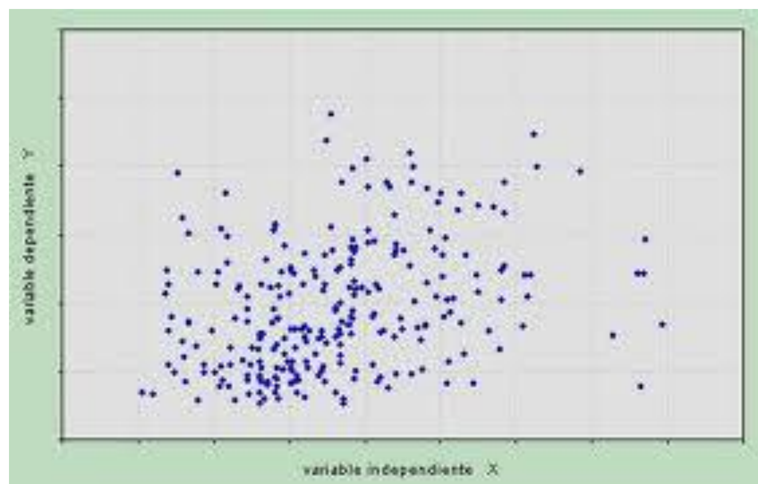
TEMA II

Análisis de Regresión Simple Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO)



Prof. Samaria Muñoz

MODELO SIMPLE LINEAL DE REGRESIÓN (MSLR)

*Es un modelo que incluye sólo una variable exógena en el modelo (X).

*La forma funcional que representa la relación con la variable endógena *es lineal en los parámetros.*

* Los parámetros son estimados a través del análisis de regresión.

VENTAJAS DE UTILIZAR MLR:

a) Son fáciles de interpretar.

b) Están apoyados por la estadística y la matemática.

c) En intervalos pequeños siempre es posible representar cualquier regresión en forma lineal.

d) Muchos modelos que no son lineales son linealizables.

