Universidad de Los Andes
Facultad de Ciencias Económicas y Sociales
Escuela de Economía
Departamento de Economía

Microeconomía II
José U. Mora Mora

Equilibrio General

Ejemplo 1.
Suponga una economía de dos bienes, X e Y, que existen en cantidades fijas e iguales a 30 y 30, respectivamente, y dos consumidores cuyas preferencias están representadas por $U_1 = 2x_1y_1$ y $U_2 = 4x_2y_2$. Suponga además que el consumidor 1 recibe una dotación inicial de 10 unidades del bien X y el consumidor 2 recibe 10 unidades del bien Y. Se pide:

1. Obtenga la curva de contrato (CC) y determine si la dotación inicial es ESP

$$\begin{aligned}
&TMS^1_{x_1,x_2} = -\tfrac{2y_1}{2x_1} = -\tfrac{y_1}{x_1}\\
&TMS^2_{x_1,x_2} = -\tfrac{4y_2}{4x_2} = -\tfrac{y_2}{x_2}\\
&CC: \qquad TMS^1_{x_1,x_2} = TMS^2_{x_1,x_2}\\
&\qquad\qquad -\tfrac{y_1}{x_1} = -\tfrac{y_2}{x_2}\\
&\qquad\qquad \tfrac{y_1}{x_1} = \tfrac{(30-y_1)}{(30-x_1)}
\end{aligned}$$

$$y_1 = x_1$$

La dotación inicial es eficiente en sentido paretiano (ESP) si se encuentra sobre la curva de contrato. Es decir, si las tasas marginales de sustitución entre los dos bienes para ambos consumidores son iguales. Entonces, si la dotación inicial se encuentra sobre la CC debe ser cierto que $y_1 = x_1$. El consumidor 1 recibe 10 unidades del bien X y 20 unidades del bien Y. De acuerdo con esta información $20 \neq 10$ (no se satisface la CC) y por tanto la dotación inicial no es ESP.

Otra forma de ver este problema es comparando las tasas marginales de sustitución en la dotación inicial. La CC implica

$$TMS^1_{x_1,x_2} = TMS^2_{x_1,x_2}$$

$$-\frac{y_1}{x_1} = -\frac{y_2}{x_2}$$

al sustituir se obtiene

$$-\frac{20}{10} \neq -\frac{10}{20}$$

o lo que es lo mismo

$$2 \neq \frac{1}{2}$$

y por tanto se concluye que la dotación inicial no es ESP.

2. Obtenga el núcleo de la economía

Se sabe que si los consumidores no están satisfechos con su dotación inicial (ésta no se encuentra sobre la CC), entonces existen posibilidades para que ambos se beneficien o al menos uno de ellos lo haga sin perjudicar al otro. En otras palabras, ambos negociarán hasta que se agoten todos los beneficios que se derivan del intercambio, es decir, hasta que consigan una asignación ESP. Esto es, el núcleo de una economía de intercambio consiste de todas aquellas asignaciones para las que $TMS^1_{x_1,x_2} = TMS^2_{x_1,x_2}$ entre los puntos que corresponden a la intersección de la CC con las curvas de indiferencia de cada uno de los consumidores, respectivamente. En otras palabras, no toda la CC corresponde al núcleo de la Economía.

Entonces, para conseguir el núcleo de la economía es necesario obtener, primero, las ecuaciones de las curvas de indiferencia que pasan por la dotación inicial mediante la sustitución de la misma en la función de utilidad respectiva. Esto se hace para cada consumidor de la siguiente manera:

Consumidor 1:

Si se evalúa la función de utilidad $U_1 = 2x_1y_1$ con la dotación inicial (10,20) para el consumidor 1 se tendría:

$U_1 = 2\,(10)\,(20) = 400.0$

y por tanto la ecuación de la curva de indiferencia del consumidor 1 evaluada en la dotación inicial vendría dada por:

$$2x_1y_1 = 400$$

Consumidor 2:

