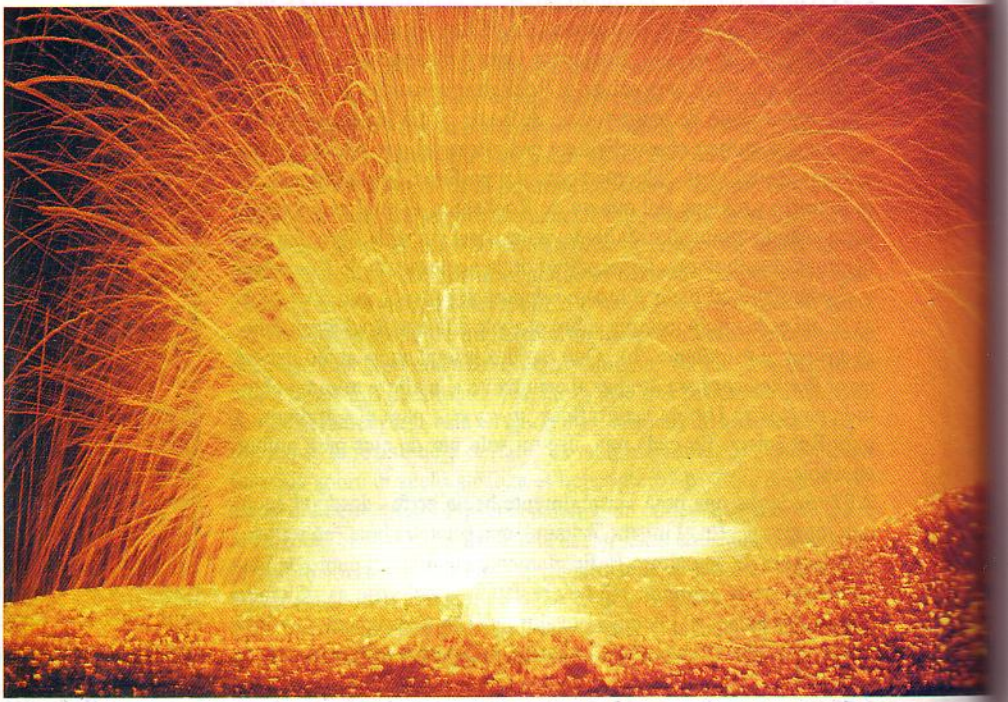
3 MOVIMIENTO EN DOS O TRES DIMENSIONES

Se da un espectacular ejemplo de movimiento cuando un volcán arroja fragmentos de roca al aire. Tales erupciones se deben a la liberación repentina de gas a alta presión del interior del magma (roca fundida bajo la superficie). Los fragmentos expulsados, llamados tefra, alcanzan el tamaño de una casa y salen despedidos del volcán con rapideces de cientos de metros por segundo.



? Si todos los fragmentos son expulsados con la misma rapidez, ¿con qué ángulo de expulsión caen más lejos del volcán?

Cuando un bate golpea a una pelota de béisbol, ¿qué determina dónde cae? ¿Cómo describimos el movimiento de un carro de montaña rusa en una curva o el vuelo de un halcón alrededor de un campo abierto? Si lanzamos un globo lleno de agua horizontalmente desde una ventana, ¿tardará más tiempo en tocar la acera que si sólo lo dejamos caer?

No podemos contestar estas preguntas usando las técnicas del capítulo 2, donde las partículas se movían sólo en línea recta. Tenemos que enfrentar el hecho de que el mundo es tridimensional. Para entender el vuelo curvo de una pelota de béisbol, la órbita de un satélite o la trayectoria de un proyectil, necesitamos extender nuestras descripciones del movimiento a situaciones en 2 y 3 dimensiones. Usaremos aún las cantidades vectoriales de desplazamiento, velocidad y aceleración, pero ahora tendrán dos o tres componentes y no estarán todas en una misma línea. Veremos que muchos movimientos, importantes e interesantes, se dan en sólo 2 dimensiones, es decir, en un *plano*, y pueden describirse con dos coordenadas y dos componentes de velocidad y aceleración.

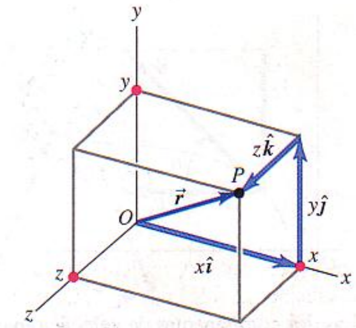
También necesitamos considerar cómo describen el movimiento de una partícula observadores diferentes que se mueven unos respecto a otros. El concepto de *velocidad relativa* desempeñará un papel importante más adelante en este libro, cuando estudiemos colisiones, donde exploraremos los fenómenos electromagnéticos, y cuando presentemos la teoría especial de la relatividad de Einstein.

En este capítulo fusionamos el lenguaje de vectores que aprendimos en el capítulo 1 con el lenguaje de la cinemática del capítulo 2. Como anteriormente, nos interesa describir el movimiento, no analizar sus causas, pero el lenguaje que aprenderemos aquí resultará indispensable después cuando usemos las leyes del movimiento de Newton para estudiar la relación entre fuerza y movimiento.

3.1 | Vectores de posición y velocidad

Para describir el *movimiento* de una partícula en el espacio, primero hay que poder describir su *posición*. Consideremos una partícula que está en el punto P en cierto instante. El **vector de posición** $\vec{r}$ de la partícula es un vector que va del origen del sistema de coordenadas a P (Fig. 3.1). La figura también muestra que las coordenadas cartesianas x, y y z de P son las componentes x, y y z de $\vec{r}$. Usando los vectores unitarios que presentamos en la sección 1.9, podemos escribir

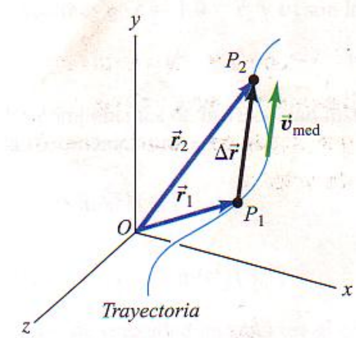
$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k} \tag{3.1}$$



3.1 El vector de posición $\vec{r}$ del origen al punto P tiene componentes x, y y z.

Al moverse la partícula en el espacio, el camino que sigue es en general una curva (Fig. 3.2). Durante un intervalo de tiempo Δt, la partícula se mueve de P_1, donde su vector de posición es $\vec{r}_1$, a P_2, donde su vector de posición es $\vec{r}_2$. El cambio de posición (desplazamiento) durante este intervalo es $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1)\hat{\imath} + (y_2 - y_1)\hat{\jmath} + (z_2 - z_1)\hat{k}$. Definimos la **velocidad media** $\vec{v}_{\text{med}}$ durante este intervalo igual que en el capítulo 2 para movimiento rectilíneo, como el desplazamiento dividido entre el intervalo de tiempo:

$$\vec{v}_{\text{med}} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad \text{(vector velocidad media)} \tag{3.2}$$



3.2 La velocidad media $\vec{v}_{\text{med}}$ entre los puntos P_1 y P_2 tiene la misma dirección que el desplazamiento $\Delta\vec{r}$.

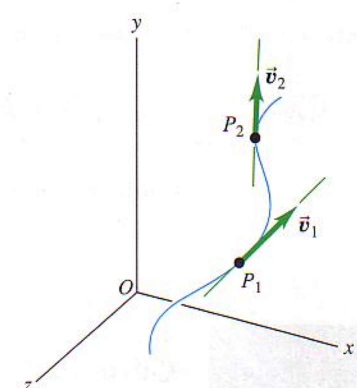
Observe que *dividir* un vector entre un escalar es un caso especial de *multiplicar* un vector por un escalar, lo cual vimos en la sección 1-7; la velocidad media $\vec{v}_{\text{med}}$ es igual al vector de desplazamiento $\Delta\vec{r}$ multiplicado por $1/\Delta t$, el recíproco del intervalo. Cabe señalar también que la componente x de la ecuación (3.2) es $v_{\text{med-}x} = (x_2 - x_1)/(t_2 - t_1) = \Delta x/\Delta t$. Esto no es más que la ecuación (2.2), la expresión para la velocidad media en una dimensión, que dedujimos en la sección 2.1.

Definimos la **velocidad instantánea** igual que en el capítulo 2; como el límite de la velocidad media cuando el intervalo de tiempo se acerca a 0, y es la tasa instantánea de cambio de posición con el tiempo. La diferencia clave es que tanto la posición $\vec{r}$ como la velocidad instantánea $\vec{v}$ ahora son vectores:

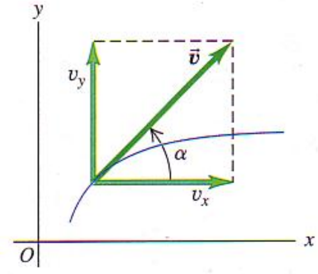
$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \text{(vector velocidad instantánea)} \tag{3.3}$$

La *magnitud* del vector $\vec{v}$ en cualquier instante es la *rapidez* v de la partícula en ese instante. La *dirección* de $\vec{v}$ en cualquier instante es la dirección en que se mueve la partícula en ese instante.

Conforme $\Delta t \to 0$, P_1 y P_2 de la figura 3.2 se juntan cada vez más. En el límite, $\Delta\vec{r}$ se hace tangente a la curva. La dirección de $\Delta\vec{r}$ en el límite es también la dirección de la velocidad instantánea $\vec{v}$. Esto conduce a una conclusión importante: *en todo punto de la trayectoria, el vector velocidad instantánea es tangente a la trayectoria* (Fig. 3.3).



3.3 La velocidad instantánea $\vec{v}$ es tangente a la trayectoria en cada punto. Aquí, $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son las velocidades instantáneas en los puntos P_1 y P_2, como se muestra en la figura 3.2.



3.4 Las dos componentes de velocidad para movimiento en el plano *xy*.

Suele ser más fácil calcular el vector velocidad instantánea empleando componentes. Durante cualquier desplazamiento $\Delta\vec{r}$, los cambios Δx, Δy y Δz en las tres coordenadas de la partícula son las *componentes* de $\Delta\vec{r}$. Por tanto, las componentes v_x, v_y y v_z de la velocidad instantánea $\vec{v}$ son simplemente las derivadas de x, y y z respecto a t. Es decir,

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v_y = \frac{dy}{dt} \qquad v_z = \frac{dz}{dt} \tag{3.4}$$

(componentes de la velocidad instantánea)

La componente x de $\vec{v}$ es $v_x = dx/dt$, que es la ecuación (2.3): la expresión para la velocidad instantánea en movimiento rectilíneo que obtuvimos en la sección 2.2. Por tanto, la ecuación (3.4) es una extensión directa de la idea de velocidad instantánea al movimiento en tres dimensiones.

Podemos obtener este mismo resultado derivando la ecuación (3.1). Los vectores unitarios $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, y $\hat{k}$ tienen magnitud y dirección constantes, así que sus derivadas son cero; entonces,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dz}{dt}\hat{k} \tag{3.5}$$

Esto muestra otra vez que las componentes de $\vec{v}$ son dx/dt, dy/dt y dz/dt.

La magnitud del vector de velocidad instantánea $\vec{v}$ —esto es, la rapidez— está dada en términos de las componentes v_x, v_y y v_z aplicando el teorema de Pitágoras

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \tag{3.6}$$

La figura 3.4 muestra la situación cuando la partícula se mueve en el plano xy. Aquí, z y v_z son cero, y la rapidez (la magnitud de $\vec{v}$) es

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

y la dirección de la velocidad instantánea $\vec{v}$ está dada por el ángulo α de la figura. Vemos que

$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x} \tag{3.7}$$

(Siempre usamos letras griegas para los ángulos. Usamos α para la dirección de la velocidad instantánea a fin de evitar confusiones con la dirección θ del vector de *posición* de la partícula.)

El vector velocidad instantánea suele ser más interesante y útil que el de la velocidad media. En adelante, al usar el término "velocidad", siempre nos referiremos al vector velocidad instantánea $\vec{v}$ (no al vector velocidad media). Usualmente ni nos molestaremos en llamar vector a $\vec{v}$, el lector debe recordar que la velocidad es una cantidad vectorial con magnitud y dirección.

Ejemplo 3.1 Cálculo de velocidad media e instantánea

Se está usando un carrito robot para explorar la superficie de Marte. El módulo de descenso es el origen de coordenadas y la superficie marciana circundante está en el plano xy. El carrito, que representamos como un punto, tiene coordenadas x y y que varían con el tiempo según

$$x = 2.0\ \text{m} - (0.25\ \text{m/s}^2)t^2$$
$$y = (1.0\ \text{m/s})t + (0.025\ \text{m/s}^3)t^3$$

a) Obtenga las coordenadas del carrito y su distancia respecto al módulo en $t = 2.0$ s. b) Obtenga los vectores de desplazamiento y velocidad media del carrito entre $t = 0.0$ s y $t = 2.0$ s. c) Deduzca una expresión general para el vector de velocidad instantánea del carrito y determine ese vector en $t = 2.0$ s. Exprese la velocidad instantánea en forma de componentes y en términos de magnitud y dirección.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema implica movimiento en una trayectoria bidimensional (o sea, en un plano). Por tanto, deberemos usar las expresiones para los *vectores* de desplazamiento, velocidad media y velocidad instantánea que obtuvimos en esta sección. (En las expresiones más sencillas de las secciones 2.1 y 2.2 no intervienen vectores, y sólo son válidas para movimiento rectilíneo.)

PLANTEAR: El camino del carrito se muestra en la figura 3.5. Usaremos la ecuación (3.1) para la posición $\vec{r}$, la expresión $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ para el desplazamiento, la ecuación (3.2) para la velocidad media y las ecuaciones (3.5) y (3.6) para la velocidad instantánea y su dirección. Las variables meta se indican en el enunciado del problema.

EJECUTAR: a) En el instante $t = 2.0$ s las coordenadas del carrito son

$$x = 2.0\text{ m} - (0.25\text{ m/s}^2)(2.0\text{ s})^2 = 1.0\text{ m}$$
$$y = (1.0\text{ m/s})(2.0\text{ s}) + (0.025\text{ m/s}^3)(2.0\text{ s})^3 = 2.2\text{ m}$$

La distancia del carrito al origen en este instante es

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1.0\text{ m})^2 + (2.2\text{ m})^2} = 2.4\text{ m}$$

b) Para obtener el desplazamiento y la velocidad media, expresamos el vector $\vec{r}$ de posición en función de t. De la ecuación (3.1):

$$\begin{aligned}\vec{r} &= x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}\\ &= [2.0\text{ m} - (0.25\text{ m/s}^2)t^2]\hat{\imath}\\ &\quad + [(1.0\text{ m/s})t + (0.025\text{ m/s}^3)t^3]\hat{\jmath}\end{aligned}$$

En el instante $t = 0.0$ s el vector de posición es

$$\vec{r}_0 = (2.0\text{ m})\hat{\imath} + (0.0\text{ m})\hat{\jmath}$$

Por la parte (a) sabemos que, en $t = 2.0$ s el vector de posición $\vec{r}_2$ es

$$\vec{r}_2 = (1.0\text{ m})\hat{\imath} + (2.2\text{ m})\hat{\jmath}$$

Por tanto, el desplazamiento entre $t = 0.0$ s y $t = 2.0$ s es

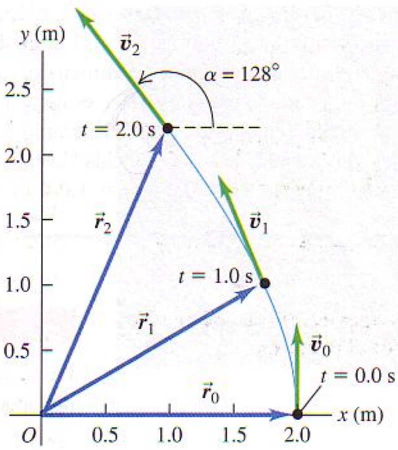
$$\begin{aligned}\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_0 &= (1.0\text{ m})\hat{\imath} + (2.2\text{ m})\hat{\jmath} - (2.0\text{ m})\hat{\imath}\\ &= (-1.0\text{ m})\hat{\imath} + (2.2\text{ m})\hat{\jmath}\end{aligned}$$

Durante el intervalo, el carrito se movió 1.0 m en la dirección $-x$ y 2.2 m en la dirección $+y$. La velocidad media en el intervalo de $t = 0.0$ s a $t = 2.0$ s es el desplazamiento dividido entre el tiempo transcurrido (ecuación 3.2):

$$\begin{aligned}\vec{v}_{\text{med}} &= \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{(-1.0\text{ m})\hat{\imath} + (2.2\text{ m})\hat{\jmath}}{2.0\text{ s} - 0.0\text{ s}}\\ &= (-0.50\text{ m/s})\hat{\imath} + (1.1\text{ m/s})\hat{\jmath}\end{aligned}$$

Las componentes de esta velocidad media son

$$v_{\text{med-}x} = -0.50\text{ m/s} \qquad v_{\text{med-}y} = 1.1\text{ m/s}$$



3.5 Trayectoria de un vehículo robot controlado por radio. En $t = 0$ el carrito tiene vector de posición $\vec{r}_0$ y velocidad instantánea $\vec{v}_0$. Asimismo, $\vec{r}_1$ y $\vec{v}_1$ son los vectores en $t = 1.0$ s; $\vec{r}_2$ y $\vec{v}_2$ son los vectores en $t = 2.0$ s.

c) Por la ecuación (3.4), las componentes de la velocidad instantánea son las derivadas de las coordenadas respecto a t:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = (-0.25\text{ m/s}^2)(2t)$$
$$v_y = \frac{dy}{dt} = 1.0\text{ m/s} + (0.025\text{ m/s}^3)(3t^2)$$

Así, podemos escribir el vector de velocidad instantánea $\vec{v}$ como

$$\begin{aligned}\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} &= (-0.50\text{ m/s}^2)t\hat{\imath}\\ &\quad + [1.0\text{ m/s} + (0.075\text{ m/s}^3)t^2]\hat{\jmath}\end{aligned}$$

En $t = 2.0$ s, las componentes de la velocidad instantánea son

$$v_x = (-0.50\text{ m/s}^2)(2.0\text{ s}) = -1.0\text{ m/s}$$
$$v_y = 1.0\text{ m/s} + (0.075\text{ m/s}^3)(2.0\text{ s})^2 = 1.3\text{ m/s}$$

La magnitud de la velocidad instantánea (es decir, la rapidez) en $t = 2.0$ s es

$$\begin{aligned}v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-1.0\text{ m/s})^2 + (1.3\text{ m/s})^2}\\ &= 1.6\text{ m/s}\end{aligned}$$

Su dirección respecto al eje $+x$ está dado por el ángulo α, donde, por la ecuación (3.7),

$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{1.3\text{ m/s}}{-1.0\text{ m/s}} = -1.3 \quad \text{así,} \quad \alpha = 128^\circ$$

Una calculadora mostraría que la tangente inversa de -1.3 es $-52°$. pero, como vimos en la sección 1.8, hay que examinar un dibujo del vector (Fig. 3.5) para decidir su dirección. La respuesta correcta para α es $-52° + 180° = 128°$.

EVALUAR: Tómese un momento para comparar las componentes de la velocidad *media* que obtuvo en la parte (b) para el intervalo de $t = 0.0$ s a $t = 2.0$ s($v_{\text{med-}x} = -0.50$ m/s, $v_{\text{med-}y} = 1.1$ m/s) con las componentes de la velocidad *instantánea* en $t = 2.0$ s que obtuvimos en la parte (c) $(v_x = -1.0 \text{ m/s}, v_y = 1.3 \text{ m/s})$. La comparación muestra que, igual que en una sola dimensión, el vector de velocidad media $\vec{v}_{\text{med}}$ durante un intervalo *no* es igual a la velocidad instantánea $\vec{v}$ al final del intervalo (véase el ejemplo 2-1).

Lo invitamos a calcular la posición, velocidad instantánea, rapidez y dirección de movimiento en $t = 0.0$ s y $t = 1.0$ s. Los vectores de posición y velocidad instantánea en $t = 0.0$ s, 1.0 s y 2.0 s se muestran en la figura 3.5. Observe que en todos los puntos el vector de velocidad instantánea $\vec{v}$ es tangente a la trayectoria. La magnitud de $\vec{v}$ aumenta al avanzar el carrito, lo que indica que la rapidez del carrito está aumentando.

Evalúe su comprensión

Dé un ejemplo de situación en la que el vector de velocidad media $\vec{v}_{\text{med}}$ en un intervalo *sería* igual a la velocidad instantánea $\vec{v}$ al final del intervalo.

3.2 | El vector aceleración

Consideremos ahora la *aceleración* de una partícula que se mueve en el espacio. Al igual que en el movimiento rectilíneo, la aceleración describe el cambio en la velocidad de la partícula, pero ahora la generalizaremos para describir los cambios tanto en la magnitud de la velocidad (es decir, la rapidez) como en la dirección de la velocidad (o sea, la dirección en que se mueve la partícula en el espacio).

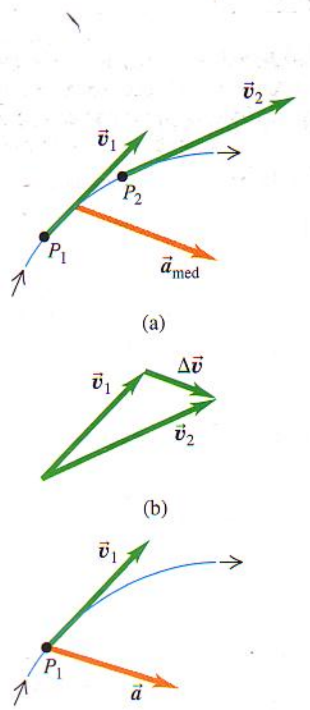
En la figura 3.6a, una partícula se mueve en una trayectoria curva. Los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ representan las velocidades instantáneas de la partícula en el instante t_1, cuando la partícula está en el punto P_1, y en t_2, cuando está en P_2. Las dos velocidades pueden diferir en magnitud y dirección. Definimos la **aceleración media** $\vec{a}_{\text{med}}$ de la partícula al moverse de P_1 a P_2 como el *cambio vectorial de velocidad*, $\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \Delta\vec{v}$, dividido entre el intervalo de tiempo $t_2 - t_1 = \Delta t$:

$$\vec{a}_{\text{med}} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \qquad \text{(vector aceleración media)} \qquad (3.8)$$

La aceleración media es una cantidad *vectorial* en la misma dirección que el vector $\Delta\vec{v}$ (Fig. 3.6a). Observe que $\vec{v}_2$ es la resultante de la velocidad original $\vec{v}_1$ y el cambio $\Delta\vec{v}$ (Fig. 3.6b). La componente x de la ecuación (3.8) es $a_{\text{med-}x} = (v_{2x} - v_{1x})/(t_2 - t_1) = \Delta v_x/\Delta t$, que no es sino la ecuación (2.4) para la aceleración media en movimiento rectilíneo.

Al igual que en el capítulo 2, definimos la **aceleración instantánea** $\vec{a}$ en el punto P_1 como el límite de la aceleración media cuando el punto P_2 se acerca a P_1 y $\Delta\vec{v}$ y Δt se acercan a cero; la aceleración instantánea también es igual a la tasa (variación) instantánea de cambio de velocidad con el tiempo. Como no estamos limitados a movimiento rectilíneo, la aceleración instantánea ahora es un vector:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad \text{(vector aceleración instantánea)} \qquad (3.9)$$



3.6 (a) el vector $\vec{a}_{\text{med}} = \Delta\vec{v}/\Delta t$ representa la aceleración media entre P_1 y P_2. (b) Construcción para obtener $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$. c) Aceleración instantánea $\vec{a}$ en P_1. El vector $\vec{v}$ es tangente a la trayectoria; $\vec{a}$ apunta al lado cóncavo de ésta.

El vector velocidad $\vec{v}$, como vimos, es tangente a la trayectoria de la partícula, pero la construcción de la figura 3.6c muestra que el vector aceleración instantánea $\vec{a}$ de una partícula en movimiento siempre apunta hacia el lado cóncavo de una trayectoria curva, o sea, hacia el interior de cualquier curva descrita por la partícula. También vemos que cuando una partícula sigue una trayectoria curva, su aceleración *siempre* es distinta de cero, aun si se mueve con rapidez constante. Quizá le parezca que esto va contra su intuición, pero más bien va contra el uso cotidiano de la palabra "aceleración" para implicar que la velocidad aumenta. La definición más precisa de la ecuación (3.9) muestra que la aceleración no es cero cuando el vector velocidad cambia de *cualquier* forma, sea en su magnitud, dirección o ambas.

Para convencerse de que una partícula no tiene aceleración cero cuando se mueve en una trayectoria curva con rapidez constante, piense en lo que siente cuando viaja en auto. Si el auto acelera, usted tiende a moverse en dirección *opuesta* a la aceleración del auto (veremos por qué en el capítulo 4). Así, tendemos a movernos hacia atrás cuando el auto acelera hacia adelante (aumenta su velocidad), y hacia el frente cuando el auto desacelera (frena). Si el auto da vuelta en un camino horizontal, tendemos a deslizarnos hacia afuera de la curva; por tanto, el auto tiene una aceleración hacia adentro de la curva.

Normalmente nos interesará la aceleración instantánea, no la media. Por ahora, usaremos el término "aceleración" para referirnos al vector aceleración instantánea, $\vec{a}$.

