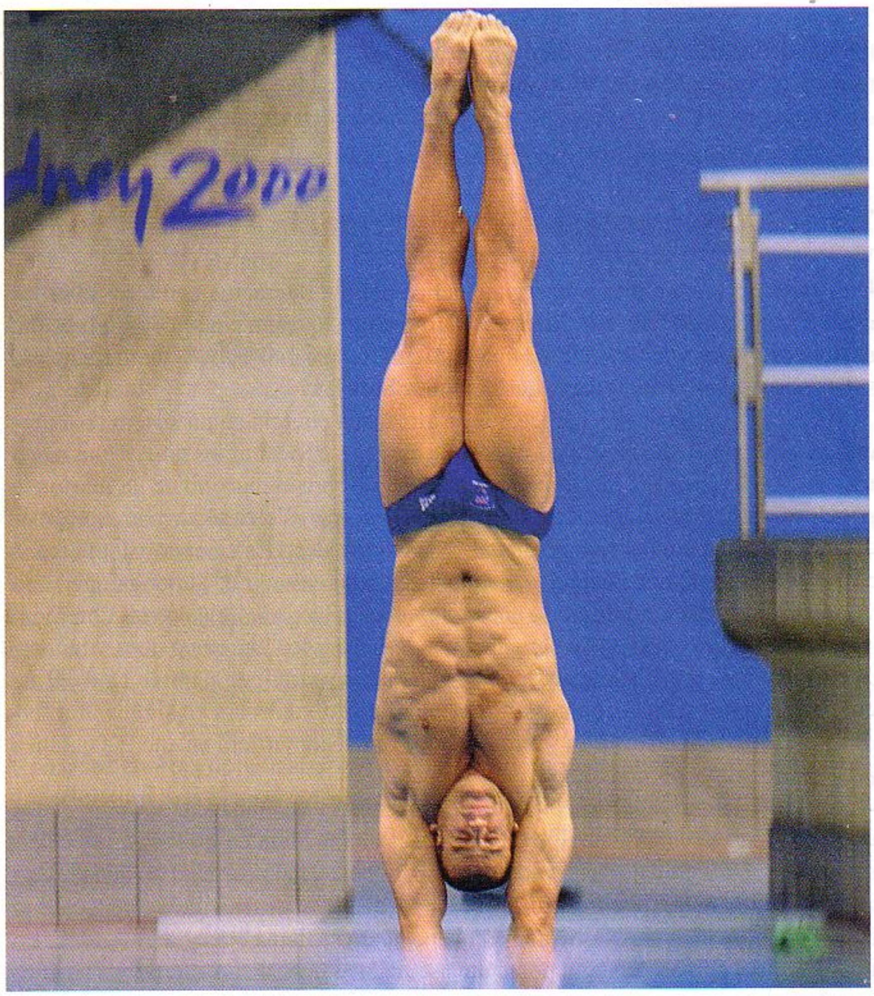
ENERGÍA POTENCIAL Y CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA 7



Mientras un clavadista se precipita hacia el agua, cierta energía potencial gravitacional se convierte en energía cinética del clavadista. Cuando el clavadista entra en el agua, pierde rapidez y su energía cinética se convierte en energía térmica del agua, elevando un poco su temperatura. Mediciones cuidadosas demuestran que no se pierde energía en este proceso; la energía sólo cambia de forma.

? Cuando el clavadista entra en el agua, ¿ésta realiza sobre él trabajo positivo o negativo? ¿La fuerza de la gravedad efectúa trabajo positivo o negativo sobre él?

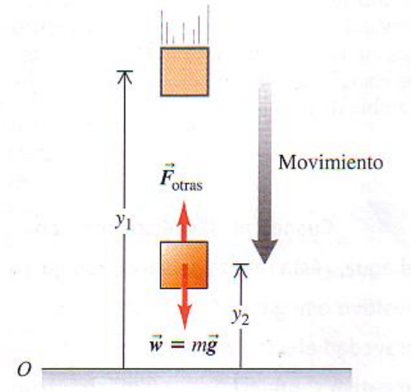
Cuando un clavadista se tira de un trampolín a la alberca, golpea el agua rápidamente, con mucha energía cinética. ¿De dónde proviene esa energía? La respuesta que dimos en el capítulo 6 fue que la fuerza gravitacional (el peso) realiza trabajo sobre el clavadista al caer. La energía cinética del clavadista —energía asociada con su *movimiento*— aumenta en una cantidad igual al trabajo realizado.