Si se evalúa la función de utilidad $U_2 = 4x_2y_2$ con la dotación inicial (20,10) para el consumidor 2 se tendría:

$U_2 = 4\,(20)\,(10) = 800.0$

y por tanto la ecuación de la curva de indiferencia del consumidor 2 evaluada en la dotación inicial vendría dada por:

$$4x_2y_2 = 800$$

Ahora, para obtener el límite inferior del núcleo se resuelve el sistema de ecuaciones que se forma con la curva de indiferencia de 1 y la CC:

$$\begin{aligned} 2x_1y_1 &= 400 \\ y_1 &= x_1 \end{aligned}$$

sustituyendo la segunda ecuación en la primera y resolviendo se obtiene:

$$2x_1^2 = 400$$

y cuya solución es $x_1^{\text{inf}} = 14.142 = y_1^{\text{inf}}$

Para obtener el límite superior del núcleo se resuelve el sistema de ecuaciones que se forma con la curva de indiferencia de 2 y la CC. Dado que la caja es cuadrada (30x30) entonces, la CC desde la perspectiva del consumidor 2 puede escribirse como $y_2 = x_2$. Entonces,

$$\begin{aligned} 4x_2y_2 &= 800 \\ y_2 &= x_2 \end{aligned}$$

sustituyendo la segunda ecuación en la primera y resolviendo se obtiene:

$$4x_2^2 = 800$$

y cuya solución es $x_2 = 14.142 = y_2$

desde la perspectiva del origen de 1, entonces, el límite superior del núcleo vendría formado por:

$x_1^{\text{sup}} = 30 - 14.142 = 15.\,858 = y_1^{\text{sup}}$

formalmente, el núcleo quedaría expresado de la siguiente manera:

$Nucleo = \{x_1, y_1 \subset X, Y/y_1 = x_1; 14.142 \leq x_1 \leq 15.858; 14.142 \leq x_2 \leq 15.858\}$

3. Obtenga las cantidades óptimas y los correspondientes precios relativos de equilibrio que maximizan la utilidad de cada uno de los consumidores.

Para obtener el equilibrio de esta economía de intercambio, cada consumidor debe resolver su problema de maximización de la utilidad sujeta a su restricción de presupuesto (que en este caso es igual al valor de su dotación inicial). El problema es que estos consumidores deben negociar y al hacerlo se forman unos precios relativos entre ambos bienes. Entonces, desde un punto de vista matemático, las incógnitas de este problema serían:

$x_1, y_1, x_2, y_2, p_x/p_y$

Seguidamente, se necesita formar un sistema de ecuaciones de al menos 5 ecuaciones para obtener la solución del mismo. Para formar el sistema se parte de las condiciones de primer obtenidas en la teoría del consumidor; es decir:

$$\begin{aligned} TMSx_1, y_1 &= p_x/p_y \\ p_x x_1 + p_y y_1 &= p_x \omega_1^x + p_y \omega_2^y \end{aligned}$$

Consumidor 1:

$$\frac{y_1}{x_1} = p_x/p_y \tag{1}$$

$$p_x x_1 + p_y y_1 = 10p_x + 20p_y \tag{2}$$

Consumidor 2:

$$\frac{y_2}{x_2} = p_x/p_y \tag{3}$$

$$p_x x_2 + p_y y_2 = 20p_x + 10p_y \tag{4}$$

Factibilidad:

$$x_1 + x_2 = 30 \tag{5}$$

$$y_1 + y_2 = 30 \tag{6}$$

Dado que el objetivo es obtener las cantidades consumidas de cada bien, x_1, y_1, x_2, y_2, y los precios relativos de ambos bienes, p_x/p_y, supóngase que el precio de Y es la unidad, $p_y = 1$. Seguidamente, de la ecuación (1) se despeja y_1 y se sustituye en la ecuación (2) y de ésta se despeja x_1 para obtener:

$$x_1 = \frac{10p_x + 20}{2p_x} \tag{7}$$

Se realiza el mismo procedimiento para las ecuaciones (3) y (4):