Cada componente del vector de aceleración es la derivada de la componente correspondiente de la velocidad:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt} \qquad a_z = \frac{dv_z}{dt} \tag{3.10}$$

(componentes de la aceleración instantánea)

En términos de vectores unitarios,

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\hat{\imath} + \frac{dv_y}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k} \tag{3.11}$$

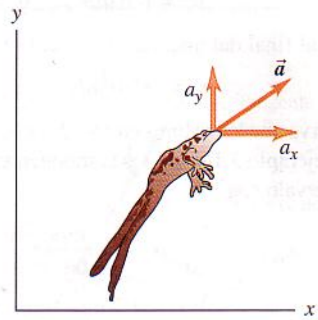
La componente x de las ecuaciones (3.10) y (3.11), $a_x = dv_x/dt$, es un resultado conocido: es la expresión de la sección 2.3 para la aceleración instantánea en una dimensión, ecuación (2.5). La figura 3.7 muestra un ejemplo de vector aceleración que tiene componentes tanto x como y.

Además, como cada componente de velocidad es la derivada de la coordenada correspondiente, expresamos las componentes a_x, a_y, y a_z del vector aceleración $\vec{a}$ como

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} \qquad a_z = \frac{d^2z}{dt^2} \tag{3.12}$$

y el vector aceleración $\vec{a}$ como

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k} \tag{3.13}$$



3.7 Cuando una rana salta, acelera tanto hacia adelante como hacia arriba. Por tanto, su vector aceleración tiene una componente horizontal (a_x) y también una componente vertical (a_y).

Ejemplo 3.2 Cálculo de aceleración media e instantánea

Veamos otra vez los movimientos del carrito robot del ejemplo 3.1. Determinamos que las componentes de la velocidad instantánea en cualquier instante t son

$$v_x = \frac{dx}{dt} = (-0.25\ \text{m/s}^2)(2t)$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = 1.0\ \text{m/s} + (0.025\ \text{m/s}^3)(3t^2)$$

y que el vector velocidad es

$$\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} = (-0.50\ \text{m/s}^2)t\hat{\imath} + [1.0\ \text{m/s} + (0.075\ \text{m/s}^3)t^2]\hat{\jmath}$$

a) Obtenga las componentes de la aceleración media en el intervalo de $t = 0.0$ s a $t = 2.0$ s. b) Determine la aceleración instantánea en $t = 2.0$ s.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: En la parte (a), usaremos la ecuación (3.8) para calcular las componentes de la aceleración media. Para ello, primero deberemos utilizar las expresiones anteriores para determinar los valores de v_x y v_y al principio y al final del intervalo. En la parte (b) determinaremos las componentes de la aceleración instantánea en *cualquier* tiempo t derivando respecto al tiempo las componentes de la velocidad, como en la ecuación (3.10).

EJECUTAR: Si sustituimos $t = 0.0$ s o $t = 2.0$ s en las expresiones anteriores para v_x y v_y, veremos que al principio del intervalo $(t = 0.0\ \text{s})$ las componentes de velocidad son

$$v_x = 0.0\ \text{m/s} \qquad v_y = 1.0\ \text{m/s}$$

y que al final del intervalo $(t = 2.0\ \text{s})$ las componentes son

$$v_x = -2.0\ \text{m/s} \qquad v_y = 1.3\ \text{m/s}$$

(Observe que los valores en $t = 2.0$ s son los mismos que obtuvimos en el ejemplo 3.1.) Así, las componentes de la aceleración media en el intervalo son

$$a_{\text{med-}x} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{-1.0\ \text{m/s} - 0.0\ \text{m/s}}{2.0\ \text{s} - 0.0\ \text{s}} = -0.5\ \text{m/s}^2$$

$$a_{\text{med-}y} = \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = \frac{1.3\ \text{m/s} - 1.0\ \text{m/s}}{2.0\ \text{s} - 0.0\ \text{s}} = 0.15\ \text{m/s}^2$$

b) Con la ecuación (3.10), obtenemos

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -0.50\ \text{m/s}^2 \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt} = (0.075\ \text{m/s}^3)(2t)$$

Podemos escribir el vector aceleración instantánea $\vec{a}$ como

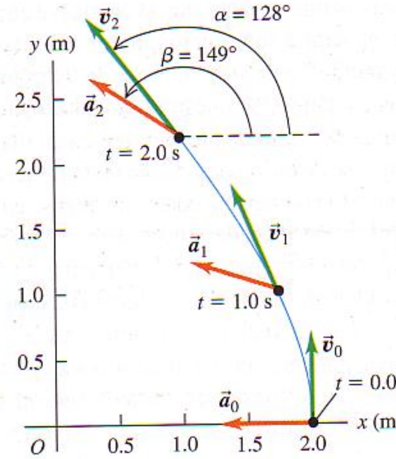
$$\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} = (-0.50\ \text{m/s}^2)\hat{\imath} + (0.15\ \text{m/s}^3)t\hat{\jmath}$$

En el instante $t = 2.0$ s, las componentes de la aceleración instantánea son

$$a_x = -0.50\ \text{m/s}^2 \qquad a_y = (0.15\ \text{m/s}^3)(2.0\ \text{s}) = 0.30\ \text{m/s}^2$$

El vector aceleración en este instante es

$$\vec{a} = (-0.50\ \text{m/s}^2)\hat{\imath} + (0.30\ \text{m/s}^2)\hat{\jmath}$$



3.8 Trayectoria del carrito controlado por radio, mostrando la velocidad y aceleración en $t = 0.0$ s ($\vec{v}_0$ y $\vec{a}_0$), $t = 1.0$ s ($\vec{v}_1$ y $\vec{a}_1$) y $t = 2.0$ s ($\vec{v}_2$ y $\vec{a}_2$).

La magnitud de la aceleración en este instante es

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$
$$= \sqrt{(-0.50\ \text{m/s}^2)^2 + (0.30\ \text{m/s}^2)^2} = 0.58\ \text{m/s}^2$$

La dirección de $\vec{a}$ respecto al eje x positivo está dada por el ángulo β, donde

$$\tan\beta = \frac{a_y}{a_x} = \frac{0.30\ \text{m/s}^2}{-0.50\ \text{m/s}^2} = -0.60$$
$$\beta = 180° - 31° = 149°$$

EVALUAR: Lo invitamos a calcular la aceleración instantánea en $t = 0.0$ s y $t = 1.0$ s. La figura 3.8 muestra el camino del carrito y los vectores velocidad y aceleración en $t = 0.0$ s, 1.0 s y 2.0 s. Observe que $\vec{v}$ y $\vec{a}$ *no* están en la misma dirección en ningún momento. El vector velocidad es tangente a la trayectoria, y el de aceleración apunta hacia el lado cóncavo de ésta.

Ejemplo 3.3 Determinación gráfica de aceleración media

Para el carrito de los ejemplos 3.1 y 3.2, use resta de vectores para obtener la dirección aproximada de la aceleración media en el intervalo de $t = 0.0$ s a 2.0 s.

SOLUCIÓN

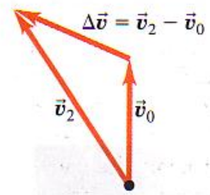
IDENTIFICAR: La figura 3.6 muestra que la aceleración media en el intervalo de t_1 a t_2 tiene la dirección del cambio de velocidad $\Delta\vec{v}$. Dados los vectores velocidad al principio y al final del intervalo, podemos obtener gráficamente la dirección de $\Delta\vec{v}$, y, por tanto, de $\vec{a}_{\text{med}}$.

PLANTEAR Y EJECUTAR: Por la figura 3.8, la velocidad $\vec{v}_0$ en $t = 0.0$ s apunta en la dirección $+y$ y la velocidad $\vec{v}_2$ en $t = 2.0$ s apunta en cierto ángulo entre la dirección $-x$ y la dirección $+y$. Además, la magnitud de $\vec{v}_2$ es mayor que la de $\vec{v}_0$.

La figura 3.9 muestra cómo obtener la dirección de $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_0$ restando gráficamente los dos vectores. El resultado apunta con un ángulo pequeño arriba de la dirección $-x$; la aceleración media apunta en la misma dirección que $\Delta\vec{v}$.

EVALUAR: La dirección de $\Delta\vec{v}$ en la figura 3.9 es muy cercana a la dirección de $\vec{a}_1$ (la aceleración instantánea en el punto medio del intervalo) que se muestra en la figura 3.8. También es intermedia entre las direcciones de $\vec{a}_0$ y $\vec{a}_2$, las aceleraciones instantáneas al principio y al final del intervalo, respectivamente. Así es como cabe esperar que se comporte la aceleración *media*.

Este procedimiento gráfico normalmente no nos ayuda a determinar valores numéricos de la aceleración; para ello, necesitaremos efectuar cálculos como los del ejemplo 3.2. No obstante, este método permite verificar si los cálculos son razonables. Además, nos dice cosas importantes acerca del carácter del movimiento, como veremos a continuación.



3.9 Uso de resta gráfica de vectores para estimar la dirección de una aceleración media.

Componentes perpendiculares y paralelas de la aceleración

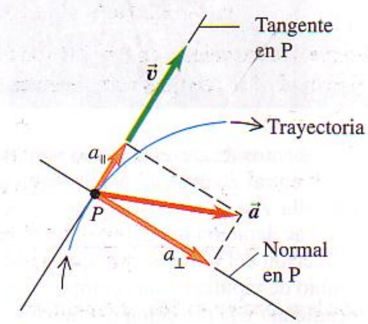
En muchos casos es útil describir la aceleración de una partícula que se mueve en una trayectoria curva en términos de componentes paralelas y perpendiculares a la velocidad en cada punto (Fig. 3.10). En la figura, las componentes se rotulan $a_\perp$ y $a_\parallel$. Para ver su utilidad, emplearemos la interpretación gráfica de la aceleración (como en el ejemplo 3.3) y consideremos dos casos especiales.

En la figura 3.11a, el vector de aceleración es *paralelo* a la velocidad $\vec{v}_1$. El cambio en $\vec{v}$ durante un intervalo pequeño Δt es el vector $\Delta\vec{v}$ con la misma dirección que $\vec{a}$ y por tanto que $\vec{v}_1$. La velocidad $\vec{v}_2$ al final de Δt, dada por $\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \Delta\vec{v}$, es un vector con la misma dirección que $\vec{v}_1$ pero de mayor magnitud. Es decir, durante el intervalo Δt la partícula de la figura 3.11a se movió en línea recta con rapidez creciente.

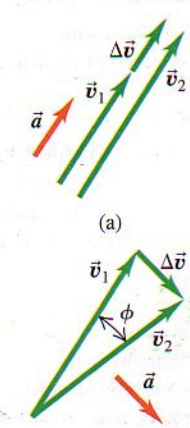
En la figura 3.11b, la aceleración $\vec{a}$ es *perpendicular* a la velocidad $\vec{v}$. En un intervalo pequeño Δt, el cambio $\Delta\vec{v}$ es un vector casi perpendicular a $\vec{v}_1$, como se muestra. Otra vez, $\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \Delta\vec{v}$, pero aquí $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ tienen diferente dirección. Al acercarse Δt a cero, el ángulo ϕ en la figura se acerca a cero, $\Delta\vec{v}$ se hace perpendicular a $\vec{v}_1$ *y* $\vec{v}_2$, y $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ tienen la misma magnitud. Dicho de otro modo, la rapidez de la partícula no cambia, pero su camino se curva.

Así, cuando $\vec{a}$ es *paralela* (o antiparalela) a $\vec{v}$, su efecto es alterar la magnitud de $\vec{v}$ pero no su dirección; cuando $\vec{a}$ es *perpendicular* a $\vec{v}$, su efecto es cambiar la dirección de $\vec{v}$ pero no su magnitud. En general, $\vec{a}$ puede tener componentes *tanto* paralela *como* perpendicular a $\vec{v}$, pero lo anterior sigue siendo válido para las componentes individuales. En particular, cuando una partícula sigue una trayectoria curva con rapidez constante, su aceleración siempre es perpendicular a $\vec{v}$ en todos los puntos.

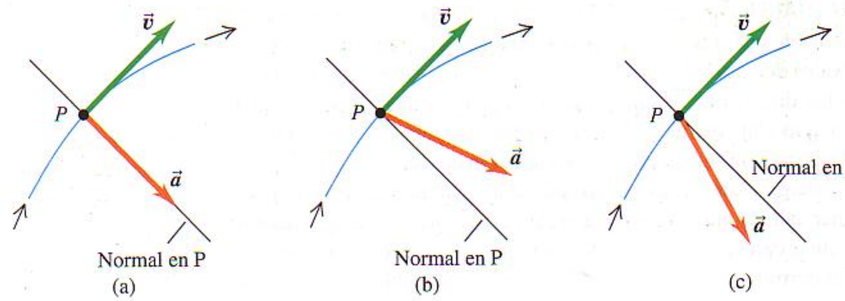
La figura 3.12 muestra una partícula que se mueve con trayectoria curva en tres situaciones distintas: rapidez constante, creciente y decreciente. Si la rapidez es constante, $\vec{a}$ es perpendicular, o *normal*, a la trayectoria y a $\vec{v}$ y apunta hacia el lado cóncavo de la trayectoria (Fig. 3.12a). Si la rapidez aumenta, todavía hay una componente perpendicular de $\vec{a}$, pero también una paralela con la misma dirección que $\vec{v}$ (Fig. 3.12b) y $\vec{a}$ apunta hacia adelante de la normal a la trayectoria (como en el ejemplo 3.2). Si la rapidez disminuye, la componente paralela tiene dirección opuesta a $\vec{v}$ y $\vec{a}$ apunta hacia atrás de la normal (Fig. 3.12c). Estas ideas nos ayudarán a describir la aceleración de un coche que toma una curva (Fig. 3.13). Usaremos otra vez esas ideas en la sección 3.4 al estudiar el caso especial de movimiento en un círculo.



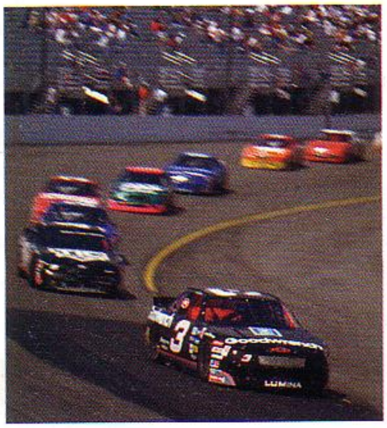
3.10 La aceleración puede descomponerse en las componentes $a_\parallel$ paralela a la trayectoria (y a la velocidad), y $a_\perp$ perpendicular a la trayectoria (o sea, sobre la normal a la trayectoria).



3.11 (a) Si $\vec{a}$ es paralela a $\vec{v}$, la magnitud de $\vec{v}$ aumenta, pero su dirección no cambia. La partícula se mueve en línea recta con rapidez cambiante. (b) Si $\vec{a}$ es perpendicular a $\vec{v}$, la dirección de $\vec{v}$ cambia, pero su magnitud no. La partícula se mueve en una curva con rapidez constante.



3.12 Vectores de velocidad y aceleración para una partícula que pasa por un punto P de una trayectoria curva con rapidez (a) constante, (b) creciente y (c) decreciente.



3.13 Los autos de carreras por lo regular frenan al entrar en una curva y aceleran al salir de ella. Así, el auto tiene una componente de aceleración paralela o antiparalela a la dirección del movimiento (que describe el cambio de rapidez) y una componente perpendicular a la dirección del movimiento (que describe el cambio de dirección).

CUIDADO Observe que las dos cantidades

$$\frac{d|\vec{v}|}{dt} \quad \text{y} \quad \left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right|$$

no son iguales. La primera es la tasa de cambio de la rapidez; es cero cuando la partícula se mueve con rapidez constante, aunque cambie su dirección. La segunda es la magnitud del vector aceleración; es cero sólo si la aceleración de la partícula es cero, es decir, cuando ésta se mueve en línea recta con rapidez constante.

Ejemplo 3.4 Cálculo de componentes paralela y perpendicular de la aceleración

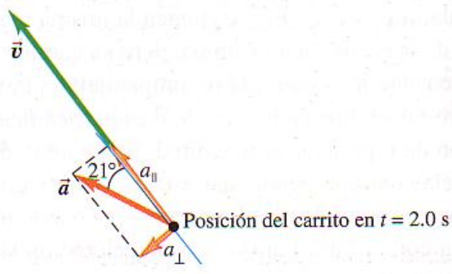
Para el carrito de los ejemplos 3.1 y 3.2, obtenga las componentes paralela y perpendicular de la aceleración en $t = 2.0$ s.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Para obtener las componentes paralela y perpendicular, necesitamos conocer el ángulo entre el vector de aceleración $\vec{a}$ y el de velocidad $\vec{v}$. Podremos determinarlo porque obtuvimos las direcciones de $\vec{a}$ y $\vec{v}$ en los ejemplos 3.2 y 3.1, respectivamente.

EJECUTAR: En el ejemplo 3.2 vimos que, en $t = 2.0$ s la partícula tiene una aceleración de magnitud 0.58 m/s² con un ángulo de 149° respecto al eje $+x$. Por el ejemplo 3.1, sabemos que en ese instante el vector velocidad tiene un ángulo de 128° respecto al eje $+x$. Así, la figura 3.8 muestra que el ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{v}$ es $149° - 128° = 21°$ (Fig. 3.14). Las componentes paralela y perpendicular de la aceleración son entonces

$$a_{\parallel} = a\cos 21° = (0.58\ \text{m/s}^2)\cos 21° = 0.54\ \text{m/s}^2$$
$$a_{\perp} = a\,\text{sen}\,21° = (0.58\ \text{m/s}^2)\,\text{sen}\,21° = 0.21\ \text{m/s}^2$$

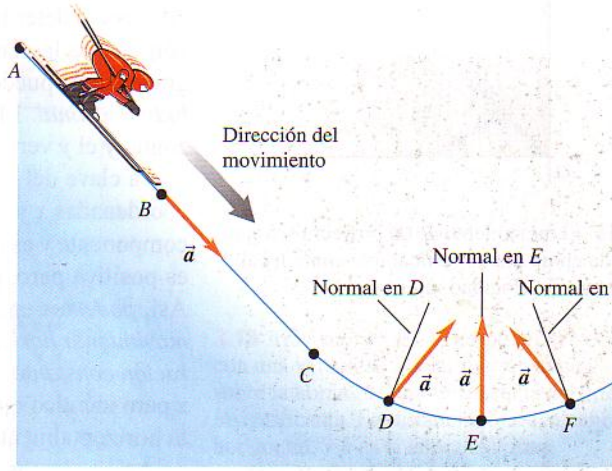


3.14 Componentes paralela y perpendicular de la aceleración del carrito en $t = 2.0$ s.

EVALUAR: La componente paralela $a_{\parallel}$ tiene la dirección de $\vec{v}$, o sea que la rapidez está aumentando. Como la componente perpendicular $a_{\perp}$ no es cero, se sigue que la trayectoria del coche es curva en este instante: el carrito está dando vuelta.

Ejemplo conceptual 3.5 Aceleración de una esquiadora

Una esquiadora se mueve sobre una rampa de salto como se muestra en la figura 3.15. La rampa es recta entre A y C y curva a partir de C. La rapidez de la esquiadora aumenta al moverse pendiente abajo de A a E, donde su rapidez es máxima, disminuyendo a partir de ahí. Dibuje la dirección del vector aceleración en B, D, E y F.



3.15 La dirección de la aceleración de la esquiadora es diferente en distintos puntos de la trayectoria.

SOLUCIÓN

En el punto B, la esquiadora se mueve en línea recta con rapidez creciente, así que su aceleración apunta cuesta abajo, en la misma dirección que su velocidad.

En D, la esquiadora sigue una trayectoria curva, así que su aceleración tiene una componente perpendicular. También hay una componente en la dirección del movimiento porque su rapidez aún va en aumento. Por tanto, el vector aceleración apunta *adelante* de la normal a su trayectoria en el punto D.

La rapidez de la esquiadora no cambia instantáneamente en E; es máxima en este punto, así que su derivada es cero. Por tanto, no hay componente paralela de $\vec{a}$, y la aceleración es perpendicular al movimiento.

Por último, en F, la aceleración tiene una componente perpendicular (porque la trayectoria es curva aquí) y una paralela *opuesta* a la dirección de movimiento (porque la rapidez está disminuyendo). Por tanto, el vector aceleración apunta hacia *atrás* de la normal a la trayectoria.

En la siguiente sección examinaremos la aceleración de la esquiadora después de abandonar la rampa.

Evalúe su comprensión

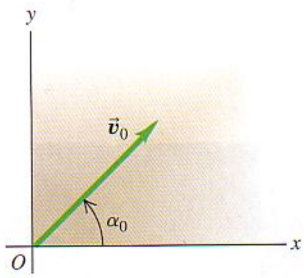
Considere los fragmentos de roca volcánica de la fotografía con que inicia el capítulo. Cada fragmento pierde rapidez al subir hasta el punto máximo de su trayectoria y luego se acelera al descender desde ese punto. ¿Qué dirección tiene la aceleración de un fragmento en el punto más alto de su trayectoria?

3.3 | Movimiento de proyectiles

Un **proyectil** es cualquier cuerpo que recibe una velocidad inicial y luego sigue una trayectoria determinada totalmente por los efectos de la aceleración gravitacional y la resistencia del aire. Una pelota bateada, un balón lanzado, un paquete soltado de un avión y una bala disparada de un rifle son proyectiles. El camino que sigue un proyectil es su **trayectoria**.

Para analizar este tipo de movimiento tan común, partiremos de un modelo idealizado que representa el proyectil como una partícula con aceleración (debida a la gravedad) constante en magnitud y dirección. Haremos caso omiso de los efectos del aire y la curvatura y rotación de la Tierra. Como todos los modelos, éste tiene limitaciones. La curvatura de la Tierra debe considerarse en el vuelo de misiles de largo alcance, y la resistencia del aire es crucial para un paracaidista. No obstante, podemos aprender mucho analizando este sencillo modelo. En el resto del capítulo, la frase "movimiento de proyectil" implicará que se desprecia

3.1 Resolución de problemas de movimiento de proyectiles
3.2 Dos pelotas que caen
3.3 Cambio de la velocidad en x
3.4 Aceleraciones x y y de proyectiles
3.5 Componentes de la velocidad inicial
3.6 Práctica de tiro al blanco I



3.16 El movimiento de un proyectil siempre se da en un plano vertical que contiene el vector de velocidad inicial $\vec{v}_0$.

la resistencia del aire. En el capítulo 5 veremos qué sucede cuando la resistencia no puede despreciarse.

Primero, observamos que el movimiento de un proyectil está limitado a un plano vertical determinado por la dirección de la velocidad inicial (Fig. 3.16). La razón es que la aceleración debida a la gravedad es exclusivamente vertical; la gravedad no puede mover un proyectil lateralmente. Por tanto, este movimiento es *bidimensional*. Llamaremos al plano de movimiento plano xy, con el eje x horizontal y el y vertical hacia arriba.

La clave del análisis del movimiento de proyectiles es que podemos tratar las coordenadas x y y por separado. La componente x de la aceleración es cero, y la componente y es constante e igual a $-g$. (Recuerde que, por definición, g siempre es positiva pero, por las direcciones de coordenadas escogidas, a_y es negativa.) Así, *podemos analizar el movimiento de un proyectil como una combinación de movimiento horizontal con velocidad constante y movimiento vertical con aceleración constante*. La figura 3.17 muestra dos proyectiles con diferente movimiento x pero idéntico movimiento y; uno se deja caer desde el reposo y el otro se proyecta horizontalmente, pero ambos caen la misma distancia en el mismo tiempo.

Así, podemos expresar todas las relaciones vectoriales de posición, velocidad y aceleración con ecuaciones independientes para las componentes horizontales y verticales. El movimiento real es la superposición de los dos movimientos. Las componentes de $\vec{a}$ son

$$a_x = 0 \qquad a_y = -g \quad \text{(movimiento de proyectil, sin resistencia del aire)} \tag{3.14}$$

Por lo regular, usaremos $g = 9.8\ \text{m/s}^2$. Dado que las aceleraciones x y y son constantes, podemos usar las ecuaciones (2.8), (2.12), (2.13) y (2.14) directamente. Por ejemplo, suponga que en $t = 0$ la partícula está en el punto (x_0, y_0) y sus componentes de velocidad tienen los valores iniciales v_{0x} y v_{0y}. Las componentes de la aceleración son $a_x = 0$, $a_y = -g$. Considerando primero el movimiento x, sustituimos a_x en las ecuaciones (2.8) y (2.12). Obtenemos

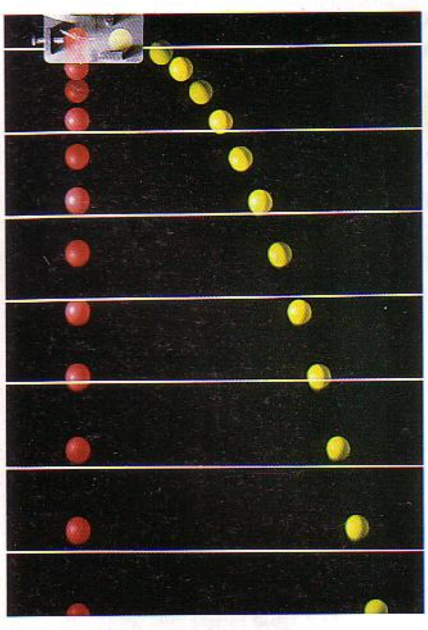
$$v_x = v_{0x} \tag{3.15}$$

$$x = x_0 + v_{0x}t \tag{3.16}$$

Para el movimiento y, sustituimos y por x, v_y por v_x, v_{0y} por v_{0x}, y $a_y = -g$ por a_x:

$$v_y = v_{0y} - gt \tag{3.17}$$

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{3.18}$$



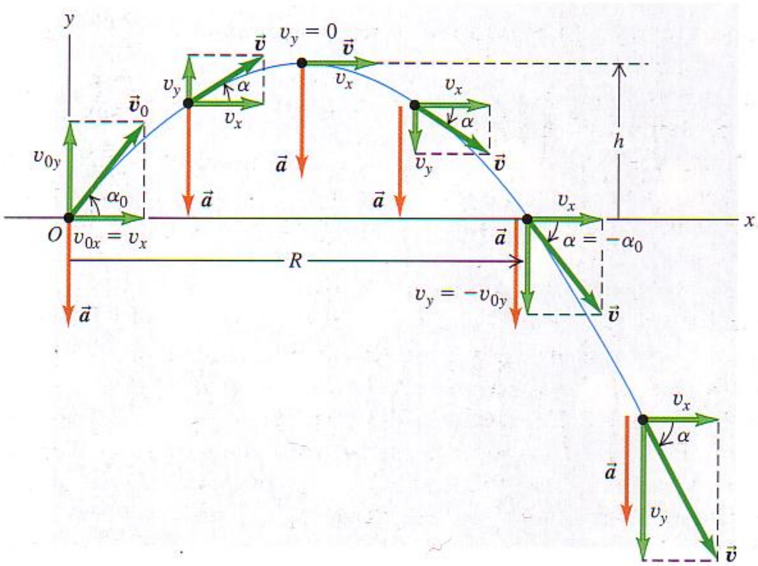
3.17 Independencia del movimiento horizontal y vertical. La bola roja se deja caer desde el reposo y la amarilla se proyecta horizontalmente al mismo tiempo; las imágenes sucesivas en esta fotografía estroboscópica están separadas por intervalos de tiempo iguales. En un instante dado, ambas bolas tienen la misma posición y, velocidad y y aceleración y, a pesar de tener diferente posición x y velocidad x.