$$Y_i = 2500 + 100x - x^2$$

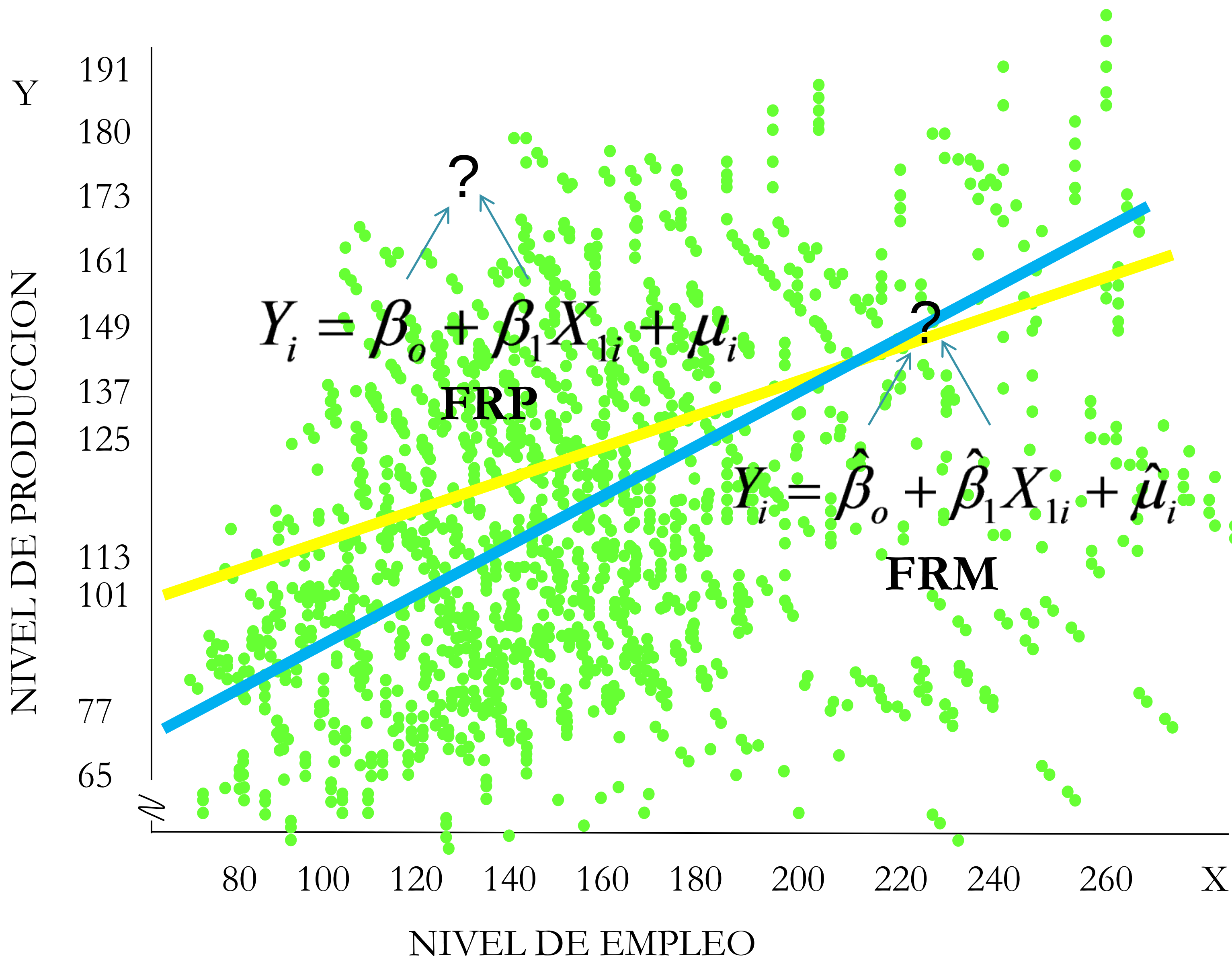
$$Y_i = f(x)$$

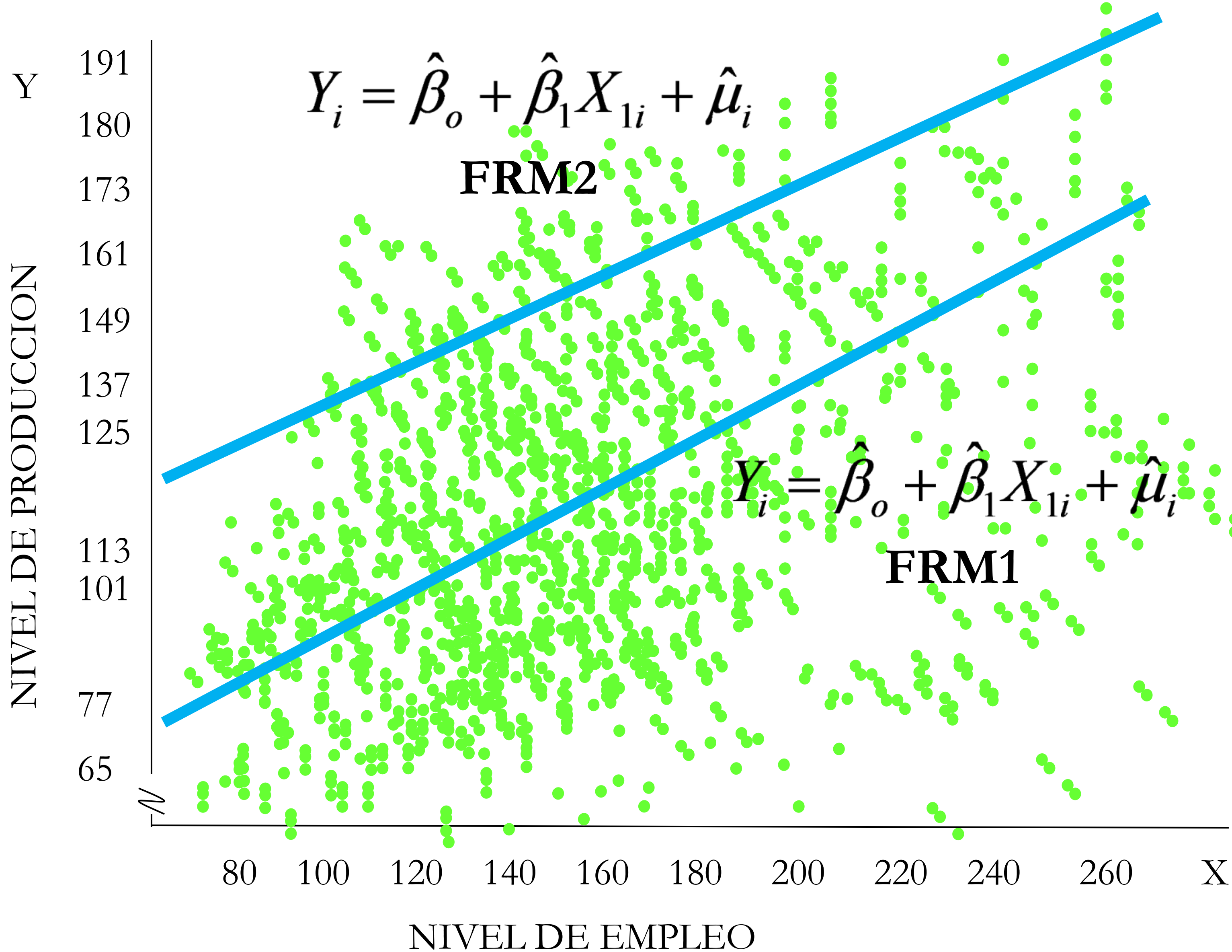
x	y
0	2500
20	4100
50	5000
100	2500

$$Y_i = 2500 + 100x - x^2 + \mu$$

$$\mu = \pm 500$$

x	y
0	2000 o 3000
20	3600 o 4600
50	4500 o 5500
100	2000 o 3000


Y
191
180
173
161
149
137
125
113
101
77
65
NIVEL DE PRODUCCION
80
100
120
140
160
180
200
220
240
260
X
NIVEL DE EMPLEO
?
$Y_i = \beta_o + \beta_1 X_{1i} + \mu_i$
FRP
?
$Y_i = \hat{\beta}_o + \hat{\beta}_1 X_{1i} + \hat{\mu}_i$
FRM