$$x_2 = \frac{20p_x + 10}{2p_x} \tag{8}$$

Luego, se sustituyen las ecuaciones (7) y (8) en la ecuación (5)

$$\frac{10p_x + 20}{2p_x} + \frac{20p_x + 10}{2p_x} = 30$$

que al simplificar y despejar, resulta en $p_x = 1$

Este resultado, al sustituirse nuevamente en las ecuaciones (7) y (8), arrojaría:

$$x_1 = 15 = x_2$$

Finalmente y de acuerdo con las ecuaciones (1) y (3) se obtendrían los siguientes resultados:

$$y_1 = 15 = y_2$$

Ejemplo 2. Suponga una economía que tiene un *stock* de capital constante ($K = 20$) y una fuerza laboral constante ($L = 30$) y con los que se producen dos bienes, X e Y, mediante los siguientes procesos de producción: $X = K_x^{1/2} L_x^{1/2}$ y $Y = K_y^{1/3} L_y^{1/3}$. Se pide:

1. Obtenga la ecuación de la curva de contrato en producción (CCP).

$$CC = \left\{ (K_x, L_x) \in K, L / TMST_{L,K}^X = TMST_{L,K}^Y, X \neq Y \right\}$$

Entonces,

$$TMST_{L,K}^X = -\frac{\partial X/\partial L}{\partial X/\partial K} = -\frac{\frac{1}{2}K_x^{1/2}L_x^{-1/2}}{\frac{1}{2}K_x^{-1/2}L_x^{1/2}} = -\frac{K_x}{L_x}$$
$$TMST_{L,K}^Y = -\frac{\partial Y/\partial L}{\partial Y/\partial K} = -\frac{\frac{1}{3}K_y^{1/3}L_y^{-2/3}}{\frac{1}{3}K_y^{-2/3}L_y^{1/3}} = -\frac{K_y}{L_y}$$

$$TMST_{L,K}^X = TMST_{L,K}^Y \quad \Longrightarrow \quad -\frac{K_x}{L_x} = -\frac{K_y}{L_y}$$

Haciendo uso de las condiciones de factibilidad

$$\frac{K_x}{L_x} = \frac{(20-K_x)}{(30-L_x)}$$

$$K_x = \frac{2}{3} L_x$$

o también

$$\frac{K_y}{L_y} = \frac{(20-K_y)}{(30-L_y)}$$

$$K_y = \frac{2}{3} L_y$$

2. Determine la ecuación de la frontera de posibilidades de producción (FPP).

Para obtener la FPP se sustituye el resultado obtenido en el ítem 1 en las funciones de producción y los resultados obtenidos se sustituyen en las condiciones de factibilidad.

$$X = \left(\tfrac{2}{3}L_x\right)^{1/2} L_x^{1/2} \quad \Longrightarrow \quad X = \tfrac{1}{3}\sqrt{2}\sqrt{3}L_x$$
$$X = 0.816\,497\,L_x \quad \Longrightarrow \quad L_x = 1.\,224\,74X$$
$$Y = \left(\tfrac{2}{3}L_y\right)^{1/3} L_y^{1/3} \quad \Longrightarrow \quad Y = \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{6}L_y^{2/3}$$
$$Y = 0.87358 L_y^{2/3} \quad \Longrightarrow \quad L_y = \left(\tfrac{1}{0.87358}\right)^{3/2} Y^{3/2}$$
$$L_y = 1.\,224\,75 Y^{3/2}$$

$$L_x + L_y = 30 \quad \Longrightarrow \quad 1.\,224\,74X + 1.\,224\,75Y^{3/2} = 30$$