Por lo general, lo más sencillo es tomar la posición inicial (en $t = 0$) como origen; así, $x_0 = y_0 = 0$. Este punto podría ser la posición de una pelota cuando abandona la mano del lanzador, o la de una bala cuando sale del cañón de un arma.

La figura 3.18 muestra la trayectoria de un proyectil que parte de (o pasa por) el origen en $t = 0$. La posición, velocidad, componentes de velocidad y aceleración se muestran en una serie de instantes equiespaciados. La componente x de la aceleración es 0, así que v_x es constante. La componente y es constante pero no cero, así que v_y cambia en cantidades iguales a intervalos iguales. En el punto más alto de la trayectoria, $v_y = 0$.

También podemos representar la velocidad inicial $\vec{v}_0$ con su magnitud v_0 (la rapidez inicial) y su ángulo α_0 con el eje $+x$. En términos de estas cantidades, las componentes v_{0x} y v_{0y} de la velocidad inicial son

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha_0 \qquad v_{0y} = v_0 \operatorname{sen} \alpha_0 \tag{3.19}$$



3.18 Trayectoria de un cuerpo proyectado con una velocidad inicial $\vec{v}_0$ y un ángulo α_0 sobre la horizontal con resistencia del aire insignificante. La distancia R es el alcance horizontal, y h es la altura máxima.

Usando estas relaciones en las ecuaciones (3.15) a (3.18) y haciendo $x_0 = y_0 = 0$, tenemos

$$x = (v_0 \cos \alpha_0)t \quad \text{(movimiento de proyectil)} \quad (3.20)$$

$$y = (v_0 \operatorname{sen} \alpha_0)t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \text{(movimiento de proyectil)} \quad (3.21)$$

$$v_x = v_0 \cos \alpha_0 \quad \text{(movimiento de proyectil)} \quad (3.22)$$

$$v_y = v_0 \operatorname{sen} \alpha_0 - gt \quad \text{(movimiento de proyectil)} \quad (3.23)$$

Estas ecuaciones describen la posición y velocidad del proyectil de la figura 3.18 en cualquier instante t.

Podemos obtener mucha información de estas ecuaciones. Por ejemplo, en cualquier instante, la distancia r del proyectil al origen (la magnitud del vector de posición $\vec{r}$) está dada por

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3.24)$$

La rapidez del proyectil (la magnitud de su velocidad) en cualquier instante es

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (3.25)$$

La *dirección* de la velocidad, en términos del ángulo α que forma con el eje $+x$, está dada por

$$\tan \alpha = \frac{v_y}{v_x} \quad (3.26)$$

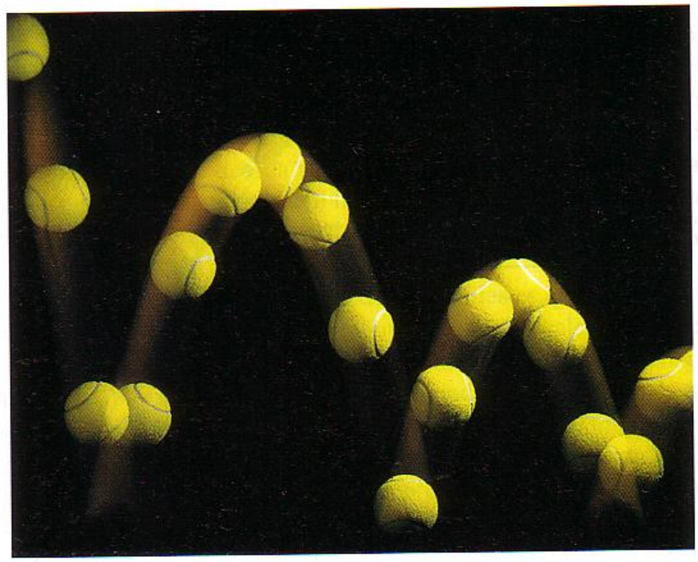
El vector de velocidad $\vec{v}$ es tangente a la trayectoria en todos los puntos.

Podemos deducir una ecuación para la forma de la trayectoria en términos de x y y eliminando t. De las ecuaciones (3.20) y (3.21), que suponen $x_0 = y_0 = 0$, obtenemos $t = x/(v_0 \cos \alpha_0)$ y

$$y = (\tan \alpha_0)x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha_0}x^2 \quad (3.27)$$

ActivPhysics ONLINE

3.7 Práctica de tiro al blanco II



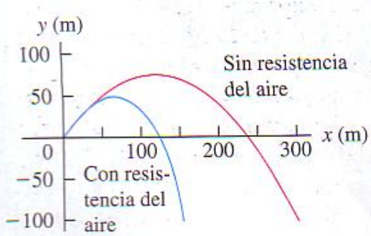
3.19 Fotografía estroboscópica de una pelota que rebota, donde se aprecian trayectorias parabólicas después de cada rebote. Las imágenes sucesivas están separadas por intervalos de tiempo iguales, como en la figura 3.17. Cada cresta de la trayectoria está más abajo que la anterior debido a la pérdida de energía durante el "rebote", o choque con la superficie horizontal.

No se preocupe por los detalles de esta ecuación; lo importante es su forma general. Las cantidades v_0, tan α_0, cos α_0, y g son constantes, así que la ecuación tiene la forma

$$y = bx - cx^2$$

donde b y c son constantes. Ésta es la ecuación de una *parábola*. En el movimiento de proyectiles, con nuestro modelo simplificado, la trayectoria siempre es una parábola (Fig. 3.19).

Ya dijimos que la resistencia del aire no siempre es insignificante. Si debe incluirse, las ecuaciones son mucho más complejas; los efectos de dicha resistencia dependen de la velocidad, por lo que la aceleración no es constante. La figura 3.20 es una simulación computarizada de la trayectoria de una pelota con $v_0 = 50$ m/s y $\alpha_0 = 53.1°$, sin resistencia del aire y con una resistencia proporcional al cuadrado de la rapidez de la bola. Vemos que el efecto de la resistencia es muy grande; la altura máxima y el alcance se reducen y la trayectoria ya no es parabólica.



3.20 La resistencia del aire tiene un efecto acumulativo considerable sobre el movimiento de una pelota de béisbol. En esta simulación, permitimos que la pelota caiga por debajo de la altura desde la cual se lanzó (por ejemplo, la pelota podría haberse lanzado desde un acantilado).

Ejemplo conceptual 3.6 Aceleración de una esquiadora, continuación

Consideremos otra vez a la esquiadora del ejemplo conceptual 3.5. ¿Qué aceleración tiene en los puntos G, H e I de la figura 3.21 *después* de dejar la rampa? Desprecie la resistencia del aire.

SOLUCIÓN

La aceleración de la esquiadora cambió de un punto a otro mientras estaba en la rampa pero, apenas la esquiadora deja la rampa, se convierte en un proyectil. Así, en los puntos G, H e I, y de hecho en *todos* los puntos después de dejar la rampa, la aceleración de la esquiadora apunta verticalmente hacia abajo y tiene magnitud g. Por más compleja que sea la aceleración de una partícula antes de convertirse en proyectil, su aceleración como proyectil está dada por $a_x = 0$, $a_y = -g$.

3.21 Una vez que la esquiadora tiene movimiento de proyectil, su aceleración es constante y hacia abajo.

Estrategia para resolver problemas

Movimiento de proyectil

NOTA: Las estrategias que usamos en las secciones 2.4 y 2.5 para problemas de aceleración constante en línea recta también sirven aquí.

IDENTIFICAR *los conceptos pertinentes:* El concepto clave que debemos recordar es que durante todo el movimiento de un proyectil, la aceleración es hacia abajo y tiene magnitud constante g. Esté alerta a aspectos del problema en los que *no* intervenga el movimiento de proyectiles. Por ejemplo, las ecuaciones para el movimiento de proyectiles no son válidas durante el lanzamiento de una pelota, porque ahí actúan sobre la pelota tanto la mano del lanzador como la gravedad. Las ecuaciones sólo entran en juego una vez que la pelota abandona la mano del lanzador.

PLANTEAR *el problema con los pasos siguientes:*

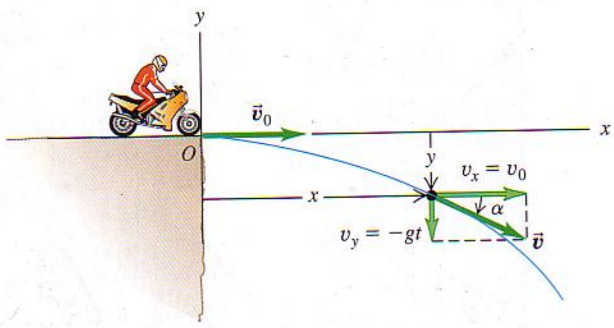
1. Defina su sistema de coordenadas y dibuje sus ejes. Normalmente lo más fácil es colocar el origen en la posición inicial ($t = 0$) del proyectil. (Si el proyectil es una pelota lanzada o un dardo disparado por una pistola, la posición inicial es donde la pelota abandona la mano del lanzador o sale del cañón de la pistola.) También, suele ser recomendable tomar el eje x como horizontal y el eje y hacia arriba. Así, la posición inicial es $x_0 = 0$ y $y_0 = 0$, las componentes de la aceleración (constante) son $a_x = 0$, $a_y = -g$.
2. Haga una lista de las cantidades conocidas y desconocidas, y decida cuáles incógnitas son las variables meta. En algunos problemas se dan las componentes (o la magnitud y dirección) de la velocidad inicial y se pide obtener las coordenadas y componentes de velocidad en un instante posterior. O bien podrían darle dos puntos de la trayectoria y pedirle calcular la velocidad inicial. En todo caso, usará las ecuaciones (3.20) a (3.23). Asegúrese de tener tantas ecuaciones como variables meta por determinar.
3. Suele ser útil plantear el problema con palabras y luego traducirlo a símbolos. Por ejemplo, ¿*cuándo* llega la partícula a cierto punto? (O sea, ¿con qué valor de t?) ¿*Dónde* está la partícula cuando la velocidad tiene cierto valor? (¿Cuánto valen x y y cuando v_x o v_y tiene ese valor?) En el punto más alto de la trayectoria, $v_y = 0$. Así, la pregunta "¿cuándo alcanza el proyectil su punto más alto?" se traduce a "¿cuánto vale t cuando $v_y = 0$?" Asimismo, "¿cuándo vuelve el proyectil a su altura inicial?" se traduce a "¿cuánto vale t cuando $y = y_0$?"

EJECUTAR *la solución:* Use las ecuaciones (3.20) a (3.23) para obtener las variables meta. (También podrían ser útiles otras ecuaciones que se dan en la sección 3.3.) Al hacerlo, resista la tentación de dividir la trayectoria en segmentos y analizarlos individualmente. No hay que volver a comenzar, con nuevos ejes y nueva escala de tiempo, cuando el proyectil llega a su altura máxima. Lo más fácil suele ser configurar las ecuaciones (3.20) a (3.23) al inicio y usar los mismos ejes y escala de tiempo durante todo el problema.

EVALUAR *la respuesta:* Como siempre, examine sus resultados para ver si son lógicos y si los valores numéricos son razonables.

Ejemplo 3.7 Cuerpo proyectado horizontalmente

Un acróbata en motocicleta se lanza del borde de un risco. Justo en el borde, su velocidad es horizontal con magnitud 9.0 m/s. Obtenga la posición, distancia del borde y velocidad de la moto después de 0.50 s.



3.22 Trayectoria de un cuerpo proyectado horizontalmente.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Una vez que el acróbata se separa del risco, es un proyectil. Por tanto, su velocidad en el borde es su velocidad inicial.

PLANTEAR: El sistema de coordenadas se muestra en la figura 3.22. Escogemos el origen en el borde del risco, donde la moto se convierte en proyectil, así que $x_0 = 0$ y $y_0 = 0$. La velocidad inicial es puramente horizontal (es decir, $\alpha_0 = 0$), así que sus componentes son $v_{0x} = v_0 \cos \alpha_0 = 9.0$ m/s y $v_{0y} = v_0$ sen $\alpha_0 = 0$. Para determinar la posición de la moto en $t = 0.50$ s, usamos las ecuaciones (3.20) y (3.21), que dan x y y en función del tiempo. Dados estos valores, calcularemos la distancia del origen con la ecuación (3.24). Por último, determinaremos la velocidad en $t = 0.50$ s con las ecuaciones (3.22) y (3.23), que dan v_x y v_y en función del tiempo.

EJECUTAR: ¿Dónde está la moto en $t = 0.50$ s? Por las ecuaciones (3.20) y (3.21), las coordenadas son

$$x = v_{0x}t = (9.0 \text{ m/s})(0.50 \text{ s}) = 4.5 \text{ m}$$
$$y = -\frac{1}{2}gt^2 = -\frac{1}{2}(9.8 \text{ m/s}^2)(0.50 \text{ s})^2 = -1.2 \text{ m}$$

El valor negativo de y indica que en este instante la motocicleta está debajo de su punto inicial.

¿A qué distancia está ahora la moto del origen? Por la ecuación (3.24),

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(4.5 \text{ m})^2 + (-1.2 \text{ m})^2} = 4.7 \text{ m}$$

¿Qué velocidad tiene en $t = 0.50$ s? Por las ecuaciones (3.22) y (3.23), las componentes de la velocidad en ese momento son

$$v_x = v_{0x} = 9.0 \text{ m/s}$$
$$v_y = -gt = (-9.8 \text{ m/s}^2)(0.50 \text{ s}) = -4.9 \text{ m/s}$$

La moto tiene la misma velocidad horizontal v_x que cuando abandonó el risco en $t = 0$, pero además hay una velocidad vertical v_y hacia abajo (en la dirección $-y$). Si usamos vectores unitarios, la velocidad en $t = 0.50$ s es

$$\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} = (9.0 \text{ m/s})\hat{\imath} + (-4.9 \text{ m/s})\hat{\jmath}$$

También podemos expresar la velocidad en términos de magnitud y dirección. Por la ecuación (3.25), la rapidez (magnitud de la velocidad) en este instante es

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$
$$= \sqrt{(9.0 \text{ m/s})^2 + (-4.9 \text{ m/s})^2} = 10.2 \text{ m/s}$$

Por la ecuación (3.26), el ángulo α del vector velocidad es

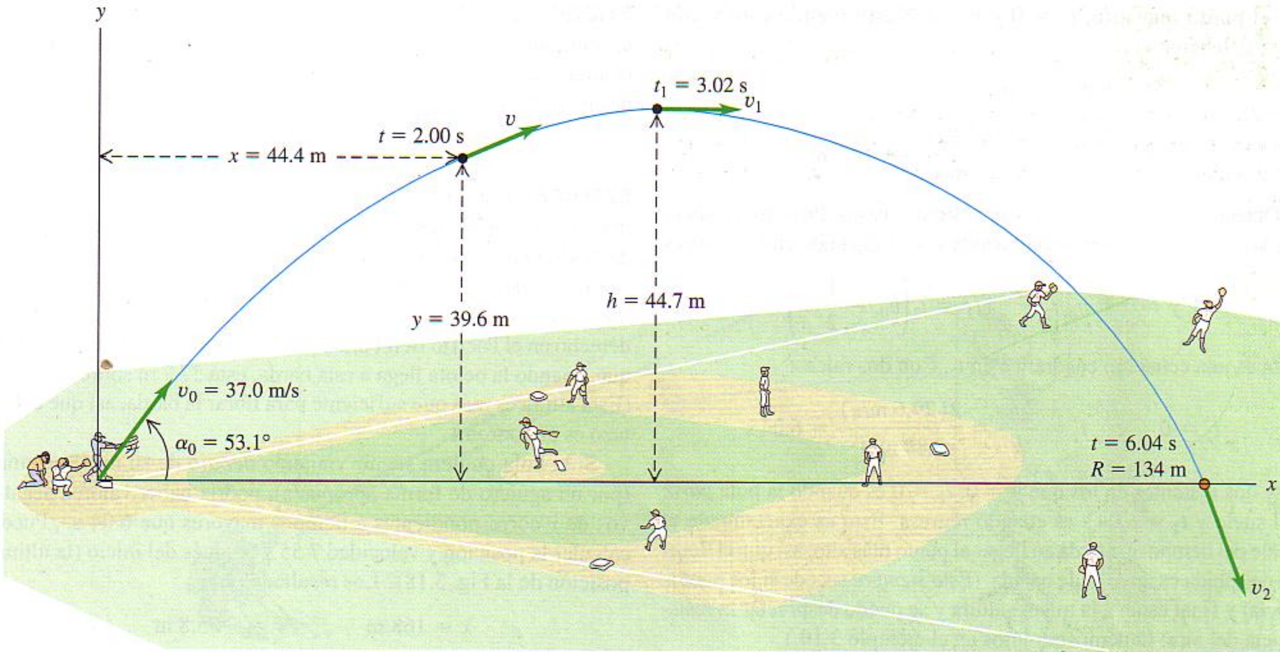
$$\alpha = \arctan \frac{v_y}{v_x}$$
$$= \arctan\left(\frac{-4.9 \text{ m/s}}{9.0 \text{ m/s}}\right) = -29°$$

La velocidad está dirigida 29° debajo de la horizontal.

EVALUAR: Nuestras respuestas ilustran el hecho de que la gravedad no altera el aspecto horizontal del movimiento; la motocicleta se sigue moviendo horizontalmente a 9.0 m/s, cubriendo 4.5 m en 0.50 s. Dado que la moto tiene cero velocidad inicial vertical, cae verticalmente igual que un objeto que se suelta desde el reposo, descendiendo una distancia de $\frac{1}{2}gt^2 = 1.2$ m en 0.50 s.

Ejemplo 3.8 Altura y alcance de una pelota

Un bateador golpea una pelota de modo que ésta adquiere una rapidez inicial $v_0 = 37.0$ m/s con un ángulo inicial $\alpha_0 = 53.1°$, en un lugar donde $g = 9.80$ m/s^2 (Fig. 3.23). a) Calcule la posición de la bola y la magnitud y dirección de su velocidad cuando $t = 2.00$ s. b) Determine cuándo la pelota alcanza el punto más alto y su altura h en ese punto. c) Obtenga el *alcance horizontal* R, es decir, la distancia horizontal desde el punto de partida hasta donde la pelota cae al suelo. En las tres partes, trate la pelota como proyectil.



3.23 Trayectoria de una pelota bateada, tratada como proyectil.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Como muestra la figura 3.20, los efectos del aire sobre el movimiento de una pelota de béisbol no son insignificantes pero, por sencillez, los despreciaremos en este ejemplo. Así pues, usaremos las ecuaciones del movimiento de proyectiles para describir el movimiento.

PLANTEAR: Usaremos el mismo sistema de coordenadas que en la figura 3.18. Así, podremos usar las ecuaciones (3.20) a (3.23) sin modificaciones. Las variables meta son (1) la posición y velocidad de la pelota 2.00 s después de perder contacto con el bate, (2) el tiempo transcurrido entre que la pelota sale del bate y alcanza su altura máxima —cuando $v_y = 0$— y la coordenada y en ese momento y (3) la coordenada x en el momento en que la coordenada y es igual al valor inicial y_0.

La bola se golpea tal vez 1 m sobre el suelo, pero supondremos que parte del nivel del suelo ($y_0 = 0$). La velocidad inicial tiene componentes

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha_0 = (37.0 \text{ m/s}) \cos 53.1° = 22.2 \text{ m/s}$$
$$v_{0y} = v_0 \operatorname{sen} \alpha_0 = (37.0 \text{ m/s}) \operatorname{sen} 53.1° = 29.6 \text{ m/s}$$

EJECUTAR: a) Queremos obtener x, y, v_x, y v_y en el instante $t = 2.00$ s. Por las ecuaciones (3.20) a (3.23),

$$x = v_{0x}t = (22.2 \text{ m/s})(2.00 \text{ s}) = 44.4 \text{ m}$$
$$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$
$$= (29.6 \text{ m/s})(2.00 \text{ s}) - \frac{1}{2}(9.80 \text{ m/s}^2)(2.00 \text{ s})^2$$
$$= 39.6 \text{ m}$$

$$v_x = v_{0x} = 22.2 \text{ m/s}$$
$$v_y = v_{0y} - gt = 29.6 \text{ m/s} - (9.80 \text{ m/s}^2)(2.00 \text{ s})$$
$$= 10.0 \text{ m/s}$$

La componente y de la velocidad es positiva, o sea que la bola todavía va en ascenso (Fig. 3.23). La magnitud y dirección de la velocidad se obtienen de las ecuaciones (3.25) y (3.26):

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(22.2 \text{ m/s})^2 + (10.0 \text{ m/s})^2}$$
$$= 24.3 \text{ m/s}$$
$$\alpha = \arctan\left(\frac{10.0 \text{ m/s}}{22.2 \text{ m/s}}\right) = \arctan 0.450 = 24.2°$$

La dirección es 24.2° sobre la horizontal.

b) En el punto más alto, la velocidad vertical v_y es cero. ¿Cuándo sucede esto? Sea ese instante t_1; entonces

$$v_y = 0 = v_{0y} - gt_1$$
$$t_1 = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{29.6 \text{ m/s}}{9.80 \text{ m/s}^2} = 3.02 \text{ s}$$

La altura h es el valor de y cuando $t = t_1 = 3.02$ s:

$$h = v_{0y}t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2$$
$$= (29.6 \text{ m/s})(3.02 \text{ s}) - \frac{1}{2}(9.80 \text{ m/s}^2)(3.02 \text{ s})^2$$
$$= 44.7 \text{ m}$$

O bien, podemos aplicar la fórmula de aceleración constante (ecuación 2.13) al movimiento y:

$$v_y^2 = v_{0y}^2 + 2a_y(y - y_0) = v_{0y}^2 - 2g(y - y_0)$$

En el punto más alto, $v_y = 0$ y $y = h$. Sustituyendo esto y con $y_0 = 0$, tenemos

$$0 = v_{0y}^2 - 2gh$$

$$h = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{(29.6\ \text{m/s})^2}{2(9.80\ \text{m/s}^2)} = 44.7\ \text{m}$$

c) Obtendremos el alcance horizontal en dos pasos. Primero, *¿cuándo* cae la bola al suelo? Esto ocurre cuando $y = 0$. digamos, en t_2; entonces

$$y = 0 = v_{0y}t_2 - \frac{1}{2}gt_2^2 = t_2\left(v_{0y} - \frac{1}{2}gt_2\right)$$

Ésta es una ecuación cuadrática en t_2. Con dos raíces:

$$t_2 = 0 \quad \text{y} \quad t_2 = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2(29.6\ \text{m/s})}{9.80\ \text{m/s}^2} = 6.04\ \text{s}$$

Hay dos instantes en los que $y = 0$; $t_2 = 0$ es cuando la bola *parte* del suelo y $t_2 = 6.04$ s es cuando regresa. Esto es exactamente el doble del tiempo que tarda en llegar al punto más alto, así que el tiempo de subida es igual al de bajada. (Esto *siempre* sucede si los puntos inicial y final están a la misma altura y se puede despreciar la resistencia del aire; lo demostraremos en el ejemplo 3.10.)

El alcance horizontal R es el valor de x cuando la bola vuelve al suelo, o sea, en $t = 6.04$ s:

$$R = v_{0x}t_2 = (22.2\ \text{m/s})(6.04\ \text{s}) = 134\ \text{m}$$

La componente vertical de la velocidad cuando la bola toca el suelo es

$$v_y = v_{0y} - gt_2 = 29.6\ \text{m/s} - (9.80\ \text{m/s}^2)(6.04\ \text{s})$$
$$= -29.6\ \text{m/s}$$

Es decir, v_y tiene la misma magnitud que la velocidad vertical inicial v_{0y} pero dirección opuesta (hacia abajo). Dado que v_x es constante, el ángulo $\alpha = -53.1°$ (debajo de la horizontal) en este punto es el negativo del ángulo inicial $\alpha_0 = 53.1°$.

