Operaciones Matriciales. Usos y Aplicaciones

Héctor L. Mata

Las siguientes notas tienen por finalidad reforzar el conocimiento de los cursantes del Seminario de Economía Aplicada en lo referente a la forma de escribir vectores y matrices, así como también en el cálculo de las siguientes funciones matriciales: TRANSPONER, MMULT, MDETERM y MINVERSA, respectivamente. Tal como puede leerse en cualquier texto de econometría, dichas funciones tienen una importancia significativa en el planteamiento del modelo clásico de regresión lineal. Reacuérdese, por ejemplo, como se presenta dicho modelo en notación de álgebra matricial

Los ejercicios desarrollados en estas notas han sido resueltos paso a paso con el auxilio de la hoja de cálculo de MS Excel

Previamente al cálculo de esas funciones vamos a ilustrar la manera de escribir Vectores y Matrices con la ayuda del Editor de Ecuaciones 3.0 de MS Word. Para ello se utilizarán los ejercicios contenidos en la siguiente tabla:

	Filas	$\underset{1x2}{a} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$	$\underset{1x3}{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$
Vectores			
	Columnas	$\underset{2x1}{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\underset{3x1}{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$
Matrices		$\underset{2x2}{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$	$\underset{3x3}{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

Cómo escribir un Vector Fila

Microsoft Word para Windows incluye un objeto especial denominado ***Editor de ecuaciones 3.0*** con el cual se pueden insertar símbolos, ecuaciones, etc., para crear fórmulas matemáticas en la pantalla e imprimirlas. Dichas fórmulas suelen incluir símbolos y estructuras de caracteres que no son normales en documentos fuera del ámbito científico

A continuación se ilustra el procedimiento para escribir el primer vector fila de la tabla, es decir el vector fila de dimensión 1x2: (1 FILA x 2 COLUMNAS). Los estudiantes deben escribir el resto de los vectores y matrices indicados en la tabla:

[1] $\underset{1x3}{a} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

PASOS:

Microsoft Word
Insertar una ecuación

1. Clic en el sitio donde se quiera insertar la ecuación
2. Hagan clic en el menú **Insertar** y seleccionen el comando **Objeto**
3. En la ventana Objeto seleccionen el objeto **Microsoft Editor de Ecuaciones 3.0**
4. Hagan clic en el botón **Aceptar**:

Aparece la ventana del Editor de ecuaciones, en el cual se distinguen dos partes: la **Zona de edición** y la barra de herramientas **Ecuación**, respectivamente:

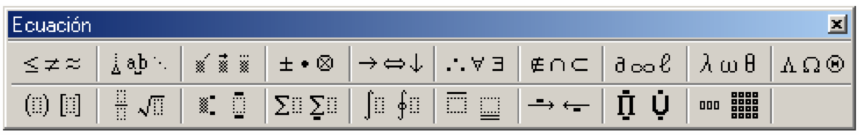
La **Zona de edición** es un área especial en donde aparecerá la fórmula a medida que se vaya escribiendo. Para regresar al documento de Word haga clic fuera de la zona de edición. Abandone el editor de ecuaciones solo cuando haya concluido la escritura de la fórmula o ecuación.

La barra de herramientas ***Ecuación*** está formada por dos paletas. La superior, o **paleta de símbolos**, contiene más de 150 símbolos y caracteres propios del lenguaje matemático. La barra inferior o **paleta de plantillas,** contiene 120 botones u opciones

Para identificar un Símbolo o una plantilla descanse el cursor sobre ella hasta que aparezca el rótulo. Hagan lo mismo para identificar cada una de las opciones:

Paleta de Símbolos:	**Paleta de Plantillas**
▪ Símbolos de relación	▪ Plantilla de barreras
▪ Símbolos de espacio y puntos suspensivos	▪ Plantilla para fracciones y Radicales
▪ Adornos	▪ Plantillas para subíndices y superíndices
▪ Símbolos de operadores	▪ Plantillas de sumatorias
▪ Símbolos de flechas	▪ Plantillas de integrales
▪ Símbolos lógicos	▪ Plantilla de barras subyacentes y superpuestas
▪ Símbolos de la teoría de conjuntos	▪ Plantillas de flechas rotuladas
▪ Símbolos varios	▪ Plantillas de Producto y Teoría de conjuntos
▪ Caracteres griegos (minúscula)	▪ Plantillas de Matrices y Vectores
▪ Caracteres griegos (mayúscula)	