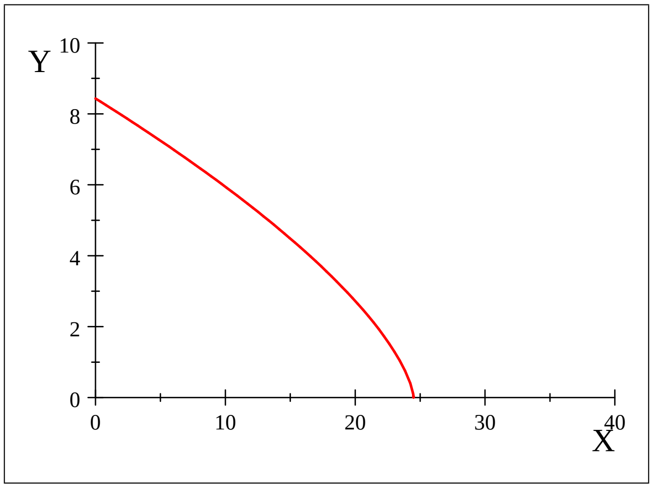
$$Y^{3/2} = \frac{30 - 1.\,224\,75X}{1.\,224\,75} \quad \Longrightarrow \quad Y = (24.495 - X)^{2/3}$$

3. Obtenga la $TMT_{X,Y}$ y determine si la $|TMT_{X,Y}|$ aumenta cuando aumenta X.

$$TMT_{X,Y} = \frac{dY}{dX} = -\frac{0.666\,667}{\sqrt[3]{24.\,495 - 1.0X}} = -\frac{2}{3}(24.495 - X)^{-1/3}$$
$$\frac{d\left|-\frac{2}{3}(24.495-X)^{-1/3}\right|}{dX} = -(-1)\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)(24.495 - X)^{-4/3} = \frac{0.222\,222}{(24.495-X)^{4/3}}$$

La TMT aumenta en valor absoluto cuando X aumenta, siempre que $X < 24.495$

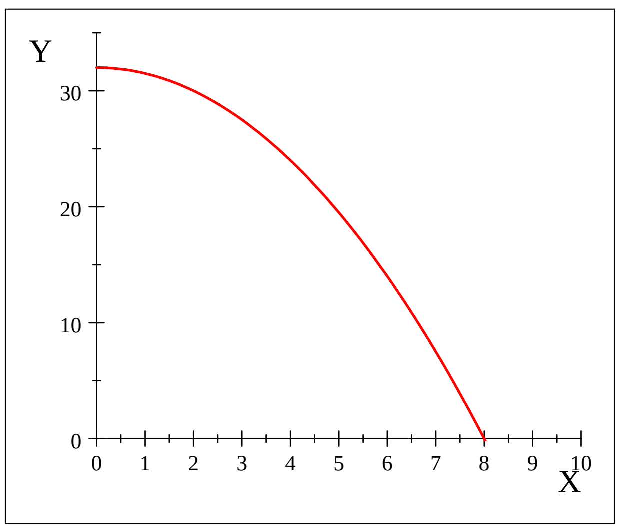
4. Represente la FPP gráficamente.



Ejemplo 3.
Suponga una economía que produce dos bienes X e Y con cantidades fijas de factores. La frontera de posibilidades de producción (FPP) está representada por: $X^2 + 2Y = 64$. Si la función de bienestar social está representada por $W = 2X^{1/2}Y^{1/2}$, se pide:

1. Obtener la tasa marginal de transformación. Demuestre que la $|TMT_{X,Y}|$ aumenta cuando aumenta X.

La TMT es la pendiente de la frontera de posibilidades de producción. Entonces, gráficamente la frontera de posibilidades de producción tendría la siguiente forma $Y = 32 - \frac{1}{2}X^2$ (que se obtiene al despejar Y de la FPP)



Entonces, como la $TMT_{X,Y} = \frac{dY}{dX}$ se procede a tomar la derivada de la FPP: $Y = 32 - \frac{1}{2}X^2$

$TMT_{X,Y} = \frac{dY}{dX} = -X$

$TMT_{X,Y} = -X$

Obsérvese en el gráfico que a medida que aumenta X, la FPP se hace más inclinada lo cual quiere decir que su pendiente aumenta en valor absoluto. Por tanto es de esperar que la $\frac{d|TMT_{X,Y}|}{dX} > 0$. La prueba de lo que se acaba de decir se muestra a continuación:

$|TMT_{X,Y}| = X$ y por tanto $\frac{d|TMT_{X,Y}|}{dX} = 1 > 0$.