Sin embargo, hay otra forma muy útil de ver el trabajo y la energía cinética. Este nuevo enfoque se basa en el concepto de *energía potencial*, que es energía asociada con la *posición* de un sistema, no a su movimiento. En este enfoque, hay *energía potencial gravitacional* incluso cuando el clavadista está parado en el trampolín. Al caer, no se agrega energía al sistema Tierra-clavadista, sino que una reserva de energía se *transforma* de una forma (energía potencial) a otra (energía cinética). En este capítulo, veremos cómo puede entenderse esta transformación con el teorema de trabajo-energía.

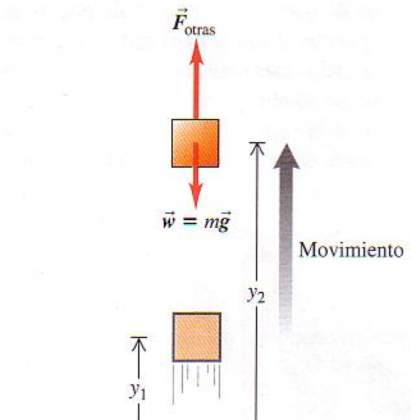
Si el clavadista rebota en el trampolín antes de saltar, la tabla flexionada almacena otra clase de energía potencial llamada *energía potencial elástica*. Veremos la energía potencial elástica de sistemas sencillos como un resorte estirado o comprimido. (Otra clase importante de energía potencial se asocia a las posiciones relativas de partículas con carga eléctrica. Veremos esto en el capítulo 23).

Demostraremos que, en algunos casos, la suma de las energías cinética y potencial de un sistema, llamada, *energía mecánica total*, es constante durante su movimiento. Esto nos llevará al enunciado general de la *ley de conservación de la energía*, uno de los principios más fundamentales y trascendentales de la ciencia.

7.1 | Energía potencial gravitacional



(a) La energía potencial gravitacional U disminuye



(b) La energía potencial gravitacional U aumenta

7.1 La fuerza gravitacional $\vec{w}$ realiza trabajo durante el movimiento vertical de un cuerpo desde una altura inicial y_1 a una altura final y_2. La energía potencial gravitacional (a) disminuye si el cuerpo se mueve hacia abajo y (b) aumenta si se mueve hacia arriba.

Una partícula gana o pierde energía cinética porque interactúa con otros cuerpos que ejercen fuerzas sobre él. En el capítulo 6 vimos que, en cualquier interacción, el cambio de energía cinética de una partícula es igual al trabajo total efectuado sobre ella por todas las fuerzas que actúan sobre ella.

En muchas situaciones, parece que se almacena energía en un sistema para recuperarse después. Es como una cuenta de ahorros, depositamos dinero que luego retiramos. Por ejemplo, hay que efectuar trabajo sobre el martillo de un martinete para levantarlo. Parece razonable que, al elevar el martillo en el aire, se está almacenando energía en el sistema, la cual se convierte después en energía cinética al caer el martillo. O considere a su primo Tito en su columpio. Suponga que le da un empujón, confiriéndole cierta energía cinética y luego lo deja oscilar libremente. Tito se detiene momentáneamente cuando llega a los extremos de su arco, así que ahí no tiene energía cinética, pero la recupera al pasar por el punto bajo del arco. Parece como si en los puntos altos la energía se almacenara en alguna otra forma, relacionada con su altura sobre el suelo, y se reconvirtiera en energía cinética al oscilar hacia el punto bajo.

Ambos ejemplos apuntan a la idea de una energía asociada a la *posición* de los cuerpos en un sistema. Este tipo de energía es una medida del *potencial* o *posibilidad* de efectuar trabajo. Al levantar el martillo, existe el potencial de que la fuerza de gravitación realice trabajo sobre él, pero sólo si el martillo se deja caer al suelo. Por ello, la energía asociada con la posición se llama **energía potencial**. Lo dicho sugiere que hay energía potencial asociada al peso de un cuerpo y a su altura sobre el suelo: la *energía potencial gravitacional*.