Barra de herramientas Ecuación



4. Escriban el nombre del vector en letras ***minúsculas.*** **E**scriba por ejemplo, ***a***, seguido del signo ***igual***

5. Hagan clic en la plantillas de **Barreras** (primer botón de la barra inferior) y seleccionen el símbolo de ***corchetes [ ]*** (segundo símbolo de la primera fila)
6. Hagan clic en la plantilla para **Matrices** (último botón de la barra inferior) y seleccionen ***matriz de 1 fila y 2 columnas***. (primer símbolo de la primera fila)

Escriban los elementos con la ayuda de la tecla ***Tab***. Ej.**:** 1, TAB; 2, TAB; etc.

7. Opriman 2 veces la tecla TAB para abandonar el corchete derecho
8. Hagan clic en las Plantillas para Subíndices y Superíndices (tercer botón de izquierda a derecha en la barra inferior) y seleccionen ***Subíndice*** (segundo símbolo en la primera fila de plantillas)
9. Escriban la dimensión del vector ***a***: 1 fila por 2 columnas, es decir ***1x2***
10. Hagan clic fuera de la zona de edición para abandonar el editor

Funciones Utilizadas en Operaciones Matriciales:

Función	Uso	Categoría
=TRANSPONER( )	Transponer Matrices	Búsqueda y Referencia
=MDETERM( )	Calcular Determinantes	Matemática y Trigonometría
=MINVERSA( )	Invertir Matrices	Matemática y Trigonometría
=MULT( )	Multiplicar Matrices	Matemática y Trigonometría

Transponer un Vector Fila

TRANSPONER (Matriz) devuelve un vector vertical de celdas como un rango horizontal, o viceversa

Dado el vector fila a de orden (1x3), se llama vector transpuesto de a, y se representa con a^t, al vector que se obtiene cambiando las filas por las columnas, o viceversa. Ejemplo:

Vector Fila, fuente: $\underset{1x3}{a} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ *Vector Transpuesto:* $\underset{3x1}{a^t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Procedimiento para la transposición:

1. Abran la aplicación MS Excel.
2. Transcriban los elementos del vector ***a*** en un rango tal como el rango ***A2:C2***, o en cualquier otro que Uds. deseen.
3. Seleccionen un rango, tal como el E2:E4, para colocar el vector transpuesto a^t.

	A	B	C	D	E	F
1						
2	**1**	**2**	**3**		**1**	
3					**2**	
4					**3**	
5						

Noten El Vector Fila a en el rango A2:C2 y el vector a ser transpuesto a^t en el rango seleccionado E2:E4.

Noten igualmente la dimensión de los mismos: Vector Fila, 1x3; Vector Transpuesto o vector columna, 3x1

4. Sin deseleccionar el rango ***E2:E4***, hagan clic en la barra de fórmula y escriban:

   - el signo **=**
   - el nombre de la función ***TRANSPONER***.
   - el argumento de la función entre paréntesis. Dicho argumento no es otro que el rango a ser transpuesto, es decir: ***A2:C2.***

   Si UD escribió la fórmula correctamente, la misma debe lucir así:

5. Ahora mantengan oprimida las teclas ***Shift+Ctrl*** y opriman la tecla **Enter** para ejecutar la función.

   Observen que MS Excel transpuso el vector y colocó la fórmula automáticamente entre llaves, es decir **{=TRANSPONER(A2:C2)}**

Borrar una Matriz:

Los siguientes pasos les permitirán borrar matrices y/o vectores:

1. Seleccionen previamente el rango de la matriz que se desea borrar, en este caso el rango ***E2:E4***.
2. Clic ***Edición*** – Clic ***Borrar*** – Clic ***Todo***

Determinante de una Matriz.