EVALUAR: ¿Son lógicos nuestros resultados numéricos? La altura máxima $h = 44.7$ m de la parte (b) es aproximadamente la mitad de la altura a la que está el techo del Skydome de Toronto sobre el campo de juego. El alcance horizontal $R = 134$ m de la parte (c) es mayor que la distancia de 93.6 m entre *home* y la barda del jardín derecho en el Pacific Bell Park de San Francisco. ¿Puede demostrar que, cuando la pelota llega a esta barda, está 37.7 m sobre el suelo? (Esta altura es más que suficiente para librar la barda, así que el batazo es un jonrón.)

Si la bola pudiera seguir viajando *debajo* de su nivel original (por un agujero de forma apropiada), podría haber valores negativos de y correspondientes a tiempos mayores que 6.04 s. ¿Puede calcular la posición y velocidad 7.55 s después del inicio (la última posición de la Fig. 3.18)? Los resultados son

$$x = 168\ \text{m} \qquad y = -55.8\ \text{m}$$
$$v_x = 22.2\ \text{m/s} \qquad v_y = -44.4\ \text{m/s}$$

Vale la pena señalar que, en el mundo real, una pelota bateada con la rapidez y ángulo iniciales que usamos aquí no alcanzará ni la altura ni la distancia que calculamos. (Si lo hiciera, los jonrones serían mucho más comunes y el béisbol sería un juego mucho menos interesante.) El motivo es que la resistencia del aire, que no se tomó en cuenta en el ejemplo, es en realidad un factor importante a las velocidades que suelen tener las pelotas lanzadas y bateadas.

Ejemplo 3.9 La cuidadora y el mono

Un mono listo escapa del zoológico. La cuidadora lo halla en un árbol. Como no logra atraerlo, apunta su rifle con un dardo sedante directamente al mono y dispara (Fig. 3.24). El astuto mono se suelta en el instante en que el dardo sale del rifle, pensando caer al suelo y escapar. Demuestre que el dardo *siempre* golpea al mono, sea cual sea su velocidad de salida (siempre que llegue al mono antes de que éste llegue al piso).

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: En este ejemplo, tenemos *dos* objetos que se mueven como proyectiles, el dardo sedante y el mono. Los objetos tienen posición y velocidad iniciales distintas, pero entran en movimiento de proyectil al mismo tiempo. Para demostrar que el dardo golpea al mono, debemos probar que hay un instante en que ambos tienen las mismas coordenadas x y y.

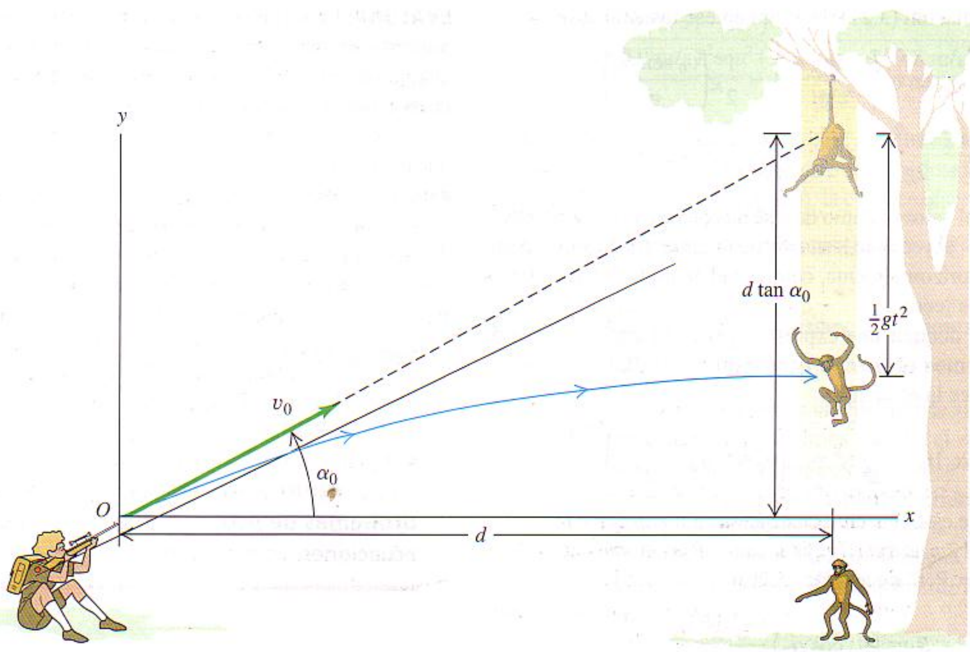
PLANTEAR: Escogemos las direcciones x y y acostumbradas, y colocamos el origen en el extremo del cañón del rifle. Primero usaremos la ecuación (3.20) para encontrar el tiempo t en el que las coordenadas x_{mono} y x_{dardo} son iguales. Luego usaremos la ecuación (3.21) para verificar si y_{mono} y y_{dardo} también son iguales en ese instante; *si lo son, el dardo golpeará al mono.*

EJECUTAR: El mono cae verticalmente, así que $x_{\text{mono}} = d$ en *todo* momento. En el caso del dardo, la ecuación (3.20) nos dice que $x_{\text{dardo}} = (v_0 \cos \alpha_0)t$. Cuando las coordenadas x son iguales, $d = (v_0 \cos \alpha_0)t$, o

$$t = \frac{d}{v_0 \cos \alpha_0}$$

Para que el dardo golpee al mono, debe cumplirse que $y_{\text{mono}} = y_{\text{dardo}}$ en este instante. El mono está en caída libre unidimensional; su posición está dada por la ecuación (2.12) cambiando debidamente los símbolos. La figura 3.24 muestra que la altura inicial del mono es $d \tan \alpha_0$ (el cateto opuesto de un triángulo recto con ángulo α_0 y cateto adyacente d), y obtenemos

$$y_{\text{mono}} = d \tan \alpha_0 - \frac{1}{2}gt^2$$



3.24 El dardo con sedante golpea al mono que cae.

Para el dardo usamos la ecuación (3.21):

$$y_{\text{dardo}} = (v_0 \operatorname{sen} \alpha_0)t - \frac{1}{2}gt^2$$

Vemos que, si $d \tan \alpha_0 = (v_0 \operatorname{sen} \alpha_0)t$ cuando las dos coordenadas x son iguales, entonces $y_{\text{mono}} = y_{\text{dardo}}$, y el dardo habrá acertado. Para demostrar que esto sucede, sustituimos t por $d/(v_0 \cos \alpha_0)$, el instante en que $x_{\text{mono}} = x_{\text{dardo}}$; así,

$$(v_0 \operatorname{sen} \alpha_0)t = (v_0 \operatorname{sen} \alpha_0)\frac{d}{v_0 \cos \alpha_0} = d \tan \alpha_0$$

EVALUAR: Hemos demostrado que, cuando las coordenadas x son iguales, las y también lo son; un dardo dirigido a la posición inicial del mono siempre lo golpea, sin importar v_0. Este resultado también es independiente de g, la aceleración debida a la gravedad. Sin gravedad $(g = 0)$, el mono no se movería, y el dardo viajaría en línea recta para golpearlo. Con gravedad, ambos "caen" la misma distancia $\left(\frac{1}{2}gt^2\right)$ por debajo de sus posiciones con $g = 0$ y el dardo de todos modos golpea al mono.

Ejemplo 3.10 Altura y alcance de un proyectil

Para un proyectil lanzado con rapidez v_0 y ángulo inicial α_0 (entre 0 y 90°), deduzca expresiones generales para la altura máxima h y el alcance horizontal R (Fig. 3.18). Para una v_0, dada, ¿qué valor de α_0 da la altura máxima? ¿Y alcance máximo?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Éste es realmente el mismo ejercicio que las partes (b) y (c) del ejemplo 3.8. La diferencia es que buscamos expresiones generales para h y R. También nos interesan los valores de α_0 que dan los valores máximos de h y R.

PLANTEAR: Igual que en el ejemplo 3.8, usamos el sistema de coordenadas de la figura 3.18. Por conveniencia, escogemos como origen la posición inicial del proyectil. Para determinar la altura h en el punto más alto de la trayectoria, usaremos la ecuación (3.23) para obtener el tiempo t_1 en el que $v_y = 0$, y luego obtendremos la coordenada y en ese instante con la ecuación (3.21). Para determinar R, primero usaremos la ecuación (3.21) para determinar el tiempo t_2 en el que $y = 0$ (es decir, cuando el proyectil regresa a su altura inicial) y luego sustituiremos t_2 en la ecuación (3.20) para determinar la coordenada x en t_2.

EJECUTAR: Por la ecuación (3.23), el tiempo t_1 en el que $v_y = 0$ está dado por la ecuación

$$v_y = v_0 \operatorname{sen} \alpha_0 - gt_1 = 0 \qquad t_1 = \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha_0}{g}$$

Luego, por la ecuación (3.21), la altura en ese instante es

$$h = v_0 \operatorname{sen} \alpha_0 \left(\frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha_0}{g} \right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha_0}{g} \right)^2$$

$$= \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \alpha_0}{2g}$$

Si variamos α_0, el valor máximo de h se da con $\operatorname{sen} \alpha_0 = 1$ y $\alpha_0 = 90°$; o sea, cuando el proyectil se lanza verticalmente. Esto es lo esperado. Si se lanza horizontalmente, como en el ejemplo 3.7, $\alpha_0 = 0$ y la altura máxima es ¡cero!

Si queremos deducir una expresión general para el alcance R, primero obtenemos el tiempo t_2 cuando $y = 0$. Por la ecuación (3.21), t_2 satisface la ecuación

$$(v_0 \operatorname{sen} \alpha_0) t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2 = t_2 \left(v_0 \operatorname{sen} \alpha_0 - \frac{1}{2} g t_2 \right) = 0$$

Las dos raíces de esta ecuación cuadrática en t_2 son $t_2 = 0$ (el lanzamiento) y $t_2 = (2v_0 \operatorname{sen} \alpha_0)/g$. El alcance R es el valor de x en el segundo instante. Por la ecuación (3.20),

$$R = (v_0 \cos \alpha_0) \frac{2v_0 \operatorname{sen} \alpha_0}{g}$$

Ahora podemos usar la identidad trigonométrica $2 \operatorname{sen} \alpha_0 \cos \alpha_0 = \operatorname{sen} 2\alpha_0$ para reescribir esto como

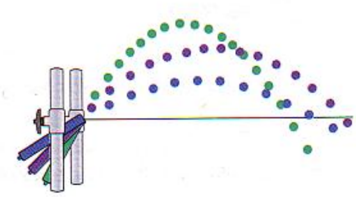
$$R = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha_0}{g}$$

El valor máximo de $\operatorname{sen} 2\alpha_0$ es 1; esto ocurre cuando $2\alpha_0 = 90°$, o $\alpha_0 = 45°$. Este ángulo da el máximo alcance para una velocidad inicial dada.

EVALUAR: La figura 3.25 se basa en una fotografía compuesta de 3 trayectorias de una bola proyectada desde un cañón de resorte con ángulos de 30°, 45° y 60°. La rapidez inicial v_0 es aproximadamente igual en los 3 casos. Los alcances son casi iguales con los ángulos de 30° y 60°, y el de 45° es el mayor que ambos. ¿Puede demostrar que para una v_0 dada el alcance es igual para un ángulo inicial α_0 que para $90° - \alpha_0$?

Comparando las expresiones para t_1 y t_2, vemos que $t_2 = 2t_1$; es decir, el tiempo de vuelo total es el doble del que toma llegar a la altura máxima. Se sigue que este último es igual al tiempo que toma regresar a la altura original, como afirmamos en el ejemplo 3.8.

CUIDADO No recomendamos memorizar las expresiones anteriores para h y R; son aplicables sólo en las circunstancias especiales que describimos. En particular, la expresión para R *sólo* puede usarse cuando las alturas de lanzamiento y aterrizaje son iguales. En muchos de los probemas de este capítulo *no* pueden aplicarse estas ecuaciones.



3.25 Un ángulo de disparo de 45° (en morado) produce el alcance horizontal máximo. El alcance es menor con 30° (azul) y 60° (verde).

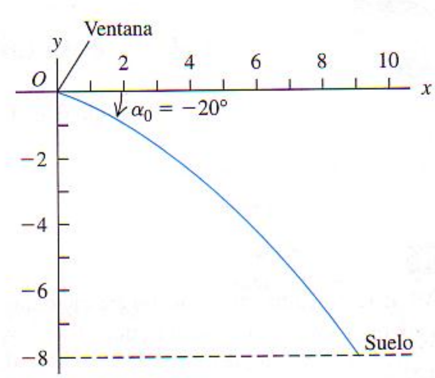
Ejemplo 3.11 Alturas inicial y final distintas

Imagine que lanza una pelota desde su ventana a 8.0 m del suelo. Cuando la pelota abandona su mano, se mueve a 10.0 m/s con un ángulo de 20° debajo de la horizontal. ¿A qué distancia horizontal de su ventana tocará la pelota el piso? Haga caso omiso de la resistencia del aire.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Al igual que en nuestro cálculo del alcance horizontal en los ejemplos 3.8 y 3.10, estamos tratando de hallar la coordenada horizontal de un proyectil cuando está a un valor dado de y. La diferencia en este caso es que este valor de y *no* es igual a la coordenada y inicial.

PLANTEAR: Una vez más, escogemos el eje x como horizontal, y el y, hacia arriba. Colocamos el origen de coordenadas en el punto en que la pelota abandona la mano, así que $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ (Fig. 3.26). Tenemos $v_0 = 10.0$ m/s y $\alpha_0 = -20°$; el ángulo es negativo porque v_0 está debajo de la horizontal. La variable meta es el valor de x en el punto en que la pelota llega al suelo; es decir, cuando $y = -8.0$ m.



3.26 Trayectoria de una pelota lanzada con cierto ángulo debajo de la horizontal.

Dado que las alturas inicial y final de la pelota son distintas, no podemos usar la expresión para el alcance horizontal del ejemplo 3.10. En vez de ello, usamos primero la ecuación (3.21) para hallar el instante t en que la pelota llega a $y = -8.0$ m, y luego calculamos el valor de x en ese instante, con la ecuación (3.20).

EJECUTAR: Para determinar t, reescribimos la ecuación (3.21) en la forma estándar de una ecuación cuadrática en t:

$$\frac{1}{2}gt^2 - (v_0 \operatorname{sen} \alpha_0)t + y = 0$$

Las raíces de esta ecuación son

$$t = \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha_0 \pm \sqrt{(-v_0 \operatorname{sen} \alpha_0)^2 - 4\left(\frac{1}{2}g\right)y}}{2\left(\frac{1}{2}g\right)}$$

$$= \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha_0 \pm \sqrt{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \alpha_0 - 2gy}}{g}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} (10.0 \text{ m/s}) \operatorname{sen}(-20°) \\ \pm\sqrt{(10.0 \text{ m/s})^2 \operatorname{sen}^2(-20°) - 2(9.8 \text{ m/s}^2)(-8.0 \text{ m})} \end{bmatrix}}{9.8 \text{ m/s}^2}$$

Podemos desechar la raíz negativa, pues se refiere a un tiempo previo al lanzamiento. La raíz positiva nos dice que la pelota tarda 0.98 s en llegar al suelo. Por la ecuación (3.20), la coordenada x en ese instante es

$$x = (v_0 \cos \alpha_0)t = (10.0 \text{ m/s})[\cos(-20°)](0.98 \text{ s})$$
$$= 9.2 \text{ m}$$

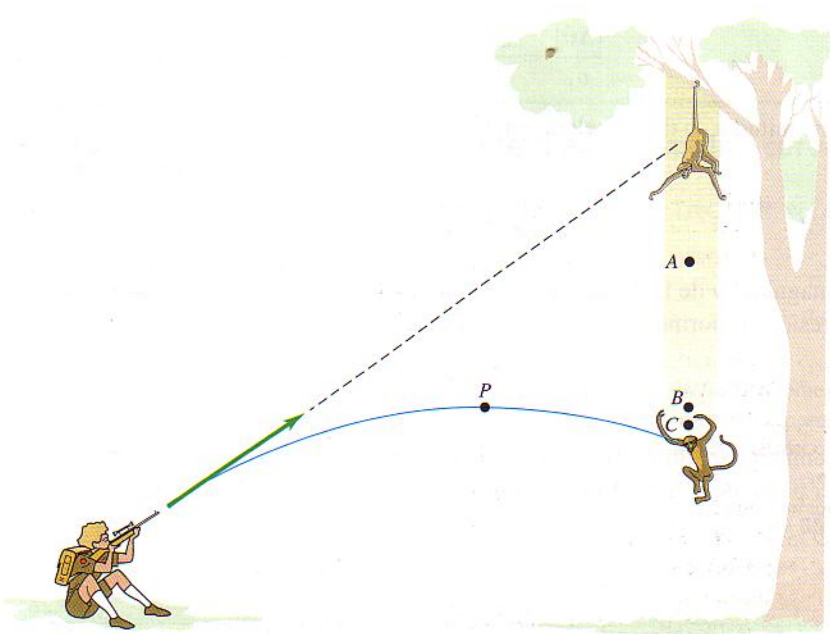
La pelota toca el suelo a una distancia horizontal de 9.2 m de la ventana.

EVALUAR: La raíz $t = -1.7$ s es un ejemplo de solución "ficticia" a una ecuación cuadrática. Ya vimos esto en el ejemplo 2.8 de la sección 2.5; le recomendamos repasarlo.

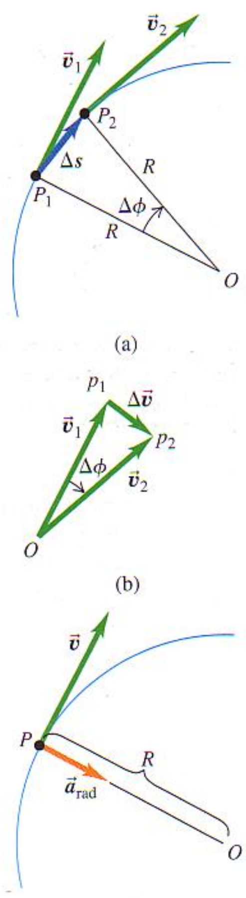
Con el origen que escogimos, teníamos alturas inicial y final $y_0 = 0$ y $y = -8.0$ m. ¿Puede demostrar, con la ayuda de las ecuaciones (3.16) y (3.18), que se obtienen los mismos valores de t y x si se coloca el origen en el suelo, inmediatamente abajo de donde la pelota abandona la mano?

Evalúe su comprensión

En el ejemplo 3.9, suponga que el dardo sedante tiene una velocidad de salida relativamente baja, de modo que el dardo alcanza su altura máxima en un punto P antes de golpear al mono (véase la Fig. 3.27). Cuando el dardo está en P, ¿el mono estará en el punto A (más alto que P), en el punto B (a la misma altura que P) o en el punto C (más abajo que P)? Haga caso omiso de la resistencia del aire.



3.27 Misma situación que en el ejemplo 3.9, pero con velocidad de salida baja.



3.28 Determinación del cambio de velocidad, $\Delta\vec{v}$, de una partícula que se mueve en un círculo con rapidez constante.

3.4 | Movimiento en un círculo

Cuando una partícula se mueve en una trayectoria curva, la dirección de su velocidad cambia. Como vimos en la sección 3.2, esto *implica* una componente de aceleración perpendicular a la trayectoria, aun si la rapidez es constante. Aquí calcularemos la aceleración para el caso especial importante de movimiento en un círculo.

Movimiento circular uniforme

Cuando una partícula se mueve en un círculo con *rapidez constante*, tiene un **movimiento circular uniforme**. Un auto que da vuelta a una curva de radio constante con rapidez constante, un satélite en órbita circular y un patinador que describe un círculo con rapidez constante son ejemplos de este movimiento. No hay componente de aceleración paralela (tangente) a la trayectoria; si la hubiera, la rapidez cambiaría. La componente de aceleración perpendicular (normal) a la trayectoria, que causa el cambio de dirección de la velocidad, tiene una relación sencilla con la rapidez de la partícula y el radio del círculo. Ahora deduciremos esa relación.

Primero observamos que este problema es distinto del movimiento de proyectil que vimos en la sección 3.3, donde la aceleración era constante, tanto en magnitud (g) como en dirección (hacia abajo). En el movimiento circular uniforme, la aceleración siempre es perpendicular a la velocidad; al cambiar la dirección de ésta, cambia la de la aceleración. Como veremos, el vector de aceleración en cada punto de la trayectoria apunta al *centro* del círculo.

La figura 3.28a muestra una partícula que se mueve con rapidez constante en una trayectoria circular de radio R centrada en O. La partícula se mueve de P_1 a P_2 en un tiempo Δt. El cambio vectorial en la velocidad $\Delta\vec{v}$ se muestra en la figura 3.28b.

Los ángulos rotulados $\Delta\phi$ en las figuras 3.28a y 3.28b son iguales porque $\vec{v}_1$ es perpendicular a la línea OP_1 y $\vec{v}_2$ es perpendicular a OP_2, y los triángulos OP_1P_2 (Fig. 3.28a) y Op_1p_2 (Fig. 3.28b) son *semejantes*. Los cocientes de lados correspondientes son iguales, así que

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{v_1} = \frac{\Delta s}{R} \quad \text{o} \quad |\Delta\vec{v}| = \frac{v_1}{R}\Delta s$$

La magnitud a_{med} de la aceleración media durante Δt es entonces

$$a_{med} = \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \frac{v_1}{R}\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

La magnitud a de la aceleración *instantánea* $\vec{a}$ en el punto P_1 es el límite de esta expresión conforme P_2 se acerca a P_1:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_1}{R}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v_1}{R}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Sin embargo, el límite de $\Delta s/\Delta t$ es la rapidez v_1 en P_1. Además, P_1 puede ser cualquier punto de la trayectoria, así que omitimos el subíndice y v representa la rapidez en cualquier punto. Así,

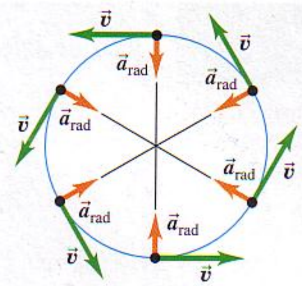
$$a_{rad} = \frac{v^2}{R} \qquad \text{(movimiento circular uniforme)} \qquad (3.28)$$

ActivPhysics ONLINE

4.1 Magnitud de aceleración centrípeta

Agregamos el subíndice "rad" para recordar que la dirección de la aceleración instantánea siempre sigue un radio del círculo, hacia su centro. Esto es congruente con lo dicho en la sección 3.2: el vector aceleración apunta al lado *cóncavo* de la trayectoria circular, o sea, hacia *adentro* del círculo (nunca hacia afuera). Dado que la rapidez es constante, la aceleración siempre es perpendicular a la velocidad instantánea. Esto se muestra en la figura 3.28c; compárela con la figura 3.12a.

En conclusión, *en el movimiento circular uniforme, la magnitud a de la aceleración instantánea es igual al cuadrado de la velocidad* v *dividido entre el radio* R *del círculo; su dirección es perpendicular a* $\vec{v}$ *y hacia adentro sobre el radio*. Puesto que la aceleración siempre apunta al centro del círculo, se le llama **aceleración centrípeta** ("que busca el centro", en griego). La figura 3.29 muestra las direcciones de los vectores de velocidad y aceleración en varios puntos para una partícula con movimiento circular uniforme. Compare esto con el movimiento de proyectil de la figura 3.18, donde la aceleración siempre es vertical hacia abajo y *no* perpendicular a la trayectoria, excepto en un punto.



3.29 Para una partícula en movimiento circular uniforme, la velocidad en cada punto es tangente al círculo y la aceleración está dirigida hacia el centro.

También podemos expresar la magnitud de la aceleración en un movimiento circular uniforme en términos del **periodo** T del movimiento, el tiempo de una revolución (una vuelta completa al círculo). En un tiempo T, la partícula recorre una distancia igual a la circunferencia $2\pi R$ así que su rapidez es

$$v = \frac{2\pi R}{T} \qquad (3.29)$$

Al sustituir esto en la ecuación (3.28), obtenemos la expresión alterna

$$a_{rad} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \qquad \text{(movimiento circular uniforme)} \qquad (3.30)$$

Ejemplo 3.12 Aceleración centrípeta en un camino curvo

Un automóvil BMW Z4 tiene "aceleración lateral" de $0.87g$, que es $(0.87)(9.8\ \text{m/s}^2) = 8.5\ \text{m/s}^2$. Ésta es la aceleración centrípeta máxima que puede lograrse sin salirse de la trayectoria circular derrapando. Si el auto viaja a 40 m/s (144 km/h), ¿cuál es el radio mínimo de curva que puede describir? (Suponga que no hay peralte.)

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Puesto que el coche se mueve en una curva —es decir, un segmento de círculo— con rapidez constante, podemos aplicar las ideas del movimiento circular uniforme. Específicamente, podemos usar la ecuación (3.28) para obtener la variable meta R (el radio de la curva) en términos de la aceleración centrípeta dada a_{rad} y la rapidez v.