Cuando un cuerpo cae sin resistencia del aire, la energía potencial gravitacional del cuerpo disminuye y su energía cinética aumenta. Sin embargo, en el capítulo 6 usamos el teorema de trabajo-energía para concluir que la energía cinética de un cuerpo que cae aumenta porque la fuerza de la gravedad terrestre (el peso del cuerpo) realiza trabajo sobre el cuerpo. Usemos ese teorema para demostrar que ambas descripciones del cuerpo que cae son equivalentes y para deducir la expresión de la energía potencial gravitacional.

Consideremos un cuerpo de masa m que se mueve en el eje y (vertical), como en la figura 7.1. Las fuerzas que actúan sobre él son su peso, de magnitud $w = mg$, y tal vez otras; llamamos a la suma vectorial (resultante) de todas las otras fuerzas $\vec{F}_{otras}$. Suponemos que el cuerpo permanece tan cerca de la superficie terrestre que el peso es constante. (Veremos en el capítulo 12 que el peso disminuye con la altura.) Queremos determinar el trabajo efectuado por el peso cuando el cuerpo cae de una altura y_1 sobre el origen a una altura menor y_2 (Fig. 7.1a). El peso y el desplazamiento tienen la misma dirección, así que el trabajo W_{grav} efectuado sobre el cuerpo por su peso es positivo;

$$W_{grav} = Fs = w(y_1 - y_2) = mgy_1 - mgy_2 \tag{7.1}$$

Esta expresión también da el trabajo correcto cuando el cuerpo sube y y_2 es mayor que y_1 (Fig. 7.1b). En tal caso, $y_1 - y_2$ es negativo y W_{grav} es negativo porque el peso y el desplazamiento tienen direcciones opuestas.

La ecuación (7.1) muestra que podemos expresar W_{grav} en términos de los valores de la cantidad mgy al principio y al final del desplazamiento. Esta cantidad, el producto del peso mg y la altura y sobre el origen, es la **energía potencial gravitacional**, U:

$$U = mgy \qquad \text{(energía potencial gravitacional)} \tag{7.2}$$

Su valor inicial es $U_1 = mgy_1$ y su valor final es $U_2 = mgy_2$. El cambio en U es su valor final menos su valor inicial: $\Delta U = U_2 - U_1$. Podemos expresar el trabajo W_{grav} realizado por la fuerza gravitacional durante el desplazamiento de y_1 a y_2 como

$$W_{grav} = U_1 - U_2 = -(U_2 - U_1) = -\Delta U \tag{7.3}$$

El signo negativo de ΔU es *fundamental*. Cuando el cuerpo sube, y aumenta, el trabajo realizado por la gravedad es negativo y la energía potencial gravitacional aumenta ($\Delta U > 0$). Si el cuerpo baja, y disminuye, la gravedad realiza trabajo positivo y la energía potencial gravitacional se reduce ($\Delta U < 0$). Es como sacar dinero del banco (reducir U) y gastarlo (realizar trabajo positivo). Como muestra la ecuación (7.3), la unidad de energía potencial es el joule (J), la misma del trabajo.

CUIDADO Aunque se sienta tentado a hacerlo, *no* es correcto llamar a $U = mgy$ la "energía potencial gravitacional del cuerpo". La energía potencial gravitacional es una propiedad *compartida* del cuerpo y la Tierra. Esta energía aumenta si la Tierra permanece fija y la altura aumenta; también aumenta si el cuerpo está fijo en el espacio y la Tierra se aleja de él. Observe que en la fórmula $U = mgy$ intervienen características tanto del cuerpo (su masa m) como de la Tierra (el valor de g).