MDTERM(Matriz) devuelve el determinante matricial de una matriz

De acuerdo con Dowling[1], el determinante $|A|$ o **detA** de cualquier matriz cuadrada[2] es un número simple o escalar, cuyo valor puede ser:

- $|A| \neq 0$. La matriz es ***no singular*** (las ecuaciones son linealmente independientes). Existe una solución única

- $|A| = 0$. La matriz es ***singular*** (las ecuaciones son linealmente dependientes). Existe una solución única)

De acuerdo con lo anterior, las matrices pueden ser:

1. ***No singular o Regular***, Una matriz es Regular o Inversible (es decir, que tiene inversa) si y sólamente si su determinante es distinto de cero

---

[1] Dowling, Edward T. (1982) Teoría y Problemas de Matemáticas para Economistas. México, Poligráfica, S.A., p. 208

[2] Se dice que una matriz es cuadrada cuando el arreglo tiene igual número de filas que de columnas. En ese caso se cumple que: $m = n$ (m = número de filas; n = número de columnas)

2. **Singular**. Una matriz es singular (es decir, que no tiene inversa) si y solamente si su determinante es igual a cero

   Si todos los elementos de una fila o de una columna son ceros, esa matriz es singular puesto que su determinante será cero. Otro tipo de matriz singular es aquella en que dos filas o dos columnas son iguales o en el que una fila o columna es múltiplo (o combinación lineal) de otra fila o columna, respectivamente.

   En [2] se indica la matriz cuadrada A, de dimensión 2x2, la cual servirá de base para ilustrar el procedimiento para calcular su Determinante:

   [2] $\underset{2x2}{A} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

Procedimiento para calcular el determinante:

1. Transcriban en la hoja de cálculo los elementos de la matriz A en el rango ***A7:B8***, o en cualquier otro rango que Uds. deseen.
2. Seleccionen una celda tal como la E7 para colocar el valor del determinante de la matriz A. Recuerden que el valor del determinante es un escalar o un simple numero.

	A	B	C	D	E	F
5						
6						
7	**6**	**4**			**0**	
8	**3**	**2**				
9						

   El rango A7:B8 es el rango de la matriz fuente; E7 es celda en donde se colocará el valor del determinante.

3. Sin deseleccionar el rango ***A7:B8***, hagan clic en la barra de fórmula y escriban:

   - el signo **=**
   - el nombre de la función ***MDETERM***.
   - el argumento de la función entre paréntesis. Dicho argumento no es otro que el rango donde se encuentra la matriz fuente A, es decir: ***A7:B8.***

   Si UD escribió la fórmula correctamente, la misma debe lucir así:

4. Ahora mantengan oprimida las teclas ***Shift+Ctrl*** y toquen la tecla **Enter**, para ejecutar la función.

   Puesto que ***detA*** o $[A]$ **=0**, se dice que A es singular o linealmente dependiente, por lo que no se puede obtener la solución del sistema.

Mensaje de Error de MS Excel:

El siguiente mensaje de error es muy común cuando se trabaja con alguna de las siguientes funciones matriciales: MDETERM, MINVERSA o MMULT:

Mensaje de error: **#¡VALOR!** aparece cuando se:

- intenta calcular el determinante de una matriz no cuadrada, o
- cuando la matriz tiene un dato no numérico o una celda vacía.

Invertir una Matriz

MINVERSA(Matriz) devuelve la matriz inversa de una matriz dentro de una matriz

Una matriz cuadrada que posee inversa, A^{-1}, se dice que es inversible (se puede invertir) o regular; en caso contrario recibe el nombre de singular

Propiedades de la inversión de matrices

1. La matriz inversa, si existe, es única
2. $A^{-1} * A = A * A^{-1} = I$
3. $(A * B)^{-1} = B^{-1} * A^{-1} \neq A^{-1} * B^{-1}$
4. $(A^{-1})^{-1} = A$
5. $(A^{k})^{-1} = (A^{-1})^{k}$
6. $(A^{t})^{-1} = (A^{-1})^{t}$

En [3] se indica la matriz cuadrada B, de orden 2x2, la cual servirá de base para ilustrar el procedimiento para calcular su inversa

[3] $$\underset{2x2}{B} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Procedimiento para invertir la matriz:

1. Transcriban en la misma hoja de cálculo los elementos de la matriz B en el rango ***A11:B12***, o en cualquier otro rango que Uds. deseen.