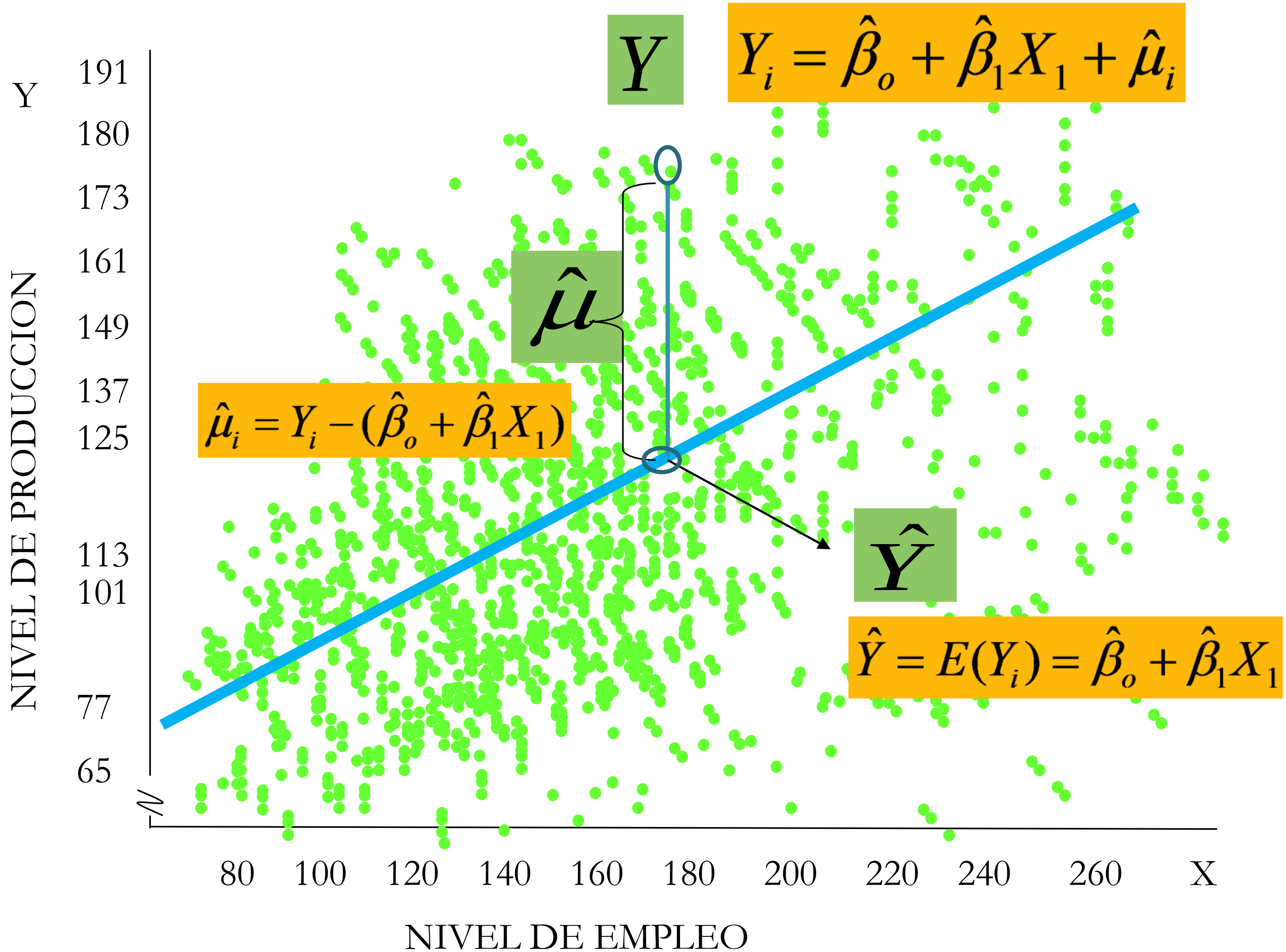
Prof. Samaria Muñoz

ESTIMACIÓN DE UN MODELO SIMPLE DE REGRESIÓN

$$Y_i = \hat{\beta}_o + \hat{\beta}_1 X_1 + \hat{\mu}_i$$

CRITERIO A UTILIZAR PARA ENCONTRAR LA FRM ADECUADA:

SELECCIONAR LA FRM DE TAL MANERA QUE SE MINIMICEN LAS PERTURBACIONES ALEATORIAS.


Y
191
180
173
161
149
137
125
113
101
77
65
NIVEL DE PRODUCCION
80 100 120 140 160 180 200 220 240 260 X
NIVEL DE EMPLEO
Y
$Y_i = \hat{\beta}_o + \hat{\beta}_1 X_1 + \hat{\mu}_i$
$\hat{\mu}$
$\hat{\mu}_i = Y_i - (\hat{\beta}_o + \hat{\beta}_1 X_1)$
$\hat{Y}$
$\hat{Y} = E(Y_i) = \hat{\beta}_o + \hat{\beta}_1 X_1$