Conservación de la energía mecánica (sólo fuerzas gravitacionales)

Si quiere ver para qué sirve la energía potencial gravitacional, suponga que el peso del cuerpo es la *única* fuerza que actúa sobre él $\vec{F}_{otras} = \mathbf{0}$. El cuerpo cae libremente sin resistencia del aire, y podría estar subiendo o bajando. Sea v_1 su rapidez en y_1, y v_2, en y_2. El teorema de trabajo-energía (ecuación 6.6) dice que el trabajo total efectuado sobre el cuerpo es igual al cambio en su energía cinética; $W_{tot} = \Delta K = K_2 - K_1$. Si la gravedad es la única fuerza que actúa, entonces, por la ecuación (7.3), $W_{tot} = W_{grav} = -\Delta U = U_1 - U_2$. Juntando esto tenemos

$$\Delta K = -\Delta U \quad \text{o} \quad K_2 - K_1 = U_1 - U_2$$

que podemos reescribir como

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \qquad \text{(si sólo la gravedad realiza trabajo)} \qquad (7.4)$$

o

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgy_2 \qquad \text{(si sólo la gravedad realiza trabajo)} \qquad (7.5)$$

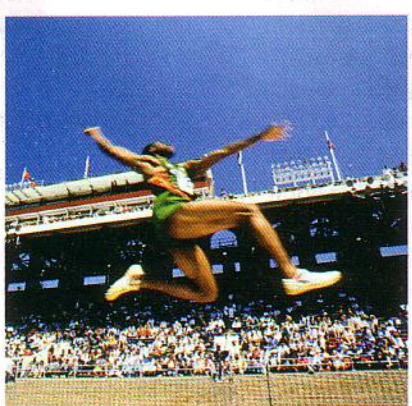
Ahora definimos la suma $K + U$ de las energías cinética y potencial como E, la **energía mecánica total del sistema**. Por "sistema", nos referimos al cuerpo de masa m y la Tierra considerados juntos, porque U es una propiedad compartida de ambos cuerpos. Así, $E_1 = K_1 - U_1$ es la energía mecánica total en y_1 y $E_2 = K_2 + U_2$ es la energía mecánica total en y_2. La ecuación (7.4) dice que, cuando el peso del cuerpo es la única fuerza que realiza trabajo sobre él, $E_1 = E_2$. Es decir, E es constante; tiene el mismo valor en y_1 que en y_2. No obstante, dado que las posiciones y_1 y y_2 son puntos arbitrarios en el movimiento del cuerpo, la energía mecánica total E tiene el mismo valor en *todos* los puntos durante el movimiento;

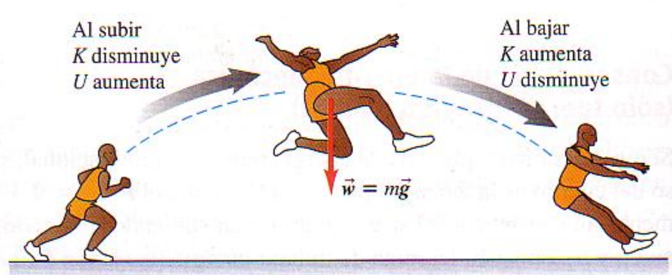
$$E = K + U = \text{constante} \qquad \text{(si sólo la gravedad efectúa trabajo)}$$

Una cantidad que siempre tiene el mismo valor es una cantidad que se *conserva*. *Si sólo la fuerza de gravedad efectúa trabajo, la energía mecánica total es constante, es decir, se conserva* (Fig. 7.2). Éste es nuestro primer ejemplo de la **conservación de la energía mecánica**.

Cuando lanzamos una pelota al aire, su rapidez disminuye al subir, a medida que la energía cinética se convierte en energía potencial; $\Delta K < 0$ y $\Delta U > 0$. Al bajar, la energía potencial se convierte en cinética y la rapidez de la pelota aumenta; $\Delta K > 0$ y $\Delta U < 0$. No obstante, la energía mecánica *total* (cinética más potencial) es la misma en todos los puntos del movimiento, siempre que ninguna otra fuerza realice trabajo sobre la pelota (la resistencia del aire debe ser insignificante). Sigue siendo verdad que la fuerza gravitacional efectúa trabajo sobre el cuerpo al subir o bajar éste, pero ya no tenemos que calcularlo directamente; basta ver cómo cambia el valor de U.