2. Seleccionen un rango tal como el D11:E12 para colocar la matriz inversa A^{-1}. Recuerden que ésta tiene la misma dimensión que la matriz fuente

	A	B	C	D	E	F
9						
10						
11	**6**	**4**		**-0,25**	**0,5**	
12	**5**	**2**		**0,625**	**-0,75**	
13						

Como la dimensión de la matriz a es de 2x2, se procedió a transcribir sus elementos en el rango A11:B12; D11; E12 es el rango donde se colocará la matriz inversa.

3. Sin deseleccionar el rango ***D11:E12***, hagan clic en la barra de fórmula y escriban:

   - el signo **=**
   - el nombre de la función ***MINVERSA***
   - el argumento de la función entre paréntesis. Dicho argumento, no es otro que el rango donde se encuentra la matriz fuente A, es decir: ***A11:B12.***

   Si UD escribió la fórmula correctamente, la misma debe lucir así:

4. Ahora mantengan oprimida las teclas ***Shift+Ctrl*** y toquen la tecla **Enter** con la mano derecha, para ejecutar la función.

Multiplicar Matrices

MMULT(Matriz1,Matriz2) devuelve el producto matricial de 2 matrices, una matriz con el mismo número de filas que matriz1 y columnas que Matriz2.

De acuerdo con Dowling[3] la multiplicación de dos matrices con dimensiones $(m_1 x n_1)$ y $(m_2 x n_2)$ requiere que las matrices sean ***conformables***, o sea, que $n_1 = m_2$. Esto implica que el número de columnas en la ***matriz delantera*** debe ser igual al número de filas en la ***matriz posterior.***

Antes de multiplicar matrices determine previamente la conformidad de las mismas, en un todo de acuerdo con el siguiente procedimiento:

- Coloque las dos matrices en el orden en que se van a multiplicar
- Encierre en un círculo o elipse el último número de la primera matriz y el primer número de la segunda matriz
- Concluya que las matrices son conformables, solo en el caso de que dichos números sean iguales
- Los números fuera del círculo indicarán el orden de la matriz resultante, es decir:

$$(m_1 x n_1) \quad (m_2 x n_2)$$

Matriz delantera **Matriz posterior**

Las matrices son conformables para la multiplicación si, y solamente si se cumple que $n_1 = m_2$. Tal como 2=2, 3=3, ..., etc. En estos casos se dice que AB está definida

Ejemplo:

$$(2 x 2) \quad (2 x 3)$$

Matrices conformables. Dimensión: $m_1 x n_2$, igual a 2x2
Dimensión del producto resultante: 2x3

[3] Ibid, p.183-184

En [4] se muestran las matrices A y B, respectivamente, las cuales servirán de base para ilustrar el procedimiento de la multiplicación

[4] $\underset{2x2}{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$ $\quad$ $\underset{2x3}{B} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 6 \end{bmatrix}$

Procedimiento para multiplicar matrices:

1. Transcriban en la hoja de cálculo los elementos de las matrices A y B, en los rangos ***A15:B16 y D15:F16***, respectivamente, o en cualquier otro rango que Uds. deseen.
2. Seleccionen un rango tal como el H15:J16 para colocar el producto de A por B

   Tal como se demostró anteriormente, las matrices son conformables para la multiplicación, dando como resultado una matriz de orden 2x3, la cual se presenta en el rango H15:J16

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
13										
14										
15	**2**	**4**		**2**	**4**	**8**		**16**	**32**	**40**
16	**6**	**8**		**3**	**6**	**6**		**36**	**72**	**96**
17										
18										

3. Sin deseleccionar el rango ***H15:J16***,hagan clic en la barra de fórmula y escriban:

   - el signo **=**
   - el nombre de la función ***MMULT***
   - el argumento de la función entre paréntesis. Dicho argumento, no es otro que el rango donde se encuentran las dos matrices fuentes, separadas por un punto y coma, es decir: ***A15:B16;D15:F16***

     Si UD escribió la fórmula correctamente, la misma debe lucir así:

4. Ahora mantengan oprimida las teclas *Shift+Ctrl* y toquen la tecla Enter con la mano derecha, para ejecutar la función.