EJECUTAR: Nos dan a_{rad} y v, así que despejamos R de la ecuación (3.28):

$$R = \frac{v^2}{a_{rad}} = \frac{(40\ \text{m/s})^2}{8.5\ \text{m/s}^2} = 190\ \text{m} \qquad \text{(unos 600 ft)}$$

EVALUAR: Nuestro resultado muestra que el radio de giro requerido R es proporcional al *cuadrado* de la rapidez. Por tanto, incluso una reducción pequeña en la rapidez puede reducir R considerablemente. Por ejemplo, si v disminuye en un 20% (de 40 a 32 m/s), R disminuirá en un 36% (de 190 m a 120 m).

Otra forma de reducir el radio requerido es *peraltar* la curva. Investigaremos esta opción en el capítulo 5.

Ejemplo 3.13 Aceleración centrípeta en un juego mecánico

En un juego mecánico, los pasajeros viajan con rapidez constante en un círculo de 5.0 m de radio, dando una vuelta cada 4.0 s. ¿Qué aceleración tienen?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: La rapidez es constante, así que es un problema de movimiento circular uniforme. Nos dan el radio $R = 5.0$ m y el periodo $T = 4.0$ s, así que podemos usar la ecuación (3.30) para calcular a. Como alternativa, podríamos calcular primero la rapidez v con la ecuación (3.29) y luego obtener la aceleración con la ecuación (3.28).

EJECUTAR: Por la ecuación (3.30),

$$a_{\text{rad}} = \frac{4\pi^2(5.0\text{ m})}{(4.0\text{ s})^2} = 12\text{ m/s}^2$$

Verificaremos esta respuesta usando la ecuación (3.28) después de calcular la rapidez v. Por la ecuación (3.29), la rapidez es la circunferencia dividida entre el periodo T:

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi(5.0\text{ m})}{4.0\text{ s}} = 7.9\text{ m/s}$$

La aceleración centrípeta es entonces

$$a_{\text{rad}} = \frac{v^2}{R} = \frac{(7.9\text{ m/s})^2}{5.0\text{ m}} = 12\text{ m/s}^2$$

Obtenemos el mismo valor de a_{rad} con ambas estrategias.

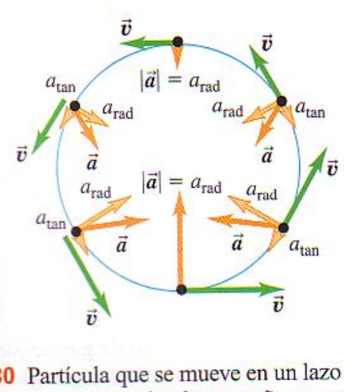
EVALUAR: Al igual que en el ejemplo anterior, la dirección de $\vec{a}$ siempre es hacia el centro del círculo. La magnitud de $\vec{a}$ es mayor que g, la aceleración debida a la gravedad, así que este juego mecánico sólo es para los audaces. (Algunas montañas rusas someten a sus pasajeros a aceleraciones de hasta $4g$.)

Movimiento circular no uniforme

En esta sección, hemos supuesto que la rapidez de la partícula es constante. Si la rapidez varía, tenemos un **movimiento circular no uniforme**. Un ejemplo es un carrito de montaña rusa que frena y se acelera al moverse en un lazo vertical. En el movimiento circular no uniforme, La ecuación (3.28) nos sigue dando la componente *radial* de la aceleración $a_{\text{rad}} = v^2/R$, siempre *perpendicular* a la velocidad instantánea y dirigida al centro del círculo. Sin embargo, dado que la rapidez v tiene diferentes valores en diferentes puntos, a_{rad} no es constante. La aceleración radial (centrípeta) es mayor donde v es mayor.

En el movimiento circular no uniforme también hay una componente de aceleración *paralela* a la velocidad instantánea. Ésta es la componente $a_{\parallel}$ que vimos en la sección 3.2, y aquí la llamamos a_{tan} para subrayar que es *tangente* al círculo. Por lo dicho al final de la sección 3.2, sabemos que a_{tan} es igual a la tasa de cambio de la *rapidez*. Entonces

$$a_{\text{rad}} = \frac{v^2}{R} \quad \text{y} \quad a_{\text{tan}} = \frac{d|\vec{v}|}{dt} \qquad \text{(movimiento circular no uniforme)} \qquad (3.31)$$



3.30 Partícula que se mueve en un lazo vertical, como un carrito de montaña rusa, con rapidez variable. La componente radial de la aceleración a_{rad} es máxima donde la rapidez es máxima (en la base del lazo) y mínima donde la rapidez es mínima (en la parte superior). La componente tangencial de la aceleración, a_{tan} tiene la misma dirección que $\vec{v}$ cuando la partícula se está acelerando (cuando va de bajada) y opuesta a $\vec{v}$ cuando está frenando (cuando va de subida).

El vector aceleración de una partícula que se mueve con rapidez variable en un círculo es la suma vectorial de las componentes de aceleración radial y tangencial. Esta última tiene la dirección de la velocidad si la partícula está acelerando, y la dirección opuesta si está frenando (Fig. 3.30).

En el movimiento circular *uniforme*, la aceleración no tiene componente tangencial, pero la componente radial es la magnitud de $d\vec{v}/dt$. Ya dijimos que, en general, $|d\vec{v}/dt|$ y $d|\vec{v}|/dt$ *no* son iguales. En el movimiento circular uniforme, la primera es constante e igual a v^2/R; la segunda es cero.

Evalúe su comprensión

Suponga que, en la parte inferior del lazo, el carro de la figura 3.30 experimenta una aceleración cuatro veces mayor que en la parte superior. Compare las rapideces en esos dos puntos del lazo.

3.5 | Velocidad relativa

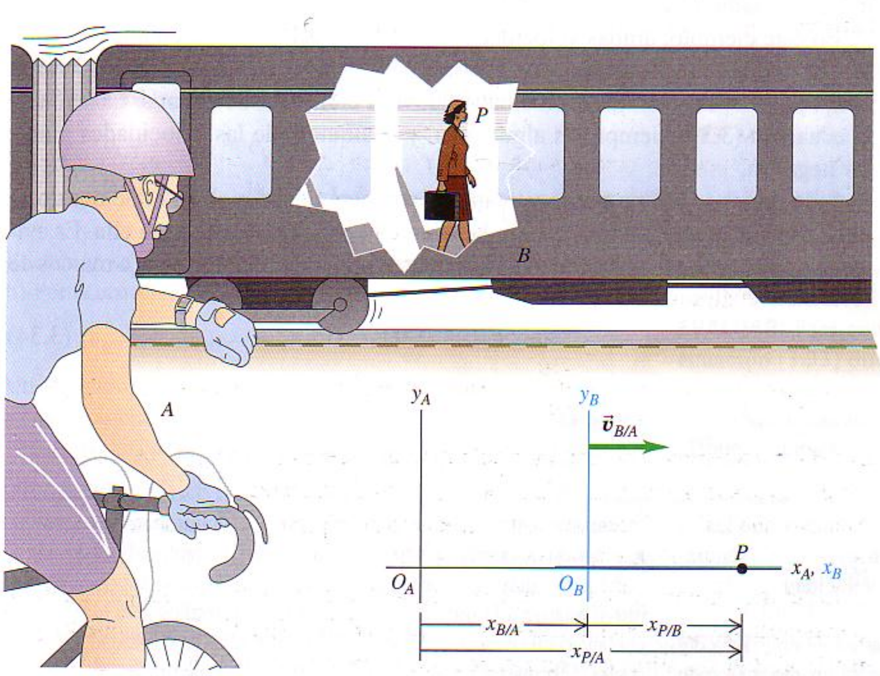
Sin duda el lector ha observado que un auto que avanza lentamente parece moverse hacia atrás cuando usted lo rebasa. En general, si dos observadores miden la velocidad de un cuerpo, obtienen diferentes resultados si un observador se mueve relativo al otro. La velocidad que un observador dado percibe es la velocidad *relativa* a él, o simplemente **velocidad relativa**. La figura 3.31 muestra una situación en la que entender la velocidad relativa es en extremo importante.

Primero consideraremos la velocidad relativa en línea recta, y luego la generalizaremos a un plano. Recuerde que en el movimiento rectilíneo (unidimensional), *velocidad* se refiere a la componente del vector velocidad sobre la línea de movimiento, y puede ser positiva, negativa o cero.

3.31 Los pilotos de acrobacias aéreas enfrentan un complicado problema de velocidades relativas. Deben estar pendientes de su velocidad relativa al aire (a fin de mantener un flujo de aire sobre las alas suficiente para la sustentación), su velocidad relativa a los otros aviones (para mantener una formación cerrada sin chocar) y su velocidad relativa al público (para que los espectadores no los pierdan de vista).

Velocidad relativa en una dimensión

Una mujer camina con velocidad de 1.0 m/s por el pasillo de un vagón de ferrocarril que se mueve a 3.0 m/s (Fig. 3.32a). ¿Qué velocidad tiene la mujer? Es una pregunta sencilla, pero no tiene una sola respuesta. Para un pasajero sentado en un tren, la mujer se mueve a 1.0 m/s. Para un ciclista parado junto al tren, la mujer se mueve a 1.0 m/s + 3.0 m/s = 4.0 m/s. Un observador en otro tren que va en la dirección opuesta daría otra respuesta. Debemos especificar quién es el observador y dar la velocidad *relativa* a él. La velocidad de la mujer relativa al tren es 1.0 m/s, relativa al ciclista es 4.0 m/s, etc. Cada observador, equipado en principio con un



(a) (b)

3.32 (a) Una mujer camina dentro de un tren. (b) En el instante que se muestra, la posición de la mujer (partícula *P*) relativa al marco de referencia *A* es diferente de su posición relativa al marco de referencia *B*.

metro y un cronómetro, constituye lo que llamamos un **marco de referencia**. Así, un marco de referencia es un sistema de coordenadas más una escala de tiempo.

Llamemos A al marco de referencia del ciclista (en reposo respecto al suelo) y B al del tren en movimiento (Fig. 3.32b). En el movimiento rectilíneo, la posición de un punto P relativa al marco de referencia A está dada por la distancia $x_{P/A}$ (la posición de P respecto a A), y la posición respecto al marco B está dada por $x_{P/B}$. La distancia del origen de A al origen de B (posición de B respecto a A) es $x_{B/A}$. Vemos en la figura que

$$x_{P/A} = x_{P/B} + x_{B/A} \tag{3.32}$$

Esto nos dice que la distancia total del origen de A al punto P es la distancia del origen de B a P más la distancia del origen de A al origen de B.

La velocidad de P relativa al marco A, denotada con $v_{P/A}$, es la derivada de $x_{P/A}$ respecto al tiempo. Las otras velocidades se obtienen igual, así que la derivada respecto al tiempo de la ecuación (3.32) nos da la relación entre las velocidades:

$$\frac{dx_{P/A}}{dt} = \frac{dx_{P/B}}{dt} + \frac{dx_{B/A}}{dt}$$

o sea

$$v_{P/A} = v_{P/B} + v_{B/A} \qquad \text{(velocidad relativa en una línea)} \tag{3.33}$$

Volviendo a la mujer en el tren, A es el marco de referencia del ciclista, B es el del tren, y el punto P representa a la mujer. Usando la notación anterior, tenemos

$$v_{P/B} = 1.0 \text{ m/s} \qquad v_{B/A} = 3.0 \text{ m/s}$$

Por la ecuación (3.33), la velocidad $v_{P/A}$ de la mujer relativa al ciclista es

$$v_{P/A} = 1.0 \text{ m/s} + 3.0 \text{ m/s} = 4.0 \text{ m/s}$$

lo cual ya sabíamos.

En este ejemplo, ambas velocidades son a la derecha, e implícitamente tomamos esta dirección como positiva. Si la mujer camina a la *izquierda* relativa al tren, $v_{P/B} = -1.0$ m/s, y su velocidad relativa al ciclista es de 2.0 m/s. La suma de la ecuación (3.33) siempre es algebraica, y cualquiera de las velocidades puede ser negativa.

Si la mujer se asoma por la ventana, le parecerá que el ciclista estacionario se mueve hacia atrás; llamamos $v_{A/P}$. a la velocidad del ciclista relativa a ella. Es evidente que ésta es el negativo de $v_{P/A}$. En general, si A y B son dos puntos o marcos de referencia cualesquiera,

$$v_{A/B} = -v_{B/A} \tag{3.34}$$

Estrategia para resolver problemas

Velocidad relativa

IDENTIFICAR *los conceptos pertinentes:* Siempre que lea la frase "velocidad relativa a" o "velocidad con respecto a", seguramente le resultarán útiles los conceptos de velocidad relativa.

PLANTEAR *el problema:* Rotule todos los marcos de referencia del problema. Cada objeto en movimiento tiene su propio marco de referencia; además, casi siempre será preciso incluir el marco de referencia de la superficie terrestre. (Frases como "el automóvil viaja al norte a 90 km/h" se refieren implícitamente a la velocidad del automóvil relativa a la superficie terrestre.) Use los rótulos para identificar la variable meta. Por ejemplo, si quiere obtener la velocidad de un coche (C) con respecto a un autobús (B), la variable meta será $v_{C/B}$.

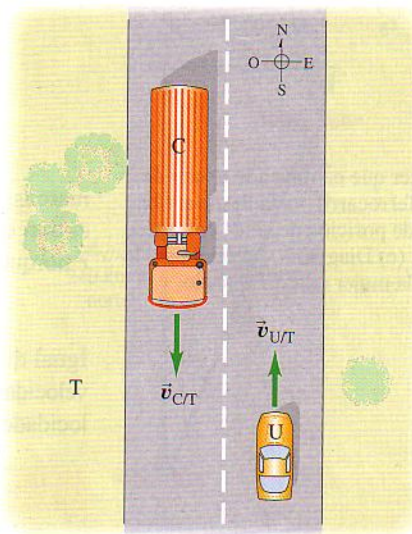
EJECUTAR *la solución:* Despeje la variable meta empleando la ecuación (3.33). (Si las velocidades no tienen la misma dirección, será preciso usar la forma vectorial de esta ecuación, que deduciremos más adelante en esta misma sección.) Es importante observar el orden de los dobles subíndices en la ecuación (3.33): $v_{A/B}$ siempre significa "velocidad de A relativa a B". Estos subíndices obedecen un tipo interesante de álgebra, como muestra la ecuación (3.33). Si los consideramos cada uno como una fracción, la fracción del miembro izquierdo es el *producto* de las fracciones del miembro derecho: $P/A = (P/B)(B/A)$. Puede usar esta útil regla al aplicar la ecuación (3.33) a cualquier cantidad de marcos de referencia. Por ejemplo, si hay tres marcos A, B y C, podemos escribir de inmediato

$$v_{P/A} = v_{P/C} + v_{C/B} + v_{B/A}$$

EVALUAR *la respuesta:* Esté pendiente de los signos menos en su respuesta. Si la variable meta es la velocidad de un auto relativa a un autobús $(v_{C/B})$, asegúrese de no haber calculado por equivocación la velocidad del *autobús* relativa al *auto* $(v_{B/C})$. Si cometió este error, la ecuación (3.34) le dará la respuesta correcta.

Ejemplo 3.14 Velocidad relativa en un camino recto

Imagine que viaja al norte en un camino recto de dos carriles a 88 km/h. Un camión que viaja a 104 km/h se acerca a usted (en el otro carril, no se preocupe). a) ¿Qué velocidad tiene el camión relativa a usted? b) ¿Y usted relativa al camión? c) ¿Cómo cambian las velocidades relativas una vez que los dos vehículos se han pasado?



3.33 Marcos de referencia para usted y el camión.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Sea usted U, el camión C y la Tierra T, y sea el norte la dirección positiva (Fig. 3.33). Entonces, su velocidad relativa a la Tierra es $v_{U/T} = +88$ km/h. En un principio, el camión se acerca, así que debe ir hacia el sur, o sea que $v_{C/T} = -104$ km/h. La variable meta en la parte (a) es $v_{C/U}$; la variable meta en la parte (b) es $v_{U/C}$. Obtendremos ambas respuestas utilizando la ecuación para velocidad relativa, ecuación (3.33).

EJECUTAR: a) Para obtener $v_{C/U}$, primero escribimos la ecuación (3.33) para los tres marcos, U, C y T, y luego reacomodamos:

$$v_{C/T} = v_{C/U} + v_{U/T}$$
$$v_{C/U} = v_{C/T} - v_{U/T}$$
$$= -104 \text{ km/h} - 88 \text{ km/h} = -192 \text{ km/h}$$

El camión se mueve a 192 km/h al sur relativo a Ud.

b) Por la ecuación (3.34),

$$v_{U/C} = -v_{C/U} = -(-192 \text{ km/h}) = +192 \text{ km/h}$$

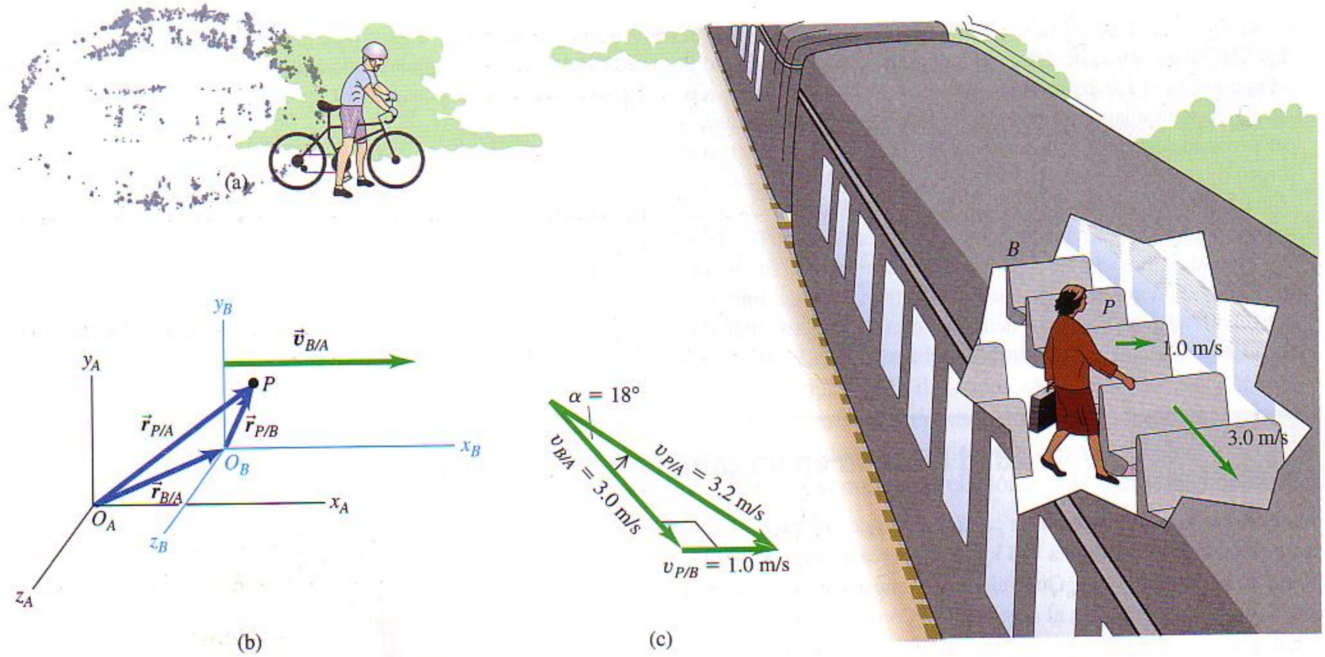
Ud. se mueve a 192 km/h al norte relativo al camión.

c) Las velocidades relativas no cambian después de pasarse los vehículos. Las posiciones relativas de los cuerpos no importan. La velocidad del camión relativa a usted sigue siendo -192 km/h, pero ahora se aleja en vez de acercarse.

EVALUAR: Para comprobar su respuesta de la parte (b), use la ecuación (3.33) directamente en la forma $v_{U/C} = v_{U/T} + v_{T/C}$. (Recuerde que la velocidad de la Tierra relativa al camión es opuesta a la velocidad del camión respecto a la Tierra: $v_{T/C} = -v_{C/T}$.) ¿Obtiene el mismo resultado?

Velocidad relativa en dos o tres dimensiones

Podemos extender el concepto de velocidad relativa al movimiento en un plano o en el espacio usando suma vectorial para combinar velocidades. Suponga que la mujer de la figura 3.32a camina no por el pasillo del vagón sino de un costado al otro, con rapidez de 1.0 m/s (Fig. 3.34a). También podemos describir su posición P en dos



3.34 (a) Mujer que camina a lo ancho de un vagón de ferrocarril, vista desde arriba. (b) El vector de posición depende del marco de referencia. (c) Diagrama vectorial para la velocidad de la mujer relativa al suelo.

marcos de referencia distintos, A para el observador terrestre estacionario y B para el tren en movimiento, pero en vez de coordenadas x usamos vectores de posición $\vec{r}$ porque el problema es bidimensional. Entonces, como muestra la figura 3.34b,

$$\vec{r}_{P/A} = \vec{r}_{P/B} + \vec{r}_{B/A} \tag{3.35}$$

Igual que antes, derivamos respecto al tiempo para obtener una relación entre las velocidades; la velocidad de P relativa a A es $\vec{v}_{P/A} = d\vec{r}_{P/A}/dt$, e igual para las demás velocidades. Obtenemos

$$\vec{v}_{P/A} = \vec{v}_{P/B} + \vec{v}_{B/A} \qquad \text{(velocidad relativa en el espacio)} \tag{3.36}$$

Si las tres velocidades están en la misma línea, la ecuación (3.36) se reduce a la ecuación (3.33) para las componentes de las velocidades en esa línea.

Si la velocidad del tren relativa al suelo tiene magnitud $v_{B/A} = 3.0$ m/s y la velocidad de la mujer relativa al vagón tiene magnitud $v_{P/B} = 1.0$ m/s, su vector velocidad $\vec{v}_{P/A}$ relativo al suelo es la mostrada en el diagrama vectorial de la figura 3.34c. El teorema de Pitágoras nos da

$$v_{P/A} = \sqrt{(3.0\text{ m/s})^2 + (1.0\text{ m/s})^2} = \sqrt{10\text{ m}^2/\text{s}^2} = 3.2\text{ m/s}$$

También es evidente en el diagrama que la *dirección* de su vector velocidad relativo al suelo forma un ángulo α con la velocidad del tren $\vec{v}_{B/A}$, donde

$$\tan\alpha = \frac{v_{P/B}}{v_{B/A}} = \frac{1.0\text{ m/s}}{3.0\text{ m/s}} \qquad \text{y} \qquad \alpha = 18°$$

Como en el caso del movimiento rectilíneo, tenemos la regla general de que si A y B son dos puntos o marcos de referencia *cualesquiera*,

$$\vec{v}_{A/B} = -\vec{v}_{B/A} \tag{3.37}$$

La velocidad de la mujer con respecto al tren es el negativo de la velocidad del tren con respecto a la mujer, etcétera.

La ecuación (3.36) se conoce como *transformada galileana de la velocidad*, y muestra que la velocidad de un objeto P con respecto al marco A y su velocidad con respecto al marco B ($\vec{v}_{P/A}$ y $\vec{v}_{P/B}$ respectivamente) están relacionadas por la velocidad del marco B con respecto al marco A $(\vec{v}_{P/B})$.

Ejemplo 3.15 Vuelo con viento cruzado

La brújula de un avión indica que va al norte, y su velocímetro indica que vuela a 240 km/h. Si hay un viento de 100 km/h de oeste a este, ¿cuál es la velocidad del avión relativa a la Tierra?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Es obvio que se trata de un problema de velocidad relativa, así que usaremos la ecuación (3.36) para hallar la velocidad del avión (V) relativa a la Tierra (T). Nos dan la magnitud y dirección de la velocidad del avión relativa al aire (A), así como la magnitud y dirección de la velocidad del viento, que es la velocidad del aire con respecto a la Tierra:

$$\vec{v}_{V/A} = 240 \text{ km/h} \quad \text{al norte}$$
$$\vec{v}_{A/T} = 100 \text{ km/h} \quad \text{al este}$$

Nuestras variables meta son la magnitud y dirección de $\vec{v}_{V/T}$.

EJECUTAR: Usando la ecuación (3.36), tenemos

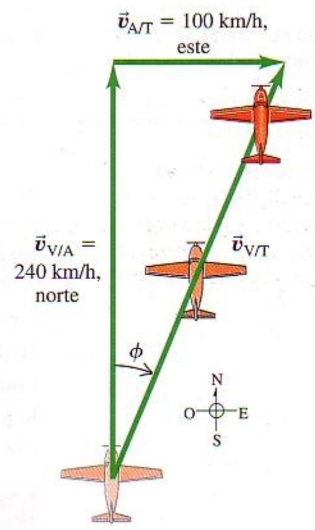
$$\vec{v}_{V/T} = \vec{v}_{V/A} + \vec{v}_{A/T}$$

Las tres velocidades relativas y su relación se muestran en la figura 3.35; las incógnitas son la rapidez $v_{V/T}$ y el ángulo ϕ. Del diagrama obtenemos

$$v_{V/T} = \sqrt{(240 \text{ km/h})^2 + (100 \text{ km/h})^2} = 260 \text{ km/h}$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{100 \text{ km/h}}{240 \text{ km/h}}\right) = 23° \text{ E de N}$$

EVALUAR: El viento lateral aumenta la rapidez del avión relativa al suelo, pero al precio de desviarlo de su curso.



3.35 El avión apunta al norte, pero el viento sopla al este, dando la velocidad resultante $\vec{v}_{V/T}$ relativa a la Tierra.

Ejemplo 3.16 Corrección por viento cruzado

En el ejemplo 3.15, ¿qué rumbo debe tomar el piloto para viajar al norte? ¿Cuál será su velocidad relativa a la tierra? (Suponga que su rapidez respecto al aire y la velocidad del viento son las del ejemplo 3.15.)