CUIDADO Un punto importante en lo que se refiere a la energía potencial gravitacional es que no importa qué altura escojamos como $y = 0$, el origen de coordenadas. Si desplazamos el origen de y, los valores de y_1 y y_2 cambiarán, pe-





7.2 Mientras el atleta está en el aire, sólo la gravedad efectúa trabajo sobre él (si despreciamos los efectos menores de la resistencia del aire). La energía mecánica —la suma de las energías cinética y potencial gravitacional— se conserva.

ro su *diferencia* no. Se sigue que aunque U_1 y U_2 dependen de dónde coloquemos el origen, la diferencia $U_2 - U_1 = mg(y_2 - y_1)$ es independiente. La cantidad que tiene importancia física no es el valor de U en cierto punto, sino la *diferencia* en U entre 2 puntos. Así, podemos definir U como cero en cualquier punto sin afectar la física de la situación. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7.1 Altura de una pelota por conservación de la energía

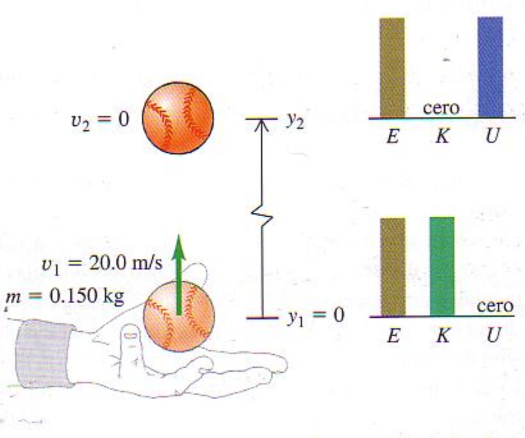
Lanzamos una pelota de béisbol con masa de 0.145 kg hacia arriba, dándole una rapidez inicial de 20.0 m/s. Use la conservación de la energía para determinar qué altura alcanza, despreciando la resistencia del aire.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Una vez en el aire, la única fuerza que actúa sobre la pelota es su peso; por tanto, podemos usar la conservación de la energía mecánica.

PLANTEAR: Usaremos las ecuaciones (7.4) y (7.5); el punto 1 será el punto en que la bola abandona la mano, y el punto 2, donde la pelota alcanza su altura máxima. Al igual que en la figura 7.1, escogemos un eje y que apunta verticalmente hacia arriba. La rapidez de la pelota en el punto 1 es $v_1 = 20.0$ m/s. La pelota está instantáneamente en reposo en el punto más alto de su movimiento (punto 2), así que $v_2 = 0$.

La incógnita es la distancia que la pelota se mueve verticalmente entre estos dos puntos, es decir, el desplazamiento $y_2 - y_1$. Por sencillez, colocaremos el origen en el punto 1, donde la pelota abandona la mano. Entonces, $y_1 = 0$ (Fig. 7.3) y la incógnita es simplemente y_2.



7.3 Después de separarse la pelota de la mano, la única fuerza que actúa sobre ella es su peso (despreciando la resistencia del aire), así que la energía mecánica $E = K + U$ se conserva. Las gráficas de barras de energía muestran los valores de E, K y U en $y_1 = 0$ y y_2.

EJECUTAR: Puesto que $y_1 = 0$, la energía potencial en el punto 1 es $U_1 = mgy_1 = 0$. Además, dado que la pelota está en reposo en el punto 2, la energía cinética en ese punto es $K_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 = 0$. La ecuación (7.4), que dice que $K_1 + U_1 = K_2 + U_2$, se convierte en

$$K_1 = U_2$$

Como se ve en las gráficas de barras de energía de la figura 7.3, la energía cinética de la bola en el punto 1 se convierte totalmente en energía potencial gravitacional en el punto 2. En el punto 1, la energía cinética es

$$K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}(0.145 \text{ kg})(20.0 \text{ m/s})^2 = 29.0 \text{ J}$$

y es igual a la energía potencial $U_2 = mgy_2$ en el punto 2, así que

$$y_2 = \frac{U_2}{mg} = \frac{29.0 \text{ J}}{(0.145 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)} = 20.4 \text{ m}$$