Asistente de Funciones

Hasta ahora se han escrito las funciones manualmente; no obstante, Uds pueden utilizar el Asistente de funciones de MS Excel, el cual les guiará durante el proceso de cálculo de cualquiera de las funciones matriciales.

1. Hagan Clic en el menú ***Insertar*** y seleccionen el comando ***Función***

   Aparece el cuadro de diálogo de nombre **Insertar Función**

2. Hagan clic en la lista desplegable Seleccionar una categoría y seleccionen *Ma*temáticas y Trigonometría
3. Arrastren la barra de desplazamiento vertical hasta poner al descubierto la función de su interés
4. Hagan clic sobre ella para seleccionarla y
5. Opriman el botón de comando Aceptar

   Sigan las instrucciones que aparecen en la ventana Argumentos de la función.

Sistema de Ecuaciones Lineales

Es un sistema formado por **m ecuaciones** y **n incógnitas**. Es un conjunto de expresiones algebraicas de la forma:

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = c_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = c_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = c_m
\end{array}
$$

en donde:

x_j son las incógnitas, (j=1,2,...,n).

a_{ij} son los coeficientes, (i=1,2,...,m) (j=1,2,...,n).

c_i son los términos independientes, (i=1,2,...,m).

Clasificación de los Sistemas de Ecuaciones

Se pueden clasificar los sistemas atendiendo al número de sus soluciones[4]

Sistemas de Ecuaciones

- Compatibles
  Si tiene solución
  - Determinados
    Una solución
  - Indeterminados
    Infinitas soluciones
- Incompatibles
  Si no tiene solución

[4] Estudios de Sistemas de Ecuaciones Lineales (s.e.l.) http://personal5.iddeo.es/ztt/Tem/T8_Estudio_SEL.htm

Solución de un sistema

Existen varios métodos para obtener las soluciones de los sistemas compatibles. Uno de ellos es el método por inversión de matrices.

Este método es sólo aplicable si el sistema tiene igual número de ecuaciones que de incógnitas, es decir **m=n** y si el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero. Es decir, el método permite resolver sistemas compatibles determinados

Ejercicios

A. Se desea conocer el precio de 3 productos: café, trigo y maíz surtidos por un mismo proveedor. Se sabe que en la tienda A se pagan Bs. 58,70 por 8 kilos de café, 1 kg. de trigo y 2 kgs. de maíz. En la tienda B se pagan Bs. 60,70 por 5 kgs. de café, 7 de trigo y 3 de maíz y finalmente en la tienda C se pagan Bs. 19,70 por 2 kgs. de café, 1 de trigo y 2 de maíz. Basándose en esos datos, calculen los precios de los productos:

PASOS:

1. especificar el sistema de ecuaciones:

[5] $$\begin{aligned} 8c + 1t + 2m &= Bs.58,70 \\ 5c + 7t + 3m &= Bs.60,70 \\ 2c + 1t + 2m &= Bs.19,70 \end{aligned}$$

2. Expresar el sistema de ecuaciones en forma matricial:

Recordando las operaciones con matrices podemos escribir el sistema en **forma matricial** considerando que las incógnitas (c, t y m) y los términos independientes (58,70, 60,70 y 19,70) forman una matriz columna de orden $mx1$ y los coeficientes una matriz cuadrada de orden mxn:

[6] $$\begin{bmatrix} 8 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{mxn} \begin{bmatrix} c \\ t \\ m \end{bmatrix}_{mx1} = \begin{bmatrix} 58,70 \\ 60,70 \\ 19,70 \end{bmatrix}_{mx1}$$