SOLUCIÓN

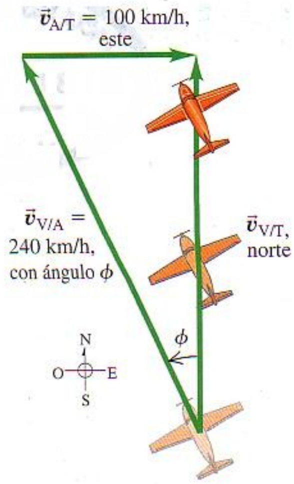
IDENTIFICAR: La figura 3.36 ilustra la situación. Ahí, los vectores se han acomodado según la ecuación vectorial de velocidad relativa, ecuación (3.36):

$$\vec{v}_{V/T} = \vec{v}_{V/A} + \vec{v}_{A/T}$$

Como muestra la figura 3.36, el piloto apunta la nariz del avión con un ángulo ϕ hacia el viento para compensar su efecto. Este ángulo, que nos da la dirección del vector $\vec{v}_{V/A}$ (la velocidad del avión relativa al aire), es una de nuestras variables meta. La otra es la rapidez del avión sobre el suelo, que es la magnitud del vector $\vec{v}_{V/T}$ (la velocidad del avión relativa a la Tierra). He aquí las cantidades que conocemos y que desconocemos:

$$\vec{v}_{V/T} = \text{magnitud desconocida} \quad \text{al norte}$$
$$\vec{v}_{V/A} = 240 \text{ km/h} \quad \text{dirección desconocida}$$
$$\vec{v}_{A/T} = 100 \text{ km/h} \quad \text{al este}$$

Podemos calcular las variables meta desconocidas empleando la figura 3.36 y trigonometría.



3.36 El piloto debe apuntar el avión en la dirección del vector $\vec{v}_{V/A}$ para viajar al norte relativo a la Tierra.

EJECUTAR: Por el diagrama, la rapidez $v_{V/T}$ y el ángulo ϕ están dados por

$$v_{V/T} = \sqrt{(240\text{ km/h})^2 - (100\text{ km/h})^2} = 218\text{ km/h}^2$$

$$\phi = \text{arcsen}\left(\frac{100\text{ km/h}}{240\text{ km/h}}\right) = 25°$$

El piloto debe dirigirse 25° al oeste del norte, y su rapidez respecto al suelo será de 218 km/h.

EVALUAR: Observe que había dos variables meta —la magnitud de un vector y la dirección de un vector— tanto en este ejemplo como en el 3.15. La diferencia es que, en el ejemplo 3.15, la magnitud y dirección se referían al *mismo* vector ($\vec{v}_{V/T}$), mientras que en este ejemplo se refieren a vectores distintos ($\vec{v}_{V/T}$ y $\vec{v}_{V/A}$).

No es sorpresa que un viento de frente reduzca la rapidez de un avión relativa al suelo. Lo que este ejemplo demuestra es que un *viento cruzado* también frena a los aviones; esta es una triste realidad de la aeronáutica.

Cuando dedujimos las ecuaciones de velocidad relativa, supusimos que todos los observadores usan la misma escala de tiempo. Aquí es precisamente donde la teoría de la relatividad especial de Einstein se aparta de la física de Galileo y de Newton. Cuando la rapidez se acerca a la de la luz, denotada con c, hay que modificar la ecuación de suma de velocidades. Resulta que si la mujer de la figura 3.32a pudiera caminar por el pasillo del vagón a $0.30c$ y el tren pudiera moverse a $0.90c$, la rapidez de ella relativa al suelo no sería $1.20c$ sino $0.94c$; ¡nada puede viajar con mayor rapidez que la luz! Volveremos a ver esto en el capítulo 37.

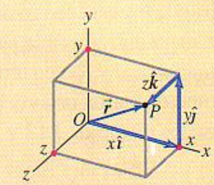
Evalúe su comprensión

Suponga que el viento del ejemplo 3.16 bajara repentinamente hasta cero, pero el piloto siguiera apuntando el avión 25° al oeste del norte. ¿Cuánto se habría desviado de su curso sur-norte después de una hora?

RESUMEN

El vector de posición $\vec{r}$ de un punto P en el espacio es el vector del origen a P. Sus componentes son las coordenadas x, y y z.

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k} \tag{3.1}$$

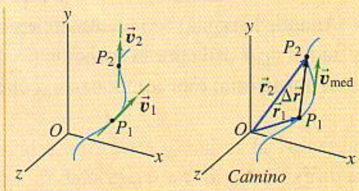


El vector velocidad media $\vec{v}_{\text{med}}$ durante el intervalo Δt es el desplazamiento $\Delta\vec{r}$ (el cambio del vector de posición $\vec{r}$) dividido entre Δt. El vector velocidad instantánea $\vec{v}$ es la derivada respecto al tiempo de $\vec{r}$, y sus componentes son las derivadas de x, y y z respecto al tiempo. La rapidez instantánea es la magnitud de $\vec{v}$. La velocidad $\vec{v}$ de una partícula siempre es tangente al camino de la partícula. (Véase el ejemplo 3.1.)

$$\vec{v}_{\text{med}} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \tag{3.2}$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{3.3}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v_y = \frac{dy}{dt} \qquad v_z = \frac{dz}{dt} \tag{3.4}$$

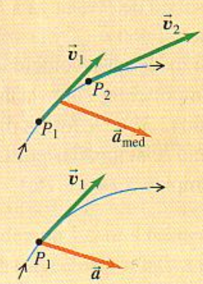


El vector aceleración media $\vec{a}_{\text{med}}$ durante el intervalo de tiempo Δt es igual a $\Delta\vec{v}$ (el cambio en el vector velocidad $\vec{v}$) dividido entre Δt. El vector aceleración instantánea $\vec{a}$ es la derivada de $\vec{v}$, respecto al tiempo, y sus componentes son las derivadas de v_x, v_y, y v_z. respecto al tiempo. (Véanse ejemplos 3.2 y 3.3.)

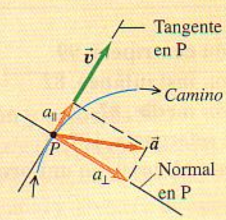
$$\vec{a}_{\text{med}} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \tag{3.8}$$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \tag{3.9}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt} \qquad a_z = \frac{dv_z}{dt} \tag{3.10}$$



La aceleración también puede representarse en términos de sus componentes paralela y perpendicular a la dirección de la velocidad instantánea. La componente paralela $\vec{a}$ afecta la rapidez, mientras que la componente perpendicular $\vec{a}$ afecta la dirección del movimiento. (Véanse los ejemplos 3.4 y 3.5.)



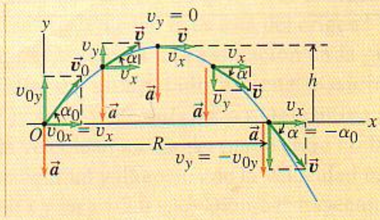
En el movimiento de proyectiles sin resistencia del aire, $a_x = 0$ y $a_y = -g$. Las coordenadas y componentes de la velocidad son funciones sencillas del tiempo, y la forma de la trayectoria siempre es una parábola. Por convención, colocamos el origen en la posición inicial del proyectil. (Véanse los ejemplos 3.6 a 3.11.)

$$x = (v_0 \cos\alpha_0)t \tag{3.20}$$

$$y = (v_0 \operatorname{sen}\alpha_0)t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{3.21}$$

$$v_x = v_0 \cos\alpha_0 \tag{3.22}$$

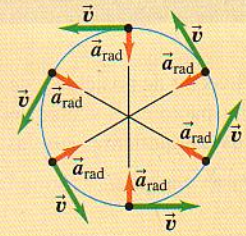
$$v_y = v_0 \operatorname{sen}\alpha_0 - gt \tag{3.23}$$



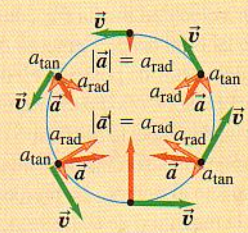
Cuando una partícula se mueve en una trayectoria circular de radio R con rapidez constante v, su aceleración $\vec{a}$ está dirigida hacia el centro del círculo y es perpendicular a $\vec{v}$. La magnitud a_{rad} de la aceleración se puede expresar en términos de v y R o en términos de R y el periodo T (el tiempo que tarda una vuelta), donde $v = 2\pi R/T$. (Véanse los ejemplos 3.12 y 3.13.)

$$a_{rad} = \frac{v^2}{R} \qquad (3.28)$$

$$a_{rad} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \qquad (3.30)$$



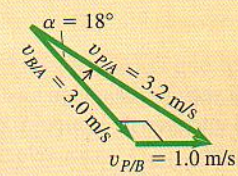
Aunque la rapidez en un movimiento circular no sea constante, habrá una componente radial de $\vec{a}$ dada por la ecuación (3.28) o la (3.30), pero también habrá una paralela a la trayectoria; esta componente $\vec{a}$ es igual a la tasa de cambio de la velocidad, dv/dt.



Cuando un cuerpo P se mueve relativo a un cuerpo (o marco de referencia) B, y B se mueve relativo a A, denotamos la velocidad de P relativa a B con $\vec{v}_{P/B}$, la velocidad de P relativa a A con $\vec{v}_{P/A}$, y la velocidad de B relativa a A con $\vec{v}_{B/A}$. Si todas estas velocidades están en la misma línea, sus componentes sobre la línea están relacionadas por la ecuación (3.33). De forma más general, estas velocidades están relacionadas por la ecuación (3.36). (Véanse los ejemplos 3.14 a 3.16.)

$v_{P/A} = v_{P/B} + v_{B/A}$
(velocidad relativa en una línea) (3.33)

$\vec{v}_{P/A} = \vec{v}_{P/B} + \vec{v}_{B/A}$
(velocidad relativa en el espacio) (3.36)



Términos clave

aceleración centrípeta, 99
aceleración instantánea, 82
aceleración media, 82
marco de referencia, 102
movimiento circular no uniforme, 100
movimiento circular uniforme, 98
periodo, 99
proyectil, 87
trayectoria, 87
vector de posición, 79
velocidad instantánea, 79
velocidad media, 79
velocidad relativa, 101

Notas del lector

Respuesta a la pregunta inicial del capítulo

En el ejemplo 3.10 (sección 3.3) demostramos que un proyectil tiene alcance horizontal máximo cuando se lanza con un ángulo de 45°.

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

Sección 3.1 El vector de velocidad media $\vec{v}_{med}$ a lo largo de un intervalo y la velocidad instantánea $\vec{v}$ al final del intervalo son iguales si la velocidad es constante durante ese intervalo.
Sección 3.2 En el punto más alto de la trayectoria del fragmento, la rapidez es mínima. En ese punto, la rapidez no está aumentando ni disminuyendo, y la componente paralela de la aceleración (es decir, la componente horizontal) es cero. La aceleración sólo tiene una componente perpendicular hacia el interior de la trayectoria curva del fragmento. Dicho de otro modo, la aceleración es hacia abajo. (Trataremos la aceleración de proyectiles más a fondo en la sección 3.3.)
Sección 3.3 Si no hubiera gravedad ($g = 0$), el mono no caería y el dardo seguiría una trayectoria recta (que aparece como línea interrumpida en la Fig. 3.27). El efecto de la gravedad es hacer que tanto el mono como el dardo caigan la misma distancia $\frac{1}{2}gt^2$ abajo de sus posiciones con $g = 0$. En la figura 3.27, el punto A está a la misma distancia abajo de la posición inicial del mono que el punto P está abajo de la recta interrumpida, así que el punto A es donde encontraríamos al mono en el instante de marras.
Sección 3.4 Tanto en la parte alta como en la baja del lazo, la aceleración es puramente radial y está dada por la ecuación (3.28). El radio R es el mismo en ambos puntos, así que la diferencia de aceleración se debe exclusivamente a diferencias de rapidez. Puesto que a_{rad} es proporcional al cuadrado de v, la rapidez deberá ser dos veces mayor en la parte baja del lazo que en la parte alta.
Sección 3.5 Al apuntar el avión hacia el oeste, el piloto hace que la velocidad del avión relativa al aire ($\vec{v}_{V/A}$) tenga una componente hacia el oeste de 100 km/h, apenas suficiente para cancelar el viento hacia el este. Si no hubiera viento, el avión derivaría al oeste 100 km en una hora.

Preguntas para análisis

P3.1 Un péndulo simple (una masa que oscila en un cordel) se mueve en un arco circular. ¿Qué dirección tiene su aceleración en los extremos del arco? ¿En el punto medio? En cada caso, explique cómo obtuvo su respuesta.
P3.2 Redibuje la figura 3.11a si $\vec{a}$ es antiparalela a $\vec{v}_1$. ¿La partícula se mueve en línea recta? ¿Qué pasa con la rapidez?
P3.3 Un proyectil se mueve en una trayectoria parabólica sin resistencia del aire. ¿Hay un punto donde $\vec{a}$ sea paralela a $\vec{v}$? ¿Y perpendicular a $\vec{v}$? Explique.
P3.4 Cuando se dispara un rifle a un blanco lejano, el cañón no se apunta exactamente al blanco. ¿Por qué? ¿El ángulo de corrección depende de la distancia al blanco?
P3.5 En el instante que dispara una bala horizontalmente de un arma, usted suelta una bala desde la altura del cañón. Si no hay resistencia del aire, ¿cuál bala toca el piso primero? Explique.
P3.6 Un paquete se deja caer de un avión que vuela en línea recta con altitud y rapidez constantes. Si se pudiera despreciar la resistencia del aire, ¿qué trayectoria del paquete observaría el piloto? ¿Y una persona en tierra?
P3.7 Dibuje las seis gráficas de las componentes x y y de posición, velocidad y aceleración contra el tiempo para un movimiento de proyectil con $x_0 = y_0 = 0$ y $0 < \alpha_0 < 90°$.
P3.8 Si $y_0 = 0$ y α_0 es negativo, y nunca puede ser positivo para un proyectil. Empero, la expresión de h del ejemplo 3.10 parece dar una altura máxima positiva para un α_0 negativo. Explique esta aparente contradicción.
P3.9 Si una rana puede saltar con la misma velocidad inicial sin importar la dirección (hacia adelante o hacia arriba), ¿qué relación hay entre la altura máxima y el alcance máximo de su salto, $R_{máx} = v_0^2/g$?
P3.10 Cuando un proyectil alcanza su altura máxima, ¿su rapidez es cero? Explique.
P3.11 En el movimiento circular uniforme, ¿cuál es la velocidad *media* durante una revolución? ¿Y la aceleración *media*? Explique.
P3.12 En el movimiento circular uniforme, ¿cómo cambia la aceleración cuando la rapidez aumenta al triple? ¿Y cuando el radio se reduce a la mitad?
P3.13 En el movimiento circular uniforme, la aceleración es perpendicular a la velocidad en todo instante. ¿Sigue siendo verdad esto cuando el movimiento no es uniforme, es decir, cuando la rapidez no es constante?
P3.14 Las gotas de lluvia suelen dejar rayas diagonales en las ventanas laterales de un auto en movimiento. ¿Por qué? ¿Es la misma explicación para las rayas diagonales en el parabrisas?
P3.15 En una tormenta con viento fuerte, ¿qué determina la orientación óptima de un paraguas?
P3.16 Imagine que está en la ribera oeste de un río que fluye al norte a 1.2 m/s. Usted nada con rapidez de 1.5 m/s relativa al agua y el río tiene 60 m de anchura. ¿Qué trayectoria relativa a tierra le permite cruzar en el menor tiempo? Explique su razonamiento.

Ejercicios

Sección 3.1 Vectores de posición y velocidad

3.1 Una ardilla tiene coordenadas x/y (1.1 m, 3.4 m) en $t_1 = 0$ y (5.3 m, −0.5 m) en $t_2 = 3.0$ s. Para este intervalo, obtenga a) las componentes de la velocidad media; b) la magnitud y dirección de esa velocidad.
3.2 Un rinoceronte está en el origen en $t_1 = 0$. Para el intervalo de $t_1 = 0$ a $t_2 = 12.0$ s, la velocidad media del animal tiene componente x de −3.8 m/s y componente y de 4.9 m/s. En t_2, a) ¿qué coordenadas x y y tiene el rinoceronte? b) ¿Qué tan lejos está del origen?
3.3 Un diseñador de páginas Web crea una animación en la que un punto en una pantalla de computadora tiene posición $\vec{r} = [4.0\text{ cm} + (2.5\text{ cm/s}^2)t^2]\hat{\imath} + (5.0\text{ cm/s})t\hat{\jmath}$. a) Determine la magnitud y dirección de la velocidad media del punto entre $t = 0$ y $t = 2.0$ s. b) Determine la magnitud y dirección de la velocidad instantánea en t = 0, en $t = 1.0$ s y en $t = 2.0$ s. c) Dibuje la trayectoria del punto de $t = 0$ a $t = 2.0$ s y muestre las velocidades calculadas en (b).

3.4 Si $\vec{r} = bt^2\hat{\imath} + ct^3\hat{\jmath}$, donde b y c son constantes positivas, ¿cuándo forma la velocidad un ángulo de 45° con los ejes x y y?

Sección 3.2 El vector aceleración

3.5 Un *jet* vuela a altitud constante. En el instante $t_1 = 0$, tiene componentes de velocidad $v_x = 90$ m/s, $v_y = 110$ m/s. En $t_2 = 30.0$ s, las componentes son $v_x = 170$ m/s, $v_y = 40$ m/s. a) Dibuje los vectores de velocidad en t_1 y t_2. ¿En qué difieren? Para este intervalo, calcule b) las componentes de la aceleración media; c) la magnitud y dirección de esta aceleración.

3.6 Un perro que corre en un campo tiene componentes de velocidad $v_x = 2.6$ m/s y $v_y = -1.8$ m/s en $t_1 = 10.0$ s. Para el intervalo de $t_1 = 10.0$ s a $t_2 = 20.0$ s, la aceleración media del perro tiene magnitud de 0.45 m/s^2 y dirección de 31.0° medida del eje $+x$ al eje $+y$. En $t_2 = 20.0$ s, a) ¿qué componentes x y y tiene la velocidad del perro? b) ¿Qué magnitud y dirección tiene esa velocidad? c) Dibuje los vectores de velocidad en t_1 y t_2. ¿En qué difieren?

3.7 Las coordenadas de un ave que vuela en el plano xy están dadas por $x(t) = \alpha t$ y $y(t) = 3.0\text{ m} - \beta t^2$, donde $\alpha = 2.4$ m/s y $\beta = 1.2$ m/s^2. a) Dibuje la trayectoria del ave entre $t = 0$ y $t = 2.0$ s. b) Calcule los vectores de velocidad y aceleración en función de t. c) Calcule la magnitud y dirección de la velocidad y aceleración del ave en $t = 2.0$ s. d) Dibuje los vectores de velocidad y aceleración en $t = 2.0$ s. En este instante, ¿el ave está acelerando, frenando o su rapidez no está cambiando instantáneamente? ¿Está dando vuelta? Si así es, ¿en qué dirección?

3.8 Una partícula sigue un camino como se muestra en la figura 3.37. Entre B y D, el camino es recto. Dibuje los vectores de aceleración en A, C y E si a) la partícula se mueve con rapidez constante; b) la rapidez aumenta continuamente; c) la rapidez disminuye continuamente.

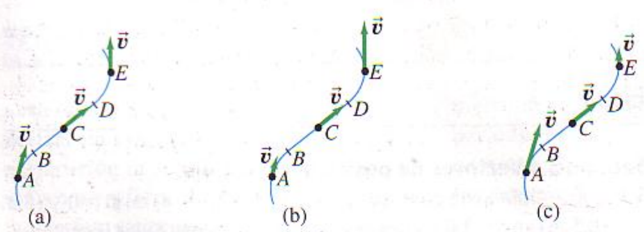


Figura 3.37 Ejercicio 3.8.

Sección 3.3 Movimiento de proyectiles

3.9 Un libro de física que se desliza sobre una mesa a 1.10 m/s cae al piso en 0.350 s. Haga caso omiso de la resistencia del aire. Calcule a) la altura de la mesa; c) la distancia horizontal del borde de la mesa al punto en el que cae el libro; c) las componentes horizontal y vertical, y la magnitud y dirección, de la velocidad del libro justo antes de tocar el piso. Dibuje gráficas x-t, y-t, v_x-t y v_y-t para el movimiento.

3.10 Un helicóptero militar en una misión de entrenamiento vuela horizontalmente con una rapidez de 60.0 m/s y accidentalmente suelta una bomba (por suerte no armada) a una altitud de 300 m. Puede despreciarse la resistencia del aire. a) ¿Qué tiempo tarda la bomba en llegar a tierra? b) ¿Qué distancia horizontal viaja mientras cae? c) Obtenga las componentes horizontal y vertical de su velocidad justo antes de tocar tierra. d) Dibuje gráficas x-t, y-t, v_x-t y v_y-t para el movimiento de la bomba. e) ¿Dónde está el helicóptero cuando la bomba toca tierra si la rapidez del helicóptero se mantuvo constante?

3.11 Dos grillos Chirpy y Milada, saltan desde lo alto de un acantilado vertical. Chirpy salta horizontalmente y llega al suelo en 3.50 s. Milada salta con una velocidad inicial de 95.0 cm/s y un ángulo de 32.0° arriba de la horizontal. ¿A qué distancia de la base del acantilado tocará Milada el suelo?

3.12 Una osada nadadora de 510 N se lanza desde un risco con un impulso horizontal, como se muestra en la figura 3.38. ¿Qué rapidez mínima debe tener al saltar de lo alto del risco para no chocar con la cornisa en la base, que tiene una anchura de 1.75 m y está 9.00 m abajo del borde superior del risco?

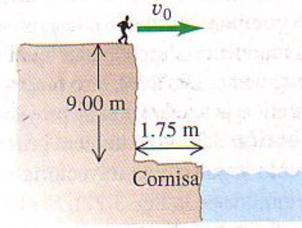


Figura 3.38 Ejercicio 3.12.

3.13 Salto del río I. Un automóvil de 10,000 N llega a un puente durante una tormenta y el conductor descubre que las aguas se lo han llevado. El conductor, que pesa 650 N, debe llegar al otro lado, así que decide tratar de saltar la brecha con su auto. La orilla en la que se encuentra está 21.3 m arriba del río, mientras que la orilla opuesta está sólo 1.8 m sobre las aguas. El río es un torrente embravecido con una anchura de 61.0 m. a) ¿Con qué rapidez se deberá estar moviendo el auto cuando llegue a la orilla para librar el río y llegar a salvo al otro lado? b) ¿Qué rapidez tendrá el auto justo antes de que toque tierra en la otra orilla?

3.14 Una estudiante apuesta a otra que puede rodar una canica de modo que caiga desde lo alto de una mesa en una taza colocada en el piso. Asegura poder hacerlo en el primer intento. En su lugar, ¿qué haría usted para determinar dónde colocar la taza? Explique qué mediciones efectuaría y cómo las usaría para determinar la colocación de la taza.

3.15 Imagine que lanza un balón de fútbol americano con una rapidez inicial $v_0 = 15.0$ m/s y un ángulo inicial $\alpha_0 = 45.0°$. a) Determine el tiempo T en que el balón alcanza su altura máxima. b) En tres instantes, $t_1 = T - 0.50$ s, $t_2 = T$ y $t_3 = T + 0.50$ s, obtenga las componentes x y y del vector de posición. c) En los tres instantes t_1, t_2 y t_3, determine la magnitud y dirección del vector velocidad. d) En los tres instantes t_1, t_2 y t_3, obtenga la componente del vector aceleración que es paralela (o antiparalela) a la velocidad, así como la que es perpendicular a ella. e) Dibuje la trayectoria del balón, rotulando la posición del balón en los tres instantes t_1, t_2 y t_3. En cada una de estas posiciones, dibuje el vector velocidad y las componentes paralela y perpendicular del vector aceleración. f) Explique cómo están cambiando la rapidez y la dirección del movimiento del balón en los tres instantes t_1, t_2 y t_3, y cómo los vectores de su dibujo describen esos cambios.

3.16 Una pelota de tenis que rueda cae del borde de una mesa a 0.750 m sobre el piso y toca el piso a 1.40 m horizontalmente del borde de la mesa. Puede despreciarse la resistencia del aire. a) Calcule el tiempo de vuelo. b) Calcule la magnitud de la velocidad inicial. c) Calcule la magnitud y dirección de la velocidad de la pelota justo antes de tocar el piso. d) Dibuje gráficas x-t, y-t, v_x-t y v_y-t pelota el movimiento.

3.17 Una pistola que dispara una luz bengala le imprime una rapidez inicial de 120 m/s. a) Si la bengala se dispara 55° sobre la horizontal en los salares planos de Utah, ¿qué alcance horizontal tiene? Haga caso omiso de la resistencia del aire. b) Si la bengala se dispara con el mismo ángulo en el mar de la Tranquilidad en la Luna, donde $g = 1.6\ \text{m/s}^2$, ¿qué alcance tiene?

3.18 Un mariscal de campo novato lanza un balón con componente de velocidad inicial hacia arriba de 16.0 m/s y horizontal de 20.0 m/s. Haga caso omiso de la resistencia del aire. a) ¿Cuánto tiempo tarda el balón en llegar al cenit de la trayectoria? b) ¿A qué altura está este punto? c) ¿Cuánto tiempo pasa desde que se lanza el balón hasta que vuelve a su nivel original? ¿Qué relación hay entre este tiempo y el calculado en (a)? d) ¿Qué distancia horizontal viaja el balón en este tiempo? e) Dibuje gráficas x-t, y-t, v_x-t y v_y-t para el movimiento.