También podemos resolver $K_1 = U_2$ algebraicamente despejando y_2:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = mgy_2$$

$$y_2 = \frac{v_1^2}{2g} = \frac{(20.0 \text{ m/s})^2}{2(9.80 \text{ m/s}^2)} = 20.4 \text{ m}$$

EVALUAR: La masa se elimina, como esperábamos; en el capítulo 2 vimos que el movimiento de un cuerpo en caída libre no depende de su masa. De hecho, podríamos haber deducido el resultado $y_2 = v_1^2/2g$ utilizando la ecuación (2.13).

Al realizar el cálculo anterior, escogimos el origen en el punto 1, de modo que $y_1 = 0$ y $U_1 = 0$. ¿Qué pasa si escogemos otro origen? Suponga que lo colocamos 5.0 m debajo del punto 1, de modo que $y_1 = 5.0$ m. Entonces, la energía mecánica total en el punto 1 será en parte cinética y en parte potencial, pero en el punto 2 será puramente potencial. Si realiza el cálculo usando este origen, obtendrá $y_2 = 25.4$ m, esto es 20.4 m sobre el punto 1, igual que con el primer origen. En cualquier problema, corresponde a Ud. escoger la altura donde $U = 0$; no se rompa la cabeza, porque la física de la respuesta no depende de su decisión.

ActivPhysics ONLINE

5.2 Deteniendo un elevador que asciende

5.3 Detención de un elevador que baja

5.6 Rapidez de un esquiador

Efecto de otras fuerzas

Si otras fuerzas actúan sobre el cuerpo además de su peso, entonces $\vec{F}_{otras}$ de la figura 7.1 *no* es **0**. En el caso del martinete del ejemplo 6.5 (sección 6.2) la fuerza aplicada por el cable y la fricción de las guías verticales son ejemplos de fuerzas que podrían estar incluidas en $\vec{F}_{otras}$. El trabajo gravitacional W_{grav} aún está dado por la ecuación (7.3), pero el trabajo total W_{tot} es la suma de W_{grav} y el trabajo de $\vec{F}_{otras}$. Llamamos a este trabajo adicional W_{otras}, de modo que el trabajo total realizado por todas las fuerzas es $W_{tot} = W_{grav} + W_{otras}$. Igualando esto al cambio de energía cinética, tenemos

$$W_{otras} + W_{grav} = K_2 - K_1 \tag{7.6}$$

Además, por la ecuación (7.3), $W_{grav} = U_1 - U_2$, así que

$$W_{otras} + U_1 - U_2 = K_2 - K_1$$

que podemos reacomodar así:

$$K_1 + U_1 + W_{otras} = K_2 + U_2 \tag{7.7}$$

(si otras fuerzas además de la gravedad efectúan trabajo)

Por último, usando las expresiones apropiadas para los distintos términos de energía, obtenemos

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1 + W_{otras} = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgy_2 \tag{7.8}$$

(si otras fuerzas además de la gravedad efectúan trabajo)

El significado de las ecuaciones (7.7) y (7.8) es que *el trabajo realizado por todas las fuerzas* distintas de la gravitacional *es igual al cambio en la energía mecánica total $E = K + U$ del sistema, donde U es la energía potencial gravitacional*. Si W_{otras} es positivo, E aumenta y $(K_2 + U_2) > (K_1 + U_1)$. Si W_{otras} es negativo, E disminuye. En el caso especial en que sólo el peso realiza trabajo, $W_{otras} = 0$. La energía mecánica total es entonces constante, y volvemos a la ecuación (7.4) o (7.5).

Estrategia para resolver problemas

Problemas en los que se utiliza energía mecánica

IDENTIFICAR *los conceptos pertinentes:* Primero decida si conviene resolver el problema con métodos de energía, usando $\sum\vec{F} = m\vec{a}$ directamente, o con una combinación de estrategias. El enfoque de energía es muy útil si el problema implica movimiento con fuerzas variables, en una trayectoria curva (que veremos más adelante) o ambas cosas. Si el problema implica tiempo transcurrido, el enfoque de energía *no* suele ser el mejor porque en él no interviene el tiempo directamente.