2. Obtener la respectiva tasa marginal de sustitución. Demuestre que la $|TMS_{X,Y}|$ disminuye cuando aumenta X.

$TMS_{X,Y} = -\frac{UMa_X}{UMa_Y} = -\frac{Y}{X}$
el valor absoluto de la $TMS_{X,Y}$ vendría dado por: $|TMS_{X,Y}| = \frac{Y}{X}$
y por tanto: $\frac{d|TMS_{X,Y}|}{dX} = -YX^{-2} = -\frac{Y}{X^2} < 0$
Este resultado quiere decir que cuando X aumenta la Curva de Indiferencia de Bienestar Social se hace más plana ya que su pendiente disminuye.

3. Obtener las cantidades óptimas de X e Y que maximizan el bienestar social.

El problema de esta sociedad consiste en determinar cuánto se producirá de cada uno de los bienes empleando los factores fijos que posee. Matemáticamente, el problema puede formularse de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ll} & Max\ 2X^{1/2}Y^{1/2} \\ \text{sujeto a:} & X^2 + 2Y = 64 \end{array}$$

Dado que éste es un problema de optimización restringida, se puede resolver mediante la técnica de los Multiplicadores de Lagrange. De acuerdo con ésto, el Lagrangiano quedaría de la siguiente manera:

$$L = 2X^{1/2}Y^{1/2} + \mu\left(64 - X^2 - 2Y\right)$$

Las condiciones de primer orden para el máximo vienen dadas por las siguientes 3 ecuaciones:

$$\frac{\partial L}{\partial X} = X^{-1/2}Y^{1/2} - 2\mu X = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y} = X^{1/2}Y^{-1/2} - 2\mu = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = 64 - X^2 - 2Y = 0$$

Obsérvese que de las 2 primeras ecuaciones se obtiene el siguiente resultado:

$$\frac{X^{-1/2}Y^{1/2}}{X^{1/2}Y^{-1/2}} = \frac{2\mu X}{2\mu}$$

de donde, después de simplificar, se obtiene:

$$Y = X^2$$

este resultado se sustituye en la tercera ecuación:

$$64 - X^2 - 2\left(X^2\right) = 0$$

y se despeja $X = 4.618\,8$
que al sustituirse nuevamente en $Y = X^2$ se obtiene: $Y = (4.6188)^2 = 21.\,333$

4. Calcular P_X/P_Y.

Dado que en equilibrio, la sociedad debe hacerlo a la TMS, entonces, los precios relativos se obtienen a partir de la condición de equilibrio en el consumo:

$$\begin{aligned} TMS_{X,Y} &= P_X/P_Y \\ \frac{Y}{X} &= \frac{P_X}{P_Y} \end{aligned}$$

sustityendo los valores de X e Y y haciendo $P_Y = 1$, se obtiene:
$P_X = \frac{Y}{X} = \frac{21.3333}{4.6188} = 4.618\,8$

5. Represente el problema gráficamente.

Para construir el gráfico se necesitan las siguientes ecuaciones:

FPP: $Y = 32 - \frac{1}{2}X^2$

Curva de Indiferencia de Bienestar Social. Ésta se obtiene al sustituir las cantidades de X e Y en la función $W = 2X^{1/2}Y^{1/2}$ para obtener el nivel del bienestar social de equilibrio. Los pasos se muestran a continuación:

$2\,(4.6188)^{1/2}\,(21.333)^{1/2} = 19.853 \qquad \Rightarrow 2X^{1/2}Y^{1/2} = 19.853$

y se despeja Y:

$Y = \frac{394\,141\,609}{4000\,000X}$

La recta de precios relativos

$Y = 42.666 - 4.618\,8X$