3.19 Un pelotero de grandes ligas batea una pelota de modo que sale con una rapidez de 30.0 m/s y un ángulo de 36.9° sobre la horizontal. Puede despreciarse la resistencia del aire. a) ¿En cuáles *dos* instantes estuvo la bola 10.0 m sobre el punto en que se separó del bate? b) Calcule las componentes horizontal y vertical de la velocidad de la bola en esos dos instantes. c) ¿Qué magnitud y dirección tenía la velocidad de la bola al regresar al nivel en el que se bateó?

3.20 Un deportista lanzador de bala, la suelta a cierta distancia sobre el suelo plano con velocidad de 12.0 m/s, 51.0° sobre la horizontal. La bola toca el suelo 2.08 s después. Puede despreciarse la resistencia del aire. a) ¿Cuáles son las componentes de la aceleración de la bala en vuelo? b) ¿Cuáles son las componentes de la velocidad de la bala al principio y el final de su trayectoria? c) A qué distancia horizontal llegó la bala? d) ¿Por qué la expresión para R del ejercicio 3.10 *no* da la respuesta correcta para la parte (c)? e) ¿A qué altura sobre el suelo se soltó la bala? f) Dibuje gráficas x-t, y-t, v_x-t y v_y-t para el movimiento.

3.21 Gane el premio. En una feria, se gana una jirafa de peluche lanzando una moneda a un platito, el cual está en una repisa más arriba del punto en que la moneda abandona la mano y a una distancia horizontal de 2.1 m de ese punto (Fig. 3.39). Si lanza la moneda con velocidad de 6.4 m/s, 60° sobre la horizontal, caerá en el platito. Puede despreciarse la resistencia del aire. a) ¿A qué altura está la repisa sobre el punto de partida de la moneda? b) ¿Qué componente vertical tiene la velocidad de la moneda justo antes de caer en el platito?

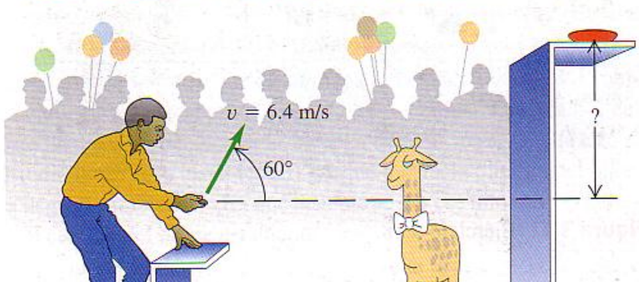


Figura 3.39 Ejercicio 3.21.

3.22 Suponga que el ángulo inicial α_0 de la figura 3.24 es 42.0° y la distancia d es 3.00 m. ¿Dónde chocarán el dardo y el mono si la rapidez inicial del dardo es a) 12.0 m/s? b) ¿8.0 m/s? c) ¿Qué sucederá si la rapidez inicial del dardo es de 4.0 m/s? Dibuje la trayectoria en cada caso.

3.23 Un hombre está parado en la azotea de un edificio de 15.0 m y lanza una piedra con velocidad de 30.0 m/s en un ángulo de, 33.0° sobre la horizontal. Puede despreciarse la resistencia del aire. Calcule a) la altura máxima que alcanza la roca sobre la azotea; b) la magnitud de la velocidad de la piedra justo antes de golpear el suelo; c) la distancia horizontal desde la base del edificio al punto donde la roca golpea el suelo. d) Dibuje gráficas x-t, y-t, v_x-t y v_y-t para el movimiento.

3.24 Los bomberos están lanzando un chorro de agua a un edificio en llamas utilizando una manguera de alta presión que imprime al agua una rapidez de 25.0 m/s al salir por la boquilla. Una vez que sale de la manguera, el agua se mueve con movimiento de proyectil. Los bomberos ajustan el ángulo de elevación α de la manguera hasta que el agua tarda 3.00 s en llegar a un edificio que está a 45.0 m de distancia. Haga caso omiso de la resistencia del aire y suponga que la boquilla de la manguera está a nivel del suelo. a) Calcule el ángulo α. b) Determine la rapidez y aceleración del agua en el punto más alto de su trayectoria. c) ¿A qué altura sobre el suelo incide el agua sobre el edificio, y con qué rapidez lo hace?

3.25 Un globo de 124 kg que lleva una canastilla de 22 kg está descendiendo con rapidez constante hacia abajo de 20.0 m/s. Una piedra de 1.0 kg se lanza desde la canastilla con una velocidad inicial de 15.0 m/s perpendicular a la trayectoria del globo, medida relativa a una persona en reposo en la canasta. Esa persona ve que la piedra choca con el suelo 6.00 s después de lanzarse. Suponga que el globo continúa su descenso a 20.0 m/s. a) ¿A qué altura estaba el globo cuando se lanzó la piedra? b) ¿Y cuando chocó con el suelo? c) En el instante en que la piedra tocó el suelo, ¿a qué distancia estaba de la canastilla? d) Determine las componentes horizontal y vertical de la velocidad de la piedra justo antes de chocar con el suelo, relativas a un observador i) en reposo en la canastilla; ii) en reposo en el suelo.

3.26 Un cañón, situado a 60.0 m de la base de un risco vertical de 25.0 m de altura, dispara un obús de 15 kg con un ángulo de 43.0° sobre la horizontal, hacia el risco. a) ¿Qué velocidad mínima de salida debe tener el obús para librar el borde superior del risco? b) El suelo en la parte superior del risco es plano, con una altura constante de 25.0 m sobre el cañón. En las condiciones de la parte (a), ¿a qué distancia del borde del risco cae el obús?

3.27 Un avión vuela con una velocidad de 90.0 m/s y un ángulo de 23.0° arriba de la horizontal. Cuando está 114 m directamente arriba de un perro parado en suelo plano, se cae una maleta del compartimiento de equipaje. ¿A qué distancia del perro caerá la maleta? Haga caso omiso de la resistencia del aire.

Sección 3.4 Movimiento en un círculo

3.28 Imagine que, en su primer día de trabajo para un fabricante de electrodomésticos, le piden averiguar qué hacerle al periodo de rotación de una lavadora para triplicar la aceleración centrípeta, y usted impresiona a su jefe contestando inmediatamente. ¿Qué contesta?

3.29 La Tierra tiene 6380 km de radio y gira una vez sobre su eje en 24 h. a) ¿Qué aceleración radial tiene un objeto en el ecuador? Dé su respuesta en m/s^2 y como fracción de g. b) Si a_{rad} en el ecuador fuera mayor que g, los objetos saldrían volando al espacio. (Veremos por qué en el capítulo 5.) ¿Cuál tendría que ser el periodo de rotación para que esto sucediera?

3.30 Un modelo de rotor de helicóptero tiene cuatro aspas, cada una de 3.20 m de longitud desde el eje central hasta la punta. El modelo se gira en un túnel de viento a 550 rpm. a) ¿Qué rapidez lineal tiene la punta del aspa en m/s? b) ¿Qué aceleración radial tiene la punta del aspa, expresada como un múltiplo de g?

3.31 En una prueba de un "traje g", un voluntario gira en un círculo horizontal de 7.0 m de radio. ¿Con qué periodo la aceleración centrípeta tiene magnitud de a) $3.0g$? b) $¿10g$?

3.32 El radio de la órbita terrestre alrededor del Sol (suponiendo que fuera circular) es de 1.50×10^8 km, y la Tierra la recorre en 365 días. a) Calcule la magnitud de la velocidad orbital de la Tierra en m/s. b) Calcule la aceleración radial hacia el Sol en m/s^2. c) Repita las partes (a) y (b) para el movimiento del planeta Mercurio (radio orbital = 5.79×10^7 km, periodo orbital = 88.0 días).

3.33 Una rueda de la fortuna de 14.0 m de radio gira sobre un eje horizontal en el centro (Fig. 3.40). La rapidez lineal de un pasajero en el borde es constante e igual a 7.00 m/s. ¿Qué magnitud y dirección tiene la aceleración del pasajero al pasar a) por el punto más bajo de su movimiento circular? b) ¿Por el punto más alto? c) ¿Cuánto tarda una revolución de la rueda?

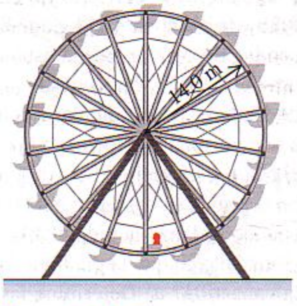


Figura 3.40 Ejercicios 3.33 y 3.34.

3.34 La rueda de la figura 3.40, que gira en sentido antihorario, se acaba de poner en movimiento. En un instante dado, un pasajero en el borde de la rueda que está pasando por el punto más bajo de su movimiento circular tiene una rapidez de 3.00 m/s, la cual está aumentando a razón de 0.500 m/s^2. a) Calcule la magnitud y la dirección de la aceleración del pasajero en este instante. b) Dibuje la rueda de la fortuna y el pasajero mostrando sus vectores de velocidad y aceleración.

3.35 Camino elíptico. Una pista plana de carreras tiene forma de elipse. (Consulte su texto de matemáticas, un diccionario o una enciclopedia para ver la ilustración de una elipse.) Un auto da vueltas por esta pista con rapidez constante. a) Dibuje la pista mostrando los vectores de velocidad y aceleración del auto en cinco o más puntos distintos de la pista. b) ¿El vector aceleración siempre apunta hacia el centro geométrico de la elipse? Explique. c) En qué punto(s) de la elipse la aceleración del auto tiene magnitud máxima? Explique.

Sección 3.5 Velocidad relativa

3.36 Un furgón plano de ferrocarril viaja a la derecha con rapidez de 13.0 m/s relativa a un observador que está parado en tierra. Alguien se mueve en la motoneta sobre el furgón (Fig. 3.41). ¿Qué velocidad (magnitud y dirección) tiene la motoneta relativa al furgón si su velocidad relativa al observador es a) 18.0 m/s a la derecha? b) ¿3.0 m/s a la izquierda? c) ¿Cero?

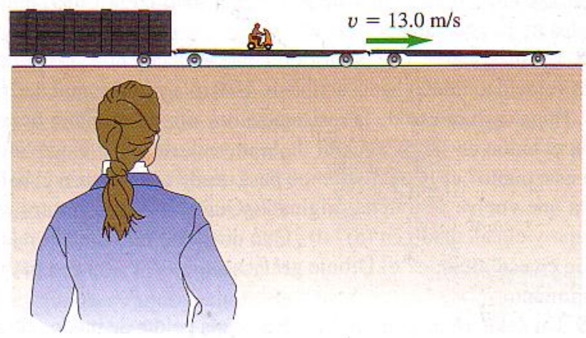


Figura 3.41 Ejercicio 3.36.

3.37 Una "banda móvil" de un aeropuerto se mueve a 1.0 m/s y tiene 35.0 m de largo. Si una mujer entra en un extremo y camina a 1.5 m/s relativa a la banda móvil, ¿cuánto tardará en llegar al otro extremo si camina a) en la misma dirección en que se mueve la banda? b) ¿En la dirección opuesta?

3.38 Dos muelles, A y B, están situados en un río; B está 1500 m río abajo de A (Fig. 3.42). Dos amigos deben ir de A a B y regresar. Uno rema un bote con rapidez constante de 4.00 km/h relativa al agua; el otro camina en tierra a 4.00 km/h (constante). La velocidad del río es 2.80 km/h en la dirección de A a B. ¿Cuánto tarda cada persona en hacer el viaje redondo?

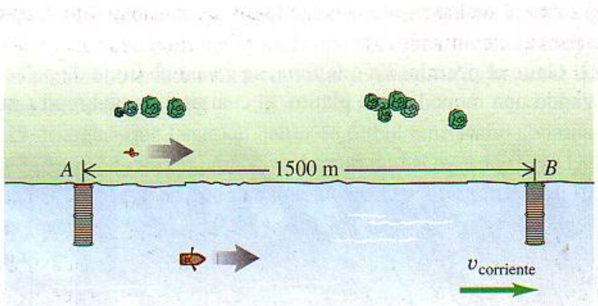


Figura 3.42 Ejercicio 3.38.

3.39 Una canoa tiene velocidad de 0.40 m/s al sureste, relativa a la Tierra. La canoa está en un río que fluye al este a 0.50 m/s relativa a la Tierra. Calcule la velocidad (magnitud y dirección) de la canoa relativa al río.

3.40 Un piloto desea volar al oeste. Un viento de 80.0 km/h sopla al sur. a) Si la rapidez en aire estacionario del avión es de 320.0 km/h, ¿qué rumbo debe tomar el piloto? b) ¿Cuál es la rapidez del avión sobre el suelo? Ilustre con un diagrama vectorial.

3.41 Cruce del río I. Un río fluye al sur a 2.0 m/s. Un hombre cruza el río en una lancha de motor con velocidad relativa al agua de 4.2 m/s al este. El río tiene 800 m de anchura. a) ¿Qué velocidad (magnitud y dirección) tiene la lancha relativa a la Tierra? b) ¿Cuánto tiempo tarda en cruzar el río? c) ¿A qué distancia al sur de su punto de partida llegará a la otra orilla?

3.42 Cruce del río II. a) ¿Qué dirección debe tomar la lancha del ejercicio 3.41 para llegar a un punto en la orilla opuesta directamente al este de su punto de partida? (La rapidez de la lancha relativa al agua sigue siendo 4.2 m/s.) b) ¿Qué velocidad tendría la lancha relativa a la Tierra? c) ¿Cuánto tardaría en cruzar?

3.43 La nariz de un avión ultraligero apunta al sur, y el velocímetro indica 35 m/s. Hay un viento de 10 m/s que sopla al suroeste relativo a la Tierra. a) Dibuje un diagrama de suma vectorial que muestre la relación de $\vec{v}_{V/T}$ (velocidad del avión relativa a la Tierra) con los dos vectores dados. b) Si x es al este y y al norte, obtenga las componentes de $\vec{v}_{V/T}$. c) Obtenga la magnitud y dirección de $\vec{v}_{V/T}$.

Problemas

3.44 Un cohete de modelo defectuoso se mueve en el plano xy (la dirección $+y$ es vertical hacia arriba). La aceleración del cohete tiene componentes dadas por $a_x(t) = \alpha t^2$ $a_y(t) = \beta - \gamma t$ donde ($\alpha = 2.50\ \text{m/s}^4$, $\beta = 9.00\ \text{m/s}^2$ y $\gamma = 1.40\ \text{m/s}^3$). En $t = 0$ el cohete está en el origen y tiene velocidad inicial $\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{\imath} + v_{0y}\hat{\jmath}$ con $v_{0x} = 1.00$ m/s y $v_{0y} = 7.00$ m/s. a) Calcule los vectores de velocidad y posición en función del tiempo. b) ¿Qué altura máxima alcanza el cohete? c) Dibuje el camino que sigue el cohete. d) ¿Qué desplazamiento horizontal tiene el cohete al volver a $y = 0$?

3.45 Un estudiante se mueve en el plano xy en un cuarto oscuro, tratando de encontrar un billete de \$20 que perdió. Las coordenadas del estudiante, en función del tiempo, están dadas por $x(t) = \alpha t$ y $y(t) = 15.0\ \text{m} - \beta t^2$. donde $\alpha = 1.20$ m/s y $\beta = 0.500\ \text{m/s}^2$. El billete está en el origen (aunque el estudiante no lo sabe). a) ¿En qué instantes la velocidad del estudiante es perpendicular a su aceleración? b) ¿En qué instantes la rapidez del estudiante no está cambiando instantáneamente? c) ¿En qué instantes la velocidad del estudiante es perpendicular a su vector de posición? ¿Dónde está el estudiante en esos instantes? d) ¿A qué distancia mínima del billete llegó el estudiante? ¿En qué instante se dio ese mínimo? e) Dibuje el camino del pobre estudiante.

3.46 Un ave vuela en el plano xy con velocidad $\vec{v} = (\alpha - \beta t^2)\hat{\imath} + \gamma t\hat{\jmath}$, donde $\alpha = 2.4$ m/s, $\beta = 1.6\ \text{m/s}^3$ y $\gamma = 4.0\ \text{m/s}^2$. La dirección $+y$ es vertical hacia arriba. En $t = 0$, el ave está en el origen. a) Calcule los vectores de posición y aceleración del ave en función de t. b) ¿Qué altura (coordenada y) tiene el ave al volar sobre $x = 0$ por primera vez después de $t = 0$?

3.47 Una Piper Warrior, avioneta de cuatro plazas, requiere 300 m de pista para poder despegar. Su rapidez para el ascenso es de 88 km/h; luego asciende con rapidez constante de 88 km/h en línea recta, librando apenas un cable tendido a 15 m de altura a una distancia horizontal de 460 m de donde partió del reposo. a) ¿Qué aceleración (que suponemos constante) tuvo la avioneta en tierra? b) Ya en el aire, ¿qué ángulo de vuelo tiene sobre la horizontal? c) ¿Qué tasa de ascenso (en m/s) tiene la avioneta? d) ¿Cuánto tiempo pasa desde que la nave empieza a rodar hasta que libra el cable?

3.48 Un entrenador de atletismo (que también es profesor de física) entrena a un atleta en el lanzamiento de la jabalina de modo que la lance desde una altura h sobre el suelo con una rapidez de $\sqrt{25gh/8}$ y un ángulo de 36.9° sobre la horizontal. La jabalina continúa su vuelo hasta caer al suelo. El campo es plano y la resistencia del aire es insignificante. a) Grafique las velocidades horizontal y vertical de la jabalina contra el tiempo. b) Determine la altura máxima alcanzada por la jabalina. c) Calcule la distancia horizontal que cubre la jabalina desde que el atleta la suelta hasta que se clava en el campo.

3.49 ¡Dinamita! Una cuadrilla de demolición usa dinamita para derribar un edificio viejo. Los fragmentos del edificio salen disparados en todas direcciones, y después se encuentran a distancias de hasta 50 m de la explosión. Estime la rapidez máxima con que salieron disparados los fragmentos. Describa todas las suposiciones que haga.

3.50 Espiral ascendente. Es común ver a las aves de presa ascender en corrientes calientes de aire, por lo general describiendo una trayectoria espiral. Se puede modelar un movimiento espiral como movimiento circular uniforme combinado con una velocidad constante hacia arriba. Suponga que un ave describe un círculo completo de radio 8.00 m cada 5.00 s y asciende verticalmente a razón de 3.00 m/s. Determine lo siguiente: a) la rapidez del ave relativa al suelo; b) la aceleración del ave (magnitud y dirección); c) el ángulo entre el vector de velocidad del ave y la horizontal.

3.51 Un veterinario de la selva provisto de una cerbatana cargada con un dardo sedante y un mono astuto de 1.5 kg están 25 m arriba del suelo en árboles separados 90 m. En el momento justo en que el veterinario dispara el dardo horizontalmente al mono, éste se deja caer del árbol en un vano intento por escapar del dardo. ¿Qué velocidad de salida mínima debe tener el dardo para golpear al mono antes de que éste llegue al suelo?

3.52 Una doble de cine se deja caer desde un helicóptero que está 30.0 m sobre el suelo y se mueve con velocidad constante cuyos componentes son 10.0 m/s hacia arriba y 15.0 m horizontal hacia el sur. Haga caso omiso de la resistencia del aire. a) En qué punto del suelo (relativo a la posición del helicóptero cuando se suelta) deberá haber colocado ella los colchones que amortiguan el golpe? b) Dibuje gráficas x-t, y-t, v_x-t y v_y-t para el movimiento.

3.53 Al combatir los incendios forestales, los aviones apoyan a los equipos terrestres dejando caer agua sobre el fuego. Un piloto practica tirando un bote con tinte rojo, tratando de atinarle a un blanco en el suelo. Si el avión vuela horizontalmente a 90.0 m de altura con rapidez de 64.0 m/s, a qué distancia horizontal del blanco deberá soltar el bote? Haga caso omiso de la resistencia del aire.

33.54 No haga esto I. Una chica lanza un globo lleno de agua a 50.0° sobre la horizontal con rapidez de 12.0 m/s. La componente

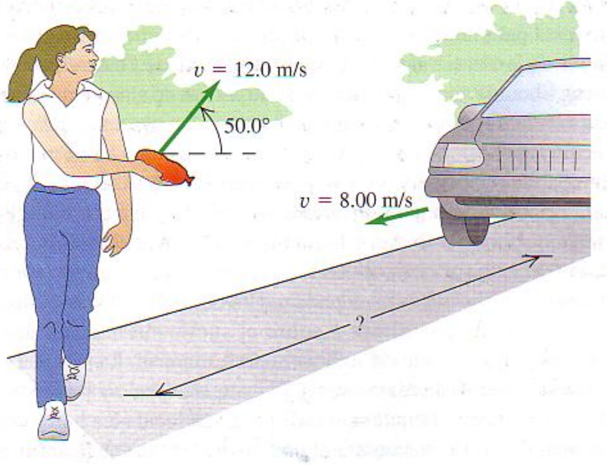


Figura 3.43 Problema 3.54.

horizontal de la velocidad del globo va dirigida a un auto que avanza hacia la chica a 8.00 m/s (Fig. 3.43). Para que el globo golpee el auto a la misma altura que tenía al ser lanzado, ¿a qué distancia máxima de la chica puede estar el auto en el instante del lanzamiento? Haga caso omiso de la resistencia del aire.

3.55 El jonrón más largo. Según el libro de récords Guiness, el jonrón más largo que se ha medido fue bateado por Roy "Dizzy" Carlyle en un juego de ligas menores. La bola viajó 188 m antes de caer al suelo fuera del parque. a) Suponiendo que la velocidad inicial estuviera 45° sobre la horizontal y haciendo caso omiso de la resistencia del aire, ¿cuál debió ser la rapidez inicial de la bola si se golpeó en un punto 0.9 m sobre el suelo? Suponga que el suelo es perfectamente plano. b) ¿A qué altura habría pasado la bola sobre una barda de 3.0 m situada a 116 m de *home*?

3.56 No haga esto II. Suponga que, el día después de su graduación, decide lanzar una cerilla encendida hacia la boca de un cesto de basura cilíndrico (diámetro D y altura $2D$) lleno de tareas y trabajos viejos. Para hacer la cosa más interesante, la base del cesto está a la altura en que la cerilla sale de la mano, y el costado cercano de la cesta está a una distancia horizontal $6D$ del punto en que es lanzada la cerilla. Ésta se lanza con un ángulo de 45.0° sobre la horizontal. Determine los valores *mínimo* y *máximo* de la rapidez de lanzamiento que harán que la cerilla entre por la boca de la cesta. Haga caso omiso de la resistencia del aire y dé sus respuestas en términos de g y D.

3.57 Atrapada en el pasillo. Imagine que está jugando con un amigo a atrapar una pelota en el pasillo de su dormitorio. La distancia del piso al cielo raso es D, y la pelota se lanza con una rapidez inicial $v_0 = \sqrt{6gD}$. Determine la máxima distancia horizontal (en términos de D) que la pelota puede recorrer sin rebotar. (Suponga que la pelota se lanza desde el piso.)

3.58 Una bola de béisbol lanzada con un ángulo de 60.0° sobre la horizontal golpea un edificio situado a 18.0 m en un punto 8.00 m más arriba del punto de lanzamiento. Haga caso omiso de la resistencia del aire. a) Calcule la magnitud de la velocidad inicial de la bola (la velocidad con que se lanzó). b) Obtenga la magnitud y dirección de la velocidad de la bola justo antes de golpear el edificio. c) Dibuje gráficas x-t, y-t, v_x-t y v_y-t para el movimiento.

3.59 Se lanza un proyectil con rapidez v_0 y ángulo α_0 sobre la horizontal desde una altura h sobre el suelo. a) Demuestre que, si no se considera la resistencia del aire, la distancia horizontal que recorre el proyectil antes de tocar el suelo es

$$x = \frac{v_0 \cos \alpha_0}{g}\left(v_0 \operatorname{sen} \alpha_0 + \sqrt{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \alpha_0 + 2gh}\right)$$

Verifique que, si el punto de lanzamiento está en el suelo ($h = 0$), esto es igual al alcance R obtenido en el ejemplo 3.10. b) Con $v_0 = 10$ m/s y $h = 5.0$ m, grafique x en función del ángulo de lanzamiento α_0 para valores de α_0 de 0° a 90°. La gráfica deberá mostrar que x es cero si $\alpha_0 = 90°$, pero x no es cero si $\alpha_0 = 0°$. Explique esto. c) Vimos en el ejemplo 3.10 que, para un proyectil que cae a la misma altura de la que se lanzó, el alcance horizontal es máximo con $\alpha_0 = 45°$. Para el caso graficado en la parte (b), ¿el ángulo que produce la distancia horizontal máxima es igual, mayor o menor que 45°? (Éste es un resultado general para el caso en que un proyectil se lanza de un punto más alto que en el que cae.)

3.60 ¡Cuidado! Una bola de nieve rueda del techo de un granero con inclinación hacia abajo de 40° (Fig. 3.44). El borde del techo está a 14.0 m del suelo y la bola tiene una rapidez de 7.00 m/s al dejar el techo. Puede despreciarse la resistencia del aire. a) ¿A qué distancia del borde del granero golpea la bola el piso si no golpea otra cosa al caer? b) Dibuje gráficas x-t, y-t, v_x-t y v_y-t para el movimiento de la parte (a). c) Un hombre de 1.9 m de estatura está parado a 4.0 m del granero. ¿Lo golpeará la bola?