ESTIMACIÓN DE UN MODELO SIMPLE DE REGRESIÓN

$$\sum \hat{\mu} = 0$$

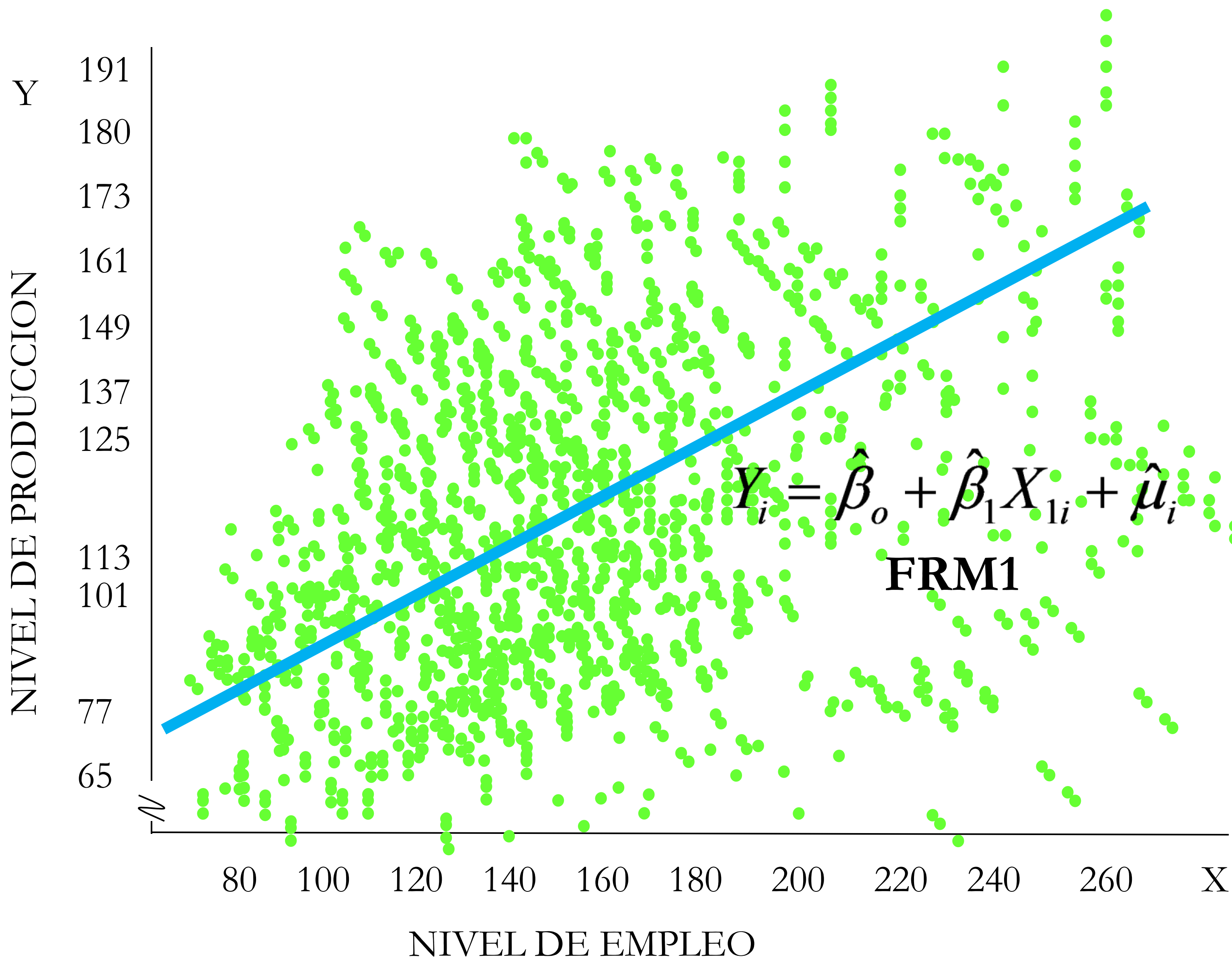
En el criterio de minimizar la sumatoria de los errores, todos los errores reciben el mismo peso, aunque algunos estén más lejos que otros y se anulan entre si..

Y_i	X_i
4	1
5	4
7	5
12	6

MÉTODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS ORDINARIOS

Permite ajustar la línea recta optima a la muestra de las observaciones de "Y" y "X".

Consiste en encontrar el valor de los parámetros que minimizan la suma de los errores al cuadrado.


Y
191
180
173
161
149
137
125
113
101
77
65
NIVEL DE PRODUCCION
80
100
120
140
160
180
200
220
240
260
X
NIVEL DE EMPLEO
$Y_i = \hat{\beta}_o + \hat{\beta}_1 X_{1i} + \hat{\mu}_i$
FRM1

MÉTODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS ORDINARIOS

SIMPLE
LENGUAJE COMUN
ESTIMADORES MELI

MÉTODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS ORDINARIOS

$$Y_i = \hat{Y} + \hat{\mu}_i$$

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_o + \hat{\beta}_1 X_1 = E(Y_i)$$

$$Y_i = \hat{\beta}_o + \hat{\beta}_1 X_1 + \hat{\mu}_i$$

$$\hat{\mu}_i = Y_i - \hat{Y}$$

$$\hat{\mu}_i = Y_i - (\hat{\beta}_o + \hat{\beta}_1 X_1)$$

$$\hat{\mu}_i = Y_i - \hat{\beta}_o - \hat{\beta}_1 X_1$$

$$\hat{\mu}_i = Y_i - \hat{\beta}_o - \beta_1 X_1$$

$$\Sigma\hat{\mu}_i^2 = \Sigma(Y_i - \hat{\beta}_o - \hat{\beta}_1 X_{1i})^2$$

$$\partial\Sigma\hat{\mu}_i^2 \Big/ \hat{\beta}_o = 2\Sigma(Y_i - \hat{\beta}_o - \hat{\beta}_1 X_{1i})(-1) = 0$$

