DW), desarrollada para probar la significancia del coeficiente de auto correlación de primer orden en los errores, es la prueba más comúnmente utilizada en las investigaciones empíricas. Veán, por ejemplo, a **Johnston** [314-316]. De acuerdo con esto se procederá a comparar los resultados de los modelos con respecto a sus DWs.

4. Resultados empíricos

A continuación se estiman las tasas de crecimiento para cuatro agregados macroeconómicos a partir de los modelos [1] y [3], respectivamente. Dichas series son: el producto interno bruto (GDP, por sus siglas en inglés), la formación bruta de capital fijo (GFCF), el empleo (EM) y el cambio en el índice de precios de los consumidores (CPI).

Se considerarán los países del llamado grupo de los siete, formado por Canadá, Francia, Alemania, Italia, Japón, Reino Unido y los Estados Unidos de Norte América, con el fin de comparar las tasas de crecimiento. El período considerado es el comprendido entre los años 1964-1981. A Propósito se dividió dicho período en dos sub períodos en virtud de la ocurrencia de algunos cambios estructurales ocurridos en la economía de los países industrializados desde 1973-1974, los cuales resultaron en stagflation. Dichos períodos son: 1964-73 y 1974-81, respectivamente. En este aspecto, los precios del petróleo debido al poder de mercado de la OPEC, por una parte y el incremento en el poder oligopolístico tanto del producto como en el mercado de la mano de obra por la otra, pudieran ser los responsables de tal situación.

Las tablas 1 hasta la 4 muestran las tasas de crecimiento estimadas por países, por sub períodos, por modelos y por agregados económicos. Los modelos se identifican por los estimadores utilizados: LS representa el modelo Lineal y ML representa el modelo Exponencial. Las tasas de crecimiento están en un todo de acuerdo con la división del período de tiempo. Para casi todos los países las tasas de crecimiento estimadas de las series GDP, GFCF y EM, para el período 1974-1981, son más bajas que las obtenidas para el período 1964-73. Esto es cierto para el caso de las tasas de crecimiento estimadas en ambos modelos. En casi todos los casos, las tasas de crecimiento estimadas a partir del Modelo Lineal son más bajas que aquellas estimadas con el modelo Exponencial.

En la tabla 5 se muestra la prueba estadística de Durbin–Watson para los dos modelos basados en el período 1964-1981. Es obvio que las magnitudes del estadístico DW dependen casi enteramente de las series de los datos más que de los modelos de crecimiento utilizados. ¿ Cual de los dos modelos da mejor estimación de las tasas de crecimiento ?. Para dar respuesta a esta pregunta hay que comparar la actuación relativa de los modelos usando el criterio del MAPE.

Los MAPES correspondientes a los dos modelos se presentan en las tablas 6 hasta 9. Los resultados de dichas tablas hablan por si mismas. Los MAPES calculados a partir del modelo Lineal son más altos que aquellos calculados con el modelo Exponencial. En otras palabras, el modelo lineal tuvo una actuación muy pobre relativa al modelo exponencial. Esto es cierto para el caso de todos los países, para los cuatro series macroeconómicas y para los tres períodos de tiempo considerados. Sin embargo, debe señalarse que ambos modelos tienen una pobre actuación especialmente en aquellos datos a los cuales se les ha removido la tendencia, como es el caso de la serie CPI. No obstante, aún en este caso, el modelo exponencial sigue reportando MAPES más bajo que el modelo Lineal.

5. Conclusiones:

1. Los resultados empíricos del presente estudio permiten concluir que el modelo exponencial, el cual se ajusta mejor a los datos, es más apropiado que el modelo Lineal.
2. Las tasas de crecimiento estimadas a partir del modelo Exponencial tienden a ser más altas, por lo que se espera que las mismas sean más confiables que aquellas basadas en el modelo Lineal.
3. Se recomienda al investigador empírico utilizar preferiblemente el modelo exponencial con el fin de estimar las tasas de crecimiento de los agregados macroeconómicos

Agradecimientos

El autor agradece con gratitud las numerosas sugerencias recibidas de un crítico anónimo

Bibliografía

- Goldberger, A. S.: *Econometric Theory*. John Willey, New York 1964
- Johnston, J.: *Econometric Methods*. McGraw-Hill, New York 1984
- Klein, L. R.: *A Textbook of Econometrics*, Prentice–Hall, N.J. 1971
- OECD: *National Accounts 1964-81* 2 Paris 1983
- OECD: *Labour Force Statistics*. Various sigues, 1966-83. Paris
- Pesek, B. P.: *Economic Growth and its Measurement*. *Economic Development and Cultural Change*, Vol 9, 1961, 295-315.

Tabla 1. Tasa de Crecimiento porcentual de la Serie GDP.

Países:	64-73		74-81		64-81	
	ML	ME	ML	ME	ML	ME
Canadá	5.17	5.32	2.98	3.04	4.21	4.45
Francia	5.28	5.42	2.72	2.77	4.01	4.25
Alemania	4.22	4.30	2.72	2.77	3.17	3.30
Italia	5.00	5.21	2.75	2.78	3.63	3.84
Japón	9.03	9.71	4.69	4.80	5.91	6.60
Reino Unido	2.74	2.76	1.19	1.20	2.07	2.13
USA	3.34	3.42	2.94	3.01	2.89	2.97

Tabla 1. Tasa de Crecimiento porcentual de la Serie GFCF.