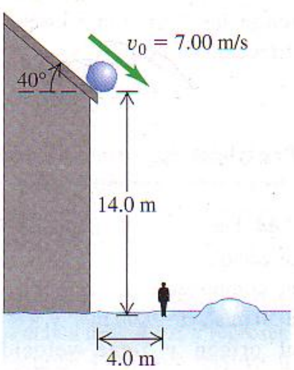


Figura 3.44 Problema 3.60.

3.61 a) Demuestre que un proyectil lanzado con ángulo α_0 tiene el mismo alcance horizontal que uno lanzado con la misma rapidez pero con ángulo $(90° - \alpha_0)$. b) Una rana salta con velocidad de 2.2 m/s y cae a 25 cm de donde saltó. ¿Con qué ángulos respecto a la horizontal pudo haber saltado?

3.62 En el trapecio volador. Un nuevo acto circense se llama los Maromeros del Norte. La hermosa Maribel se columpia de un trapecio y se proyecta con un ángulo de 53°. Josele, cuyas manos están 6.1 m arriba y 8.2 m adelante del punto de lanzamiento (Fig. 3.45), debe atraparla. Puede despreciarse la resistencia del aire. a) ¿Qué velocidad inicial v_0 debe tener Maribel para alcanzar apenas a Josele? b) Para la velocidad inicial calculada en (a), ¿qué magnitud y dirección tiene

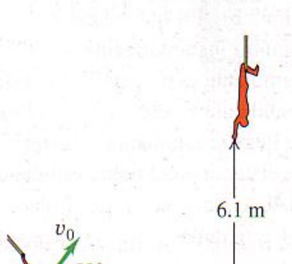


Figura 3.45 Problema 3.62.

la velocidad de Maribel cuando alcanza a Josele? c) Suponiendo que Maribel tiene la velocidad inicial calculada en (a), dibuje gráficas x-t, y-t, v_x-t y v_y-t que muestren el movimiento de los dos trapecistas. Las gráficas deberán mostrar el movimiento hasta el momento en que Maribel llega a Josele. d) La noche del debut, Josele no atrapa a Maribel. ¿Qué distancia horizontal recorre ella desde su punto de lanzamiento antes de caer en la red que está 8.6 m debajo de dicho punto?

3.63 Salto del río II. Un profesor de física hacía acrobacias audaces en su tiempo libre. Su última acrobacia fue un intento por saltar un río en motocicleta (Fig. 3.46). La rampa de despegue está inclinada 53.0°, el río tiene 40.0 m de anchura y la ribera lejana está 15.0 m bajo el tope de la rampa. El río está 100 m abajo de la rampa. Puede despreciarse la resistencia del aire. a) ¿Qué rapidez se necesita en el tope de la rampa para alcanzar apenas el borde de la ribera lejana? b) Si su rapidez era sólo la mitad del valor obtenido en (a), ¿dónde cayó?

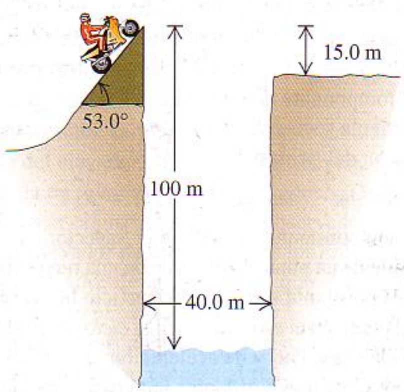


Figura 3.46 Problema 3.63.

3.64 Se lanza una piedra de una azotea con rapidez v_0 y ángulo α_0 respecto a la horizontal. La altura del edificio es h. Puede despreciarse la resistencia del aire. Calcule la magnitud de la velocidad de la piedra junto antes de tocar el suelo, y demuestre que es independiente de α_0.

3.65 Un carro de 5500 kg que lleva un lanzador vertical de cohetes avanza a la derecha con rapidez constante de 30.0 m/s por una vía horizontal. Lanza un cohete de 45.0 kg verticalmente hacia arriba con una rapidez inicial de 40.0 m/s relativa al carro. a) ¿Qué altura alcanzará el cohete? b) ¿A qué distancia del carro caerá el cohete a tierra? c) ¿Qué distancia avanza el carro mientras el cohete está en el aire? d) ¿Con qué ángulo, relativo a la vertical y medido por un observador en reposo en el suelo, está viajando el cohete en el momento en que es disparado? e) Dibuje la trayectoria del cohete vista por un observador: i) estacionario en el carro; ii) estacionario en tierra.

3.66 Se lanza una pelota de 2.7 kg verticalmente hacia arriba con una rapidez inicial de 20.0 m/s desde el borde de un acantilado de 45.0 m de altura. En el instante de lanzamiento, una mujer comienza a correr alejándose de la base del acantilado con rapidez constante de 6.00 m/s. La mujer corre en línea recta sobre suelo plano, y puede despreciarse la acción de la resistencia del aire sobre la pelota. a) ¿Con qué ángulo arriba de la horizontal deberá lanzarse la pelota para que la corredora la atrape justo antes de que toque el suelo, y qué distancia corre la mujer antes de atrapar la pelota? b) Dibuje con precisión la trayectoria de la pelota vista por: i) una persona en reposo en el suelo; ii) la corredora.

3.67 Un peñasco de 76.0 kg está rodando horizontalmente hacia el borde de un acantilado que está 20 m arriba de la superficie de un lago (Fig. 3.47). El tope de la cara vertical de una presa está a 100 m del pie del acantilado, al nivel de la superficie del lago. Hay una llanura 25 m debajo del tope de la presa. a) ¿Qué rapidez mínima debe tener la roca al perder contacto con el acantilado para llegar hasta la llanura sin golpear la presa? b) ¿A qué distancia del pie de la presa cae en la llanura?

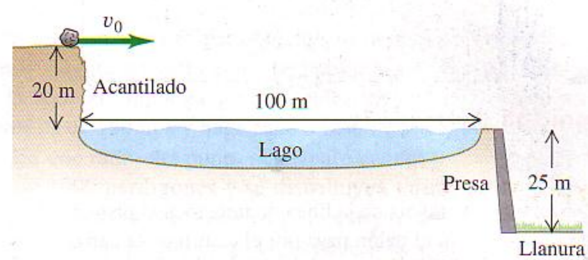


Figura 3.47 Problema 3.67.

3.68 Lanzamiento de almuerzo. Enriqueta va a su clase de física, trotando por la acera a 3.05 m/s. Su esposo Bruno se da cuenta de que ella salió con tanta prisa que olvidó su almuerzo, así que corre a la ventana de su departamento, que está 43.9 m directamente arriba de la acera, para lanzárselo. Bruno lanza el almuerzo horizontalmente 9.00 s después de que Enriqueta ha pasado debajo de la ventana, y ella lo atrapa corriendo. Haga caso omiso de la resistencia del aire. a) ¿Con qué rapidez inicial debe haber lanzado Bruno el almuerzo para que Enriqueta lo atrape justo antes de tocar la acera? b) ¿Dónde está ella cuando atrapa el almuerzo?

3.69 Dos tanques participan en un ejercicio de maniobras en terreno plano. El primero lanza una bala de práctica cargada con pintura, con velocidad de salida de 250 m/s a 10.0° sobre la horizontal mientras avanza hacia el segundo tanque con una rapidez de 15.0 m/s relativa al suelo. El segundo tanque va en retirada a 35.0 m/s relativa al suelo, pero es alcanzado por la bala. Haga caso omiso de la resistencia del aire y suponga que la bala golpea al tanque a la misma altura desde la que fue disparada. Calcule la distancia entre los tanques a) cuando se disparó la bala; b) en el momento del impacto.

3.70 ¡Bang! Un estudiante está sentado en una plataforma a una altura h sobre el suelo. Lanza un cohetón horizontalmente con una rapidez v. Sin embargo, un viento que sopla paralelo al suelo imprime al cohetón una aceleración horizontal constante de magnitud a. El resultado es que el cohetón cae al suelo directamente abajo del estudiante. Determine la altura h en términos de v, a y g. Se puede hacer caso omiso del efecto de la resistencia del aire sobre el movimiento vertical.

3.71 Tiro libre. Un jugador de baloncesto recibe una falta y se le conceden 2 tiros libres. El centro de la canasta está a una distancia horizontal de 4.21 m de la línea de falta y a una altura de 3.05 m sobre el piso (Fig. 3.48). En el primer intento, el jugador lanza el balón a 35° sobre la horizontal con rapidez v_0 = 4.88 m/s. El balón se suelta 1.83 m sobre el piso. El tiro falla por mucho. Haga caso omiso de la resistencia del aire. a) ¿Qué altura máxima alcanzó el ba-

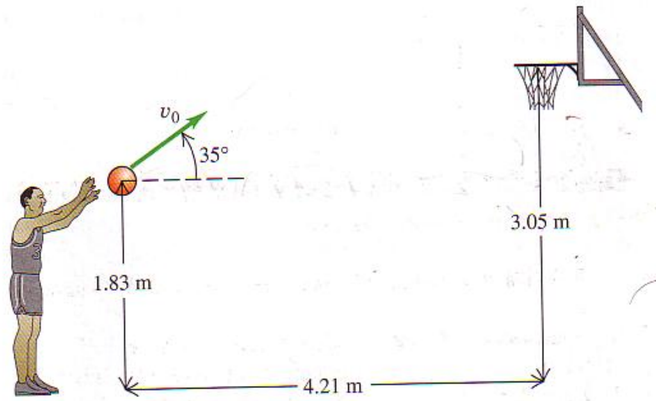


Figura 3.48 Problema 3.71.

lón? b) ¿A qué distancia de la línea de falta toca el piso el balón? c) En el segundo tiro, el balón pasa por el centro de la canasta. El ángulo y el punto de lanzamiento son los mismos. ¿Qué rapidez inicial imparte el jugador al balón esta vez? d) En el segundo tiro, ¿qué altura máxima alcanza el balón? En este punto, ¿a qué distancia horizontal está de la canasta?

3.72 Romeo lanza un guijarro a la ventana de Julieta para despertarla. Lamentablemente, lanza un guijarro muy grande con demasiada rapidez. Justo antes de romper el cristal, el guijarro se está moviendo horizontalmente, habiendo recorrido una distancia horizontal x y una distancia vertical y como proyectil. Calcule la magnitud y dirección de la velocidad del guijarro al ser lanzado.

3.73 Un cohete está inicialmente en reposo en el suelo. Cuando arrancan sus motores, el cohete despega en línea recta con un ángulo de 53.1° sobre la horizontal y aceleración constante de magnitud g. Los motores paran T segundos después del lanzamiento, y entonces el cohete se mueve como proyectil. Haga caso omiso de la resistencia del aire y suponga que g es independiente de la altitud. a) Dibuje la trayectoria del cohete desde el disparo inicial de los motores hasta que el cohete cae al suelo. Indique la dirección de los vectores de velocidad y aceleración en diversos puntos de la trayectoria. b) Dibuje gráficas v_x-t y v_y-t para el movimiento del cohete desde el disparo inicial de los motores hasta que el cohete cae al suelo. c) Determine la altura máxima alcanzada por el cohete. Dé su respuesta en términos de g y T. d) Obtenga, también en términos de g y T, la distancia horizontal desde el punto de lanzamiento hasta el punto en que el cohete cae al suelo (es decir, el alcance).

3.74 En una película de aventuras, el héroe debe lanzar una granada desde su auto, que viaja a 90.0 km/h, al de su enemigo, que viaja a 110 km/h. El auto del enemigo está 15.8 m adelante del del héroe cuando éste suelta la granada. Si la velocidad inicial de la granada relativa al héroe está 45° sobre la horizontal, ¿qué magnitud deberá tener? Ambos autos viajan en la misma dirección en un camino plano, y puede despreciarse la resistencia del aire. Obtenga la magnitud de la velocidad relativa tanto al héroe como a la Tierra.

3.75 Una piedra atada a una cuerda se mueve en el plano xy; sus coordenadas en función del tiempo son

$$x(t) = R\cos\omega t \qquad y(t) = R\,\mathrm{sen}\,\omega t$$

donde R y ω son constantes. a) Demuestre que la distancia de la piedra al origen es constante e igual a R, es decir, que su trayectoria es un círculo de radio R. b) Demuestre que la velocidad de la piedra siempre es perpendicular a su vector de posición. c) Demuestre que la aceleración de la piedra siempre es opuesta en dirección al vector de posición y tiene magnitud $\omega^2 R$. d) Demuestre que la magnitud de la velocidad de la piedra es constante e igual a ωR. e) Combine los resultados de (c) y (d) para demostrar que la aceleración de la piedra tiene magnitud constante v^2/R.

3.76 La rapidez de una partícula que se mueve en un plano es la magnitud de su velocidad instantánea, $v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. a) Demuestre que la tasa de cambio de la rapidez es $dv/dt = (v_x a_x + v_y a_y)/\sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. b) Use esta expresión para obtener dv/dt en $t = 2.0$ s para el carrito de los ejemplos 3.1 a 3.4. Compare su respuesta con las componentes de aceleración obtenidas en el ejemplo 3.4. Explique por qué su respuesta *no* es igual a la magnitud de la aceleración obtenida en la parte (b) del ejemplo 3.2. c) Demuestre que la tasa de cambio de la rapidez puede expresarse como $dv/dt = \vec{v}\cdot\vec{a}/v$, y use este resultado para explicar por qué dv/dt es igual a $a_{\parallel}$, la componente de $\vec{a}$ paralela a $\vec{v}$.

3.77 Una partícula se mueve en el plano xy. Sus coordenadas están dadas en función del tiempo por

$$x(t) = R(\omega t - \mathrm{sen}\,\omega t) \qquad y(t) = R(1 - \cos\omega t)$$

donde R y ω son constantes. a) Dibuje la trayectoria de la partícula. (Es la trayectoria de un punto en el borde de una rueda que está rodando con rapidez constante sobre una superficie horizontal. La curva descrita por el punto en el espacio se llama *cicloide*.) b) Determine las componentes de velocidad y de aceleración de la partícula en cualquier instante t. c) ¿En qué instantes la partícula está momentáneamente en reposo? ¿Qué coordenadas tiene la partícula en esos instantes? ¿Qué magnitud y dirección tiene la aceleración en esos instantes? d) ¿La magnitud de la aceleración depende del tiempo? Compare este movimiento con el movimiento circular uniforme.

3.78 Usted vuela una avioneta y observa el tráfico para enviar informes a una estación de radio. Su vuelo lo lleva en dirección este sobre una autopista. Los accidentes del terreno le indican que su rapidez es de 50 m/s relativa a tierra, y el indicador de rapidez en el aire también indica 50 m/s. Sin embargo, la nariz de la avioneta apunta un poco al sur del este, y el meteorólogo dice que sopla un viento de 20 m/s. ¿En qué dirección sopla el viento?

3.79 El problema de la paloma mensajera. Luis conduce al este a 40 km/h. Su gemelo Óscar conduce al oeste a 30 km/h hacia Luis en un auto idéntico en el mismo camino recto. Cuando están a 42 km uno del otro, Luis envía una paloma mensajera, que vuela con rapidez constante de 50 km/h. (Todas las rapideces son relativas a la Tierra.) La paloma vuela a Óscar, se confunde porque cree que regresó a Luis y de inmediato regresa a Luis, se confunde más y de inmediato regresa a Óscar. Esto continúa hasta que los gemelos se encuentran, momento en que la paloma, agotada y mareada, cae al suelo. Si no se toma en cuenta el tiempo que la paloma tarda en darse la vuelta, ¿qué distancia voló?

3.80 Gotas de lluvia. Cuando la velocidad de un tren es de 12.0 m/s al este, las gotas de lluvia que caen verticalmente respecto a la Tierra dejan huellas inclinadas 30.0° respecto a la vertical en las ventanillas del tren. a) ¿Qué componente horizontal tiene la velocidad de una gota respecto a la Tierra? ¿Respecto al tren? b) ¿Qué magnitud tiene la velocidad de la gota respecto a la Tierra? ¿Respecto al tren?

3.81 Un piloto de avión fija un curso al oeste según la brújula y mantiene una rapidez respecto al aire de 220 km/h. Después de volar 0.500 h, está sobre una ciudad 120 km al oeste y 20 km al sur de su punto de partida. a) Calcule la velocidad del viento (magnitud y dirección). b) Si dicha velocidad es de 40 km/h al sur, qué curso debe fijar el piloto para viajar al oeste? La rapidez respecto al aire es la misma.

3.82 En una carrera aérea, un avión vuela desde un punto directamente arriba de Metrópolis a un punto directamente arriba de Ciudad Gótica, da vuelta y regresa al punto de partida. La rapidez del avión respecto al aire es constante en todo el vuelo e igual a v. Ciudad Gótica está a una distancia D al este de Metrópolis. a) Si no hay viento, ¿cuánto tiempo se requiere para el viaje redondo? ¿Cuánto tiempo se requiere si sopla un viento con rapidez constante w b) hacia el este? c) ¿Hacia el sur? d) Si $D = 3.00 \times 10^2$ km, $v = 4.00 \times 10^2$ km/h, y $w = 1.00 \times 10^2$ km/h, calcule los tiempos de vuelo redondo para las partes (a), (b) y (c). ¿En cuál caso es más lento el viaje redondo?

3.83 Un elevador sube con rapidez constante de 2.50 m/s. Un perno en el techo del elevador, 3.00 m arriba del piso, se afloja y cae. a) ¿Cuánto tarda en tocar el piso del elevador? ¿Qué rapidez tiene justo antes de tocar el piso b) según un observador en el elevador? c) ¿Según un observador parado en uno de los rellanos del edificio? d) Según el observador de la parte (c), ¿qué distancia recorrió el perno entre el techo y el piso del elevador?

3.84 La ciudad A está directamente al oeste de la ciudad B. Cuando no hay viento, un avión comercial realiza el vuelo redondo de 5310 km entre ellas en 6.60 h viajando con la misma rapidez en ambas direcciones. Cuando sopla un viento fuerte y constante de oeste a este y el avión tiene la misma rapidez respecto al aire que antes, el viaje redondo tarda 6.70 h. ¿Con qué rapidez sopla el viento?

3.85 En un partido durante la Copa Mundial de fútbol soccer, Juan corre al norte hacia la portería con una rapidez de 8.00 m/s relativa al suelo. Un compañero le pasa el balón, el cual tiene una rapidez de 12.0 m/s y se mueve en una dirección 37.0° al este del norte, relativa al suelo. ¿Qué magnitud y dirección tiene la velocidad del balón relativa a Juan?

Problemas de desafío

3.86 Un hombre sobre un furgón plano que viaja con rapidez constante de 9.10 m/s (Fig. 3.49) quiere lanzar una pelota a través de un aro estacionario a 4.90 m sobre la altura de la mano, de modo que la bola se mueva horizontalmente al pasar por el aro. El hombre lanza la bola con una rapidez de 10.8 m/s respecto a sí mismo. a) ¿Qué componente vertical debe tener la velocidad inicial de la bola? b) ¿Cuántos segundos después del lanzamiento la bola atravesará el aro? c) ¿A qué distancia horizontal del aro se deberá soltar la bola? d) Cuando la pelota deja la mano del hombre, ¿qué dirección tiene su velocidad relativa al marco de referencia del vagón? ¿Relativa al marco de referencia de un observador parado en el suelo?

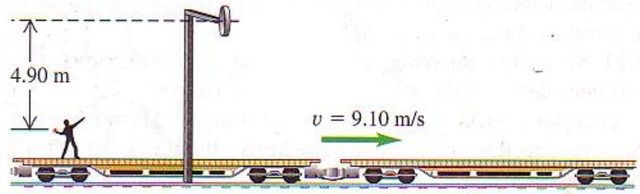


Figura 3.49 Problema de desafío 3.86.

3.87 Una escopeta dispara muchos perdigones hacia arriba. Algunos viajan casi verticalmente, pero otros se desvían hasta 1.0° de la vertical. Suponga que la rapidez inicial de todos los perdigones es de 150 m/s y haga caso omiso de la resistencia del aire. a) ¿En qué radio del punto de disparo caerán los perdigones? b) Si hay 1000 perdigones y se distribuyen uniformemente en un círculo del radio calculado en (a), ¿qué probabilidad hay de que al menos un perdigón caiga en la cabeza de quien disparó? (Suponga que la cabeza tiene 10 cm de radio.) c) En realidad, la resistencia del aire tiene varios efectos; frena los perdigones al subir, reduce la componente horizontal de su velocidad y limita la rapidez con que caen. ¿Cuál efecto tenderá a hacer el radio mayor que el calculado en (a), y cuál tenderá a reducirlo? ¿Qué efecto global cree que tendrá la resistencia? (Su efecto sobre una componente de velocidad se incrementa al aumentar la magnitud de la componente.)

3.88 Un proyectil se lanza desde un punto P. Su movimiento es tal que su distancia respecto a P siempre aumenta. Determine el ángulo máximo arriba de la horizontal con que pudo haberse lanzado. Haga caso omiso de la resistencia del aire.

3.89 Movimiento de proyectil en una pendiente I. Una bola de béisbol recibe una velocidad inicial de magnitud v_0 y ángulo ϕ sobre la superficie de una rampa, que a su vez está inclinada θ grados sobre la horizontal (Fig. 3.50). a) Calcule la distancia sobre la rampa desde el punto de lanzamiento adonde el objeto golpea la rampa. Responda en términos de v_0, g, θ y ϕ. b) ¿Qué ángulo ϕ da el alcance máximo sobre la rampa? (*Nota:* Tal vez le interesen los tres métodos de resolución presentados por I. R. Lapidus en *Amer. Jour. of Phys.*, vol. 51 (1983) páginas 806 y 847. En H. A. Buckmaster, *Amer. Jour. of Phys.*, vol. 53 (1985), páginas 638-641, se estudia a fondo este problema y otros similares.)

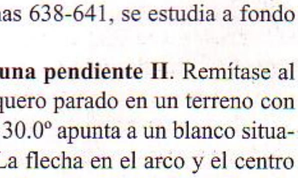


Figura 3.50 Problema de desafío 3.89.

3.90 Movimiento de proyectil en una pendiente II. Remítase al Problema de desafío 3.89. a) Un arquero parado en un terreno con inclinación ascendente constante de 30.0° apunta a un blanco situado 60.0 m más arriba en la ladera. La flecha en el arco y el centro del blanco están ambos 1.50 m sobre el suelo. La rapidez inicial de la flecha es de 32.0 m/s. ¿Con qué ángulo sobre la *horizontal* debe apuntar el arquero para dar en el blanco? Si hay dos ángulos, calcule el menor. Tal vez necesite resolver la ecuación del ángulo por iteración, es decir, prueba y error. Compare el ángulo con el que se necesita cuando el suelo está horizontal. b) Repita con una pendiente constante *hacia abajo* de 30.0°.

3.91 Sin motivo aparente, un poodle está corriendo con rapidez constante de $v = 5.00$ m/s en un círculo con radio $R = 2.50$ m. Sea $\vec{v}_1$ el vector velocidad en t_1, y $\vec{v}_2$ en t_2. Considere $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ y $\Delta t = t_2 - t_1$. Recuerde que $\vec{a}_{med} = \Delta\vec{v}/\Delta t$. Para $\Delta t = 0.5$ s, 0.1 s y 0.05 s, calcule la magnitud (con cuatro cifras significativas) y la dirección (relativa a $\vec{v}_1$) de la aceleración media $\vec{a}_{med}$. Compare su resultado con la expresión general para la aceleración $\vec{a}$ instantánea en movimiento circular uniforme deducida en el texto.

3.92 Un cohete diseñado para colocar cargas pequeñas en órbita se lleva hasta una altitud de 12.0 km, montado en un avión comercial convertido. Cuando el avión está volando en línea recta, con rapidez constante de 850 km/h, deja caer el cohete. Después, el avión mantiene la misma altitud y rapidez y sigue volando en línea recta. El cohete cae durante un lapso corto, después del cual el motor se enciende. A partir de ese momento, los efectos combinados del empuje y la gravedad imparten al cohete una aceleración constante de magnitud $3.00g$ dirigida con un ángulo de 30.0° arriba de la horizontal. Por motivos de seguridad, el cohete deberá estar por lo menos 1.00 km adelante del avión cuando vuelva a alcanzar la altitud de éste. Hay que determinar el tiempo mínimo que el cohete debe caer antes de que su motor se encienda. Se puede hacer caso omiso de la resistencia del aire. La respuesta debe incluir i) un diagrama que muestre las trayectorias de vuelo del cohete y del avión, rotuladas en varios puntos con vectores que representen su velocidad y su aceleración; ii) una gráfica *x-t* que muestre los movimientos del cohete y del avión; y iii) una gráfica *y-t* que muestre los movimientos del cohete y del avión. En el diagrama y las gráficas, indique los momentos en que el cohete se deja caer, el motor del cohete se enciende y el cohete en ascenso alcanza la altura del avión.

3.93 Dos estudiantes pasean en canoa en un río. Yendo río arriba, dejan caer accidentalmente una botella vacía al agua, después de lo cual reman durante 60 minutos hasta llegar a un punto 2.0 km río arriba. En ese momento, se dan cuenta de que la botella no está y, preocupados por la ecología, se dan vuelta y reman río abajo. Alcanzan a la botella (que se ha estado moviendo con la corriente) 5.0 km río abajo del punto donde se dieron la vuelta, y la recogen. a) Suponiendo un esfuerzo de paleo constante todo el tiempo, ¿con qué rapidez fluye el río? b) ¿Qué rapidez tendría la canoa en un lago tranquilo con el mismo esfuerzo de paleo?