$$-2\Sigma(Y_i - \hat{\beta}_o - \hat{\beta}_1 X_{1i}) = 0 \qquad \text{A}$$

$$\partial\Sigma\hat{\mu}_i^2 \Big/ \hat{\beta}_1 = 2\Sigma(Y_i - \hat{\beta}_o - \hat{\beta}_1 X_{1i})(-X_{1i}) = 0$$

$$-2\Sigma(Y_i - \hat{\beta}_o - \hat{\beta}_1 X_{1i})(X_{1i}) = 0 \qquad \text{B}$$

MÉTODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS ORDINARIOS

$$-2\Sigma(Y_i - \hat{\beta}_o - \hat{\beta}_1 X_{1i}) = 0 \quad \text{A}$$

$$-2\Sigma(Y_i - \hat{\beta}_o - \hat{\beta}_1 X_{1i})(X_{1i}) = 0 \quad \text{B}$$

Eliminando el -2

$$\Sigma(Y_i - \hat{\beta}_o - \hat{\beta}_1 X_{1i}) = 0$$

$$\Sigma(Y_i - \hat{\beta}_o - \hat{\beta}_1 X_{1i})(X_{1i}) = 0$$

MÉTODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS ORDINARIOS

$$\Sigma(Y_i - \hat{\beta}_o - \hat{\beta}_1 X_{1i}) = 0$$

$$\Sigma(Y_i - \hat{\beta}_o - \hat{\beta}_1 X_{1i})(X_{1i}) = 0$$

Aplicando la sumatoria

$$\Sigma Y_i - \Sigma\hat{\beta}_o - \hat{\beta}_1 \Sigma X_{1i} = 0$$

$$\Sigma Y_i X_{1i} - \hat{\beta}_o \Sigma X_{1i} - \hat{\beta}_1 \Sigma X_{1i}^{\ 2} = 0$$

MÉTODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS ORDINARIOS

$$\Sigma Y_i - \Sigma\hat{\beta}_o - \hat{\beta}_1 \Sigma X_{1i} = 0$$

$$\Sigma Y_i X_{1i} - \hat{\beta}_o \Sigma X_{1i} - \hat{\beta}_1 \Sigma X_{1i}{}^2 = 0$$

$$\Sigma Y_i - n\hat{\beta}_o - \hat{\beta}_1 \Sigma X_{1i} = 0$$

$$\Sigma Y_i X_{1i} - \hat{\beta}_o \Sigma X_{1i} - \hat{\beta}_1 \Sigma X_{1i}{}^2 = 0$$

MÉTODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS ORDINARIOS

$$\Sigma Y_i - n\hat{\beta}_o - \hat{\beta}_1 \Sigma X_{1i} = 0$$

$$\Sigma Y_i X_{1i} - \hat{\beta}_o \Sigma X_{1i} - \hat{\beta}_1 \Sigma X_{1i}{}^2 = 0$$

PASANDO LOS TERMINOS QUE ACOMPAÑAN A LOS PARAMETROS AL LADO DERECHO DE LA ECUACION

$$\Sigma Y_i = n\hat{\beta}_o + \hat{\beta}_1 \Sigma X_{1i}$$

$$\Sigma Y_i X_{1i} = \hat{\beta}_o \Sigma X_{1i} + \hat{\beta}_1 \Sigma X_{1i}{}^2$$

ECUACIONES NORMALES

MÉTODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS ORDINARIOS

Cálculo de:

$$\hat{\beta}_1$$

MÉTODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS ORDINARIOS

$$\left\{\begin{array}{l} \Sigma Y_i = n\hat{\beta}_o + \hat{\beta}_1 \Sigma X_{1i} \\ \Sigma Y_i X_{1i} = \hat{\beta}_o \Sigma X_{1i} + \hat{\beta}_1 \Sigma X_{1i}{}^2 \end{array}\right.$$