Llamando a la matriz de los coeficientes A, al vector de las incógnitas X y al vector de los términos independientes B, se podría escribir [6] en notación matricial:

[7] $$\underset{3x3}{A} * \underset{3x1}{X} = \underset{3x1}{B}$$

Si se premultiplican ambos términos de [5] por la matriz inversa de A tenemos:

[8] $A^{-1} * (AX) = A^{-1} * B$; reordenando [8], resulta: $(A^{-1} * A)X = A^{-1} * B$

como $A^{-1} * A$ es igual a I, se puede escribir entonces $IX = A^{-1} * B$

Si se recuerda que la multiplicación de una matriz identidad por cualquier matriz es igual a misma matriz, resulta:

[9] $X = A^{-1} * B$

3. Transcriba los datos a una hoja en blanco de MS Excel

	A	B	C	D	E	F	G	H
17								
18								
19	**8**	**1**	**2**		**58,7**		**6,5**	
20	**5**	**7**	**3**		**60,72**		**3,3036**	
21	**2**	**1**	**2**		**19,7**		**1,6982**	
22								
23								

4. Sin deseleccionar el rango ***G19:G21***,hagan clic en la barra de fórmula y escriban:

- el signo **=**
- las siguientes funciones en este mismo orden: ***MMULT(MINVERSA(***

  Encontrarán estas funciones en:
  Clic ***Insertar*** **–** Clic ***Función*** – Clic categoría ***Matemáticas y Trigonometría***

- el argumento para calcular la **INVERSA** (entre paréntesis), es decir: el rango de la matriz formado por las incógnitas: (A19:C21);
- punto y coma
- escriban o seleccionen el rango de la matriz formada por los términos independientes: E19:E21
- cierren el paréntesis

  Si UD escribió la fórmula correctamente, la misma debe lucir así:

  fx =MMULT(MINVERSA(A19:C21);E19:E21)

5. Ahora mantengan oprimida las teclas *Shift+Ctrl* y toquen la tecla Enter para ejecutar la función.

Observen los precios en el rango previamente seleccionado. Los precios buscados son, respectivamente, los siguientes:

Productos	**Cantidades**
Café	Bs. 6,5
Trigo	Bs. 3,3
Maíz	Bs. 1,70

B. Dadas las ecuaciones IS y LM, se pide determinar: el nivel de equilibrio de ingresos y la tasa de interés:

$$IS = 0{,}30Y + 100i - 252 = 0$$
$$LM = 0{,}25Y - 200i - 178 = 0$$

en donde:

$Y =$ Ingreso
$i =$ tasa de interés

PASOS

1. Expresar el sistema de ecuaciones en forma matricial:

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 100 \\ 0{,}25 & -200 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} Y \\ i \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 252 \\ -176 \end{bmatrix}$$

2. Transcriba los datos a una hoja en blanco de MS Excel

	A	B	C	D	E	F	G	H
23								
24	**0,3**	**100**		**252**		**800**		
25	**0,25**	**-200**		**176**		**0,12**		
26								
27								

3. Sin deseleccionar el rango ***F24:F25***,hagan clic en la barra de fórmula y escriban:

- el signo **=**
- las siguientes funciones en este mismo orden: ***MMULT(MINVERSA(***

  Encontrarán estas funciones en:
  Clic ***Insertar*** **–** Clic ***Función*** – Clic categoría ***Matemáticas y Trigonometría***

- el argumento para calcular la **INVERSA** (entre paréntesis), es decir: el rango de la matriz formado por las incógnitas: (A24:B25)
- punto y coma
- escriba o seleccione el rango de la matriz formada por los términos independientes: D24:D25
- cierren el paréntesis

  Si UD escribió la fórmula correctamente, la misma debe lucir así:

  fx =MMULT(MINVERSA(A24:B25);D24:D25)

4. Ahora mantengan oprimida las teclas *Shift+Ctrl* y toquen la tecla Enter, para ejecutar la función.

   En equilibrio, **Y=800 e i=0,12**, tal como puede leerse en el cuadro inferior

Niveles de equilibrio	**Cantidades**
Ingresos	800
Tasa de interés	0,12