Países:	64-73		74-81		64-81	
	ML	ME	ML	ME	ML	ME
Canadá	4.67	4.76	2.72	2.71	4.22	4.43
Francia	6.40	6.65	1.14	1.14	3.54	3.86
Alemania	3.93	3.94	3.19	3.23	1.99	2.05
Italia	4.38	4.58	1.41	1.40	2.03	2.16
Japón	12.50	14.20	4.47	4.56	6.41	7.70
Reino Unido	3.16	3.26	-0.61	-0.64	1.27	1.34
USA	3.39	3.42	3.02	3.13	2.21	2.26

Tabla 1. Tasa de Crecimiento porcentual de la Serie EM.

Países:	64-73		74-81		64-81	
	ML	ME	ML	ME	ML	ME
Canadá	2.79	2.85	2.68	2.76	2.82	2.87
Francia	0.75	0.75	0.15	0.13	0.51	0.51
Alemania	0.08	0.08	0.04	0.04	-0.01	-0.01
Italia	0.18	0.18	0.87	0.87	0.53	0.53
Japón	1.36	1.38	1.06	1.07	0.98	0.99
Reino Unido	-0.20	-0.21	-0.21	-0.22	-0.04	-0.04
USA	1.98	2.00	2.43	2.47	2.06	2.08

Tabla 1. Tasa de Crecimiento porcentual de la Serie CPI.

Países:	64-73		74-81		64-81	
	ML	ME	ML	ME	ML	ME
Canadá	9.97	10.40	1.63	1.58	8.70	10.42
Francia	11.20	12.55	0.84	0.84	8.48	10.37
Alemania	12.44	12.22	-2.87	-2.46	4.20	5.26
Italia	9.16	7.75	0.05	-0.15	10.72	13.74
Japón	7.43	6.65	-22.80	-18.10	2.13	1.80
Reino Unido	11.63	12.38	-5.87	-5.58	8.44	10.65
USA	11.53	15.13	4.48	4.55	9.10	11.47

Tabla 5. Pruebas Estadísticas de Durbin-Watson de los dos modelos 1964-1981
 d_L y d_U son 0.90 u 1.12 respectivamente al nivel de significación del 0.01

	GDP		GFCF		EM		CPI	
Países:	ML	ME	ML	ME	ML	ME	ML	ME
Canadá	1.05	0.92	0.89	0.97	0.99	0.95	0.96	0.91
Francia	0.64	0.68	0.68	0.61	0.51	0.49	1.31	1.22
Alemania	2.34	2.31	0.65	0.65	0.74	0.74	0.89	0.97
Italia	1.13	1.47	0.68	0.62	1.07	1.13	0.94	0.98
Japón	0.76	0.69	0.91	0.94	0.96	0.92	1.12	1.16
Reino Unido	0.96	0.97	0.94	0.91	1.27	1.27	1.21	1.14
USA	1.20	1.17	1.18	1.17	0.71	0.97	1.48	1.15

Tabla 6. Error Absoluto Medio Relativo (MAPE): GDP.

	64-73		74-81		64-81	
Países:	ML	ME	ML	ME	ML	ME
Canadá	1.13	0.08	0.78	0.07	1.25	0.19
Francia	1.35	0.03	1.04	0.08	1.53	0.20
Alemania	1.51	0.09	1.17	0.08	1.73	0.16
Italia	1.30	0.14	1.62	0.13	2.10	0.29
Japón	2.36	0.18	0.78	0.04	2.77	0.53
Reino Unido	1.14	0.08	1.46	0.12	1.53	0.15
USA	1.52	0.11	1.63	0.11	1.60	0.13

Tabla 6. Error Absoluto Medio Relativo (MAPE): GFCF.

	64-73		74-81		64-81	
Países:	ML	ME	ML	ME	ML	ME
Canadá	1.56	0.34	1.94	0.17	3.44	0.35
Francia	1.38	0.03	1.42	0.11	4.98	0.50
Alemania	4.76	0.35	2.98	0.23	5.30	0.43
Italia	0.12	0.52	5.13	0.53	6.66	0.72
Japón	5.36	0.43	2.18	0.20	8.48	1.20
Reino Unido	1.83	0.20	2.38	0.24	4.50	0.47
USA	2.92	0.23	5.36	0.43	4.31	0.34

Tabla 6. Error Absoluto Medio Relativo (MAPE): EM.

	64-73		74-81		64-81	
Países:	ML	ME	ML	ME	ML	ME
Canadá	21.10	18.87	14.12	13.61	19.59	14.42
Francia	14.90	11.37	14.97	6.02	16.49	10.27
Alemania	42.27	40.34	28.06	18.29	38.43	33.86
Italia	49.93	42.82	11.61	4.12	51.65	31.91
Japón	22.56	11.81	51.56	18.35	44.76	20.15
Reino Unido	19.73	10.80	20.44	7.10	31.31	13.19
USA	32.18	25.50	24.19	10.70	26.05	23.99

Tabla 6. Error Absoluto Medio Relativo (MAPE): CPI.

	64-73		74-81		64-81	
Países:	ML	ME	ML	ME	ML	ME
Canadá	21.10	18.87	14.12	3.17	19.59	14.42
Francia	14.90	11.37	14.97	6.02	16.49	10.27
Alemania	42.27	40.34	28.06	18.29	38.43	33.86
Italia	49.93	42.82	11.61	4.12	51.65	31.91
Japón	22.56	11.81	51.56	18.35	44.76	20.15
Reino Unido	19.73	10.80	20.44	7.10	31.31	13.19
USA	32.18	25.50	24.19	10.70	26.99	23.99