ΣX_{1i}

$= n$

$$\Sigma Y_i \Sigma X_{1i} = n\hat{\beta}_o \Sigma X_{1i} + \hat{\beta}_1 (\Sigma X_{1i})^2 \qquad 1$$

$$n\Sigma Y_i X_{1i} = n\hat{\beta}_o \Sigma X_{1i} + n\hat{\beta}_1 \Sigma X_{1i}{}^2 \qquad 2$$

MÉTODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS ORDINARIOS

2-1

0

$$\Sigma Y_i \Sigma X_{1i} = n\hat{\beta}_o \Sigma X_{1i} + \hat{\beta}_1 (\Sigma X_{1i})^2 \qquad 1$$

$$n\Sigma Y_i X_{1i} = n\hat{\beta}_o \Sigma X_{1i} + n\hat{\beta}_1 \Sigma X_{1i}{}^2 \qquad 2$$

$$n\Sigma Y_i X_{1i} - \Sigma Y_i \Sigma X_{1i} = n\hat{\beta}_1 \Sigma X_{1i}{}^2 - \hat{\beta}_1 (\Sigma X_{1i})^2$$

$$n\Sigma Y_i X_{1i} - \Sigma Y_i \Sigma X_{1i} = \hat{\beta}_1 \left(n\Sigma X_{1i}{}^2 - (\Sigma X_{1i})^2 \right)$$

MÉTODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS ORDINARIOS

$$n\Sigma Y_i X_{1i} - \Sigma Y_i \Sigma X_{1i} = \hat{\beta}_1 \left(n\Sigma X_{1i}{}^2 - (\Sigma X_{1i})^2 \right)$$

$$\frac{n\Sigma Y_i X_{1i} - \Sigma Y_i \Sigma X_{1i}}{n\Sigma X_{1i}{}^2 - (\Sigma X_{1i})^2} = \hat{\beta}_1$$

$$\frac{\Sigma(X_{1i} - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\Sigma(X_{1i} - \bar{X})^2} = \hat{\beta}_1$$

$$\frac{\Sigma(x_{1i})(y_i)}{\Sigma(x_{1i})^2} = \hat{\beta}_1$$

MÉTODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS ORDINARIOS

Cálculo de:

$$\hat{\beta}_0$$

MÉTODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS ORDINARIOS

$$\Sigma Y_i = n\hat{\beta}_o + \hat{\beta}_1 \Sigma X_{1i}$$

$$\Sigma Y_i X_{1i} = \hat{\beta}_o \Sigma X_{1i} + \hat{\beta}_1 \Sigma X_{1i}{}^2 =$$

Tomado de nuevo las ecuaciones normales

MÉTODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS ORDINARIOS

$$\Sigma Y_i = n\hat{\beta}_o + \hat{\beta}_1 \Sigma X_{1i}$$

/n

$$\frac{\Sigma Y_i}{n} = \frac{n\hat{\beta}_o}{n} + \frac{\hat{\beta}_1 \Sigma X_{1i}}{n}$$