PLANTEAR *el problema empleando los pasos siguientes:*

1. Si usa el enfoque de energía, primero decida cuáles son los estados inicial y final (posiciones y velocidades) del sistema. Use el subíndice 1 para el estado inicial y el 2 para el final. Resulta útil hacer dibujos que muestren los estados inicial y final.
2. Defina su sistema de coordenadas, sobre todo el nivel en el que $y = 0$. Esto le servirá para calcular las energías potenciales gravitacionales. La ecuación (7.2) supone que la dirección $+y$ es hacia arriba; le sugerimos tomar esa decisión de forma consistente.
3. Identifique las fuerzas no gravitacionales que efectúen trabajo. Los diagramas de cuerpo libre siempre son útiles. Si algunas de las cantidades que necesita son incógnitas, represéntelas con símbolos algebraicos.
4. Haga una lista de las cantidades conocidas y desconocidas, incluidas las coordenadas y velocidades en cada punto. Decida qué incógnitas resolverá.

EJECUTAR *la solución:* Escriba expresiones para las energías cinéticas y potenciales iniciales y finales (K_1, K_2, U_1 y U_2). En general, algunas serán conocidas y otras no. Relacione las energías cinética y potencial y el trabajo no gravitacional W_{otras} usando la ecuación (7.7). (Tendrá que calcular W_{otras} en términos de las fuerzas no gravitacionales.) Si no hay trabajo no gravitacional, la expresión se convertirá en la ecuación (7.5). Las gráficas de barras que muestran los valores iniciales de K, U y $E = K + U$ son útiles. Despeje la cantidad desconocida.

EVALUAR *la respuesta:* Verifique si su respuesta es lógica físicamente. Tenga presente, aquí y más adelante, que el trabajo efectuado por cada fuerza debe estar representado en $U_1 - U_2 = -\Delta U$ o bien en W_{otras}, pero *nunca* en ambos. El trabajo gravitacional está incluido en ΔU; tenga cuidado de no incluirlo otra vez en W_{otras}.

Ejemplo 7.2 Trabajo y energía al lanzar una pelota

En el ejemplo 7.1, suponga que la mano sube 0.50 m al lanzar la pelota, la cual, al separarse, tiene una velocidad hacia arriba de 20.0 m/s. Haga, otra vez, caso omiso de la resistencia del aire. a) Suponiendo que su mano ejerce una fuerza constante hacia arriba sobre la pelota, calcule la magnitud de esa fuerza. b) Calcule la rapidez de la pelota en un punto 15.0 m arriba de donde se le soltó.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: En el ejemplo 7.1, usamos la conservación de la energía mecánica porque sólo la gravedad efectuaba trabajo. En este ejemplo, en cambio, deberemos incluir también el trabajo no gravitacional efectuado por la mano.

PLANTEAR: La figura 7.4 muestra un diagrama de la situación, con un diagrama de cuerpo libre de la pelota al ser lanzada. El movimiento de la pelota tiene dos etapas: mientras está en contacto con la mano y después de lanzada. Para definir esas etapas, sea el punto 1 el punto donde la mano inicia su movimiento, el punto 2, donde la pelota pierde contacto con la mano y el punto 3, donde la pelota está 15.0 m arriba del punto 2. La fuerza no gravitacional de su mano, $\vec{F}$ sólo actúa entre los puntos 1 y 2. Utilizando el mismo sistema de coordenadas que en el ejemplo 7.1, tenemos $y_1 = -0.50$ m, $y_2 = 0$ y $y_3 = 15.0$ m. La pelota parte del reposo en el punto 1, así que $v_1 = 0$, y nos dicen que la rapidez con que la pelota abandona la mano es $v_2 = 20.0$ m/s. Las incógnitas son (a) la magnitud F de la fuerza que la mano aplica y (b) la rapidez v_3 en el punto 3.

EJECUTAR:

a) Para determinar la magnitud de $\vec{F}$, primero usaremos la ecuación (7.7) para calcular el trabajo W_{otras} efectuado por esa fuerza. Tenemos