$$\bar{Y}_i = \hat{\beta}_o + \hat{\beta}_1 \bar{X}_{1i}$$

MÉTODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS ORDINARIOS

$$\overline{Y}_i = \hat{\beta}_o + \hat{\beta}_1 \overline{X}_{1i}$$

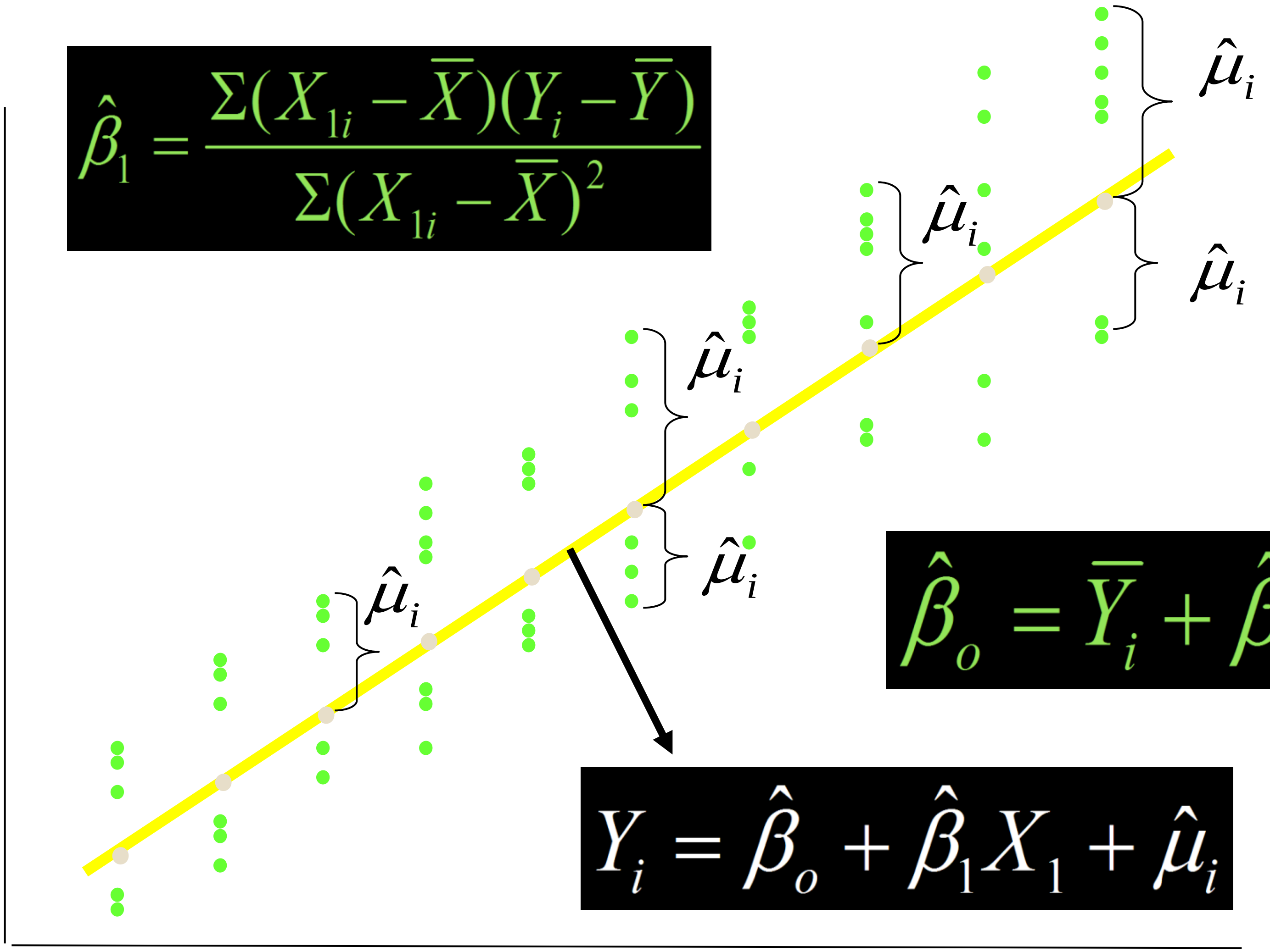
Despejando

$$\hat{\beta}_o = \overline{Y}_i + \hat{\beta}_1 \overline{X}_{1i}$$

$$\hat{\beta}_o = \frac{\Sigma X_{i1}^2 \Sigma Y_i - \Sigma X_i \Sigma X_i Y_i}{n\Sigma X_i^2 - (X_i)^2}$$

ESTIMADORES MCO

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\Sigma(X_{1i} - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\Sigma(X_{1i} - \bar{X})^2}$$



$$\hat{\beta}_o = \bar{Y}_i + \hat{\beta}_1 \bar{X}_{1i}$$

$$Y_i = \hat{\beta}_o + \hat{\beta}_1 X_1 + \hat{\mu}_i$$

EJEMPLO

$$Y_i = 11180{,}246 - 95{,}436 X_{1i} + \hat{\mu}$$

- Y= Cantidades demandas de TV
- X= Precio de TV.
- El punto de corte nos indica el valor de la demanda de televisores si el precio fuese nulo.
- La pendiente es la disminución que, en terminos medios, experimento la cantidad demandada de televisores ante un incremento unitario en el precio de los mismo.
- La demanda de televisores disminuyó en 95,35 unidades, cuando el precio se incrementó en una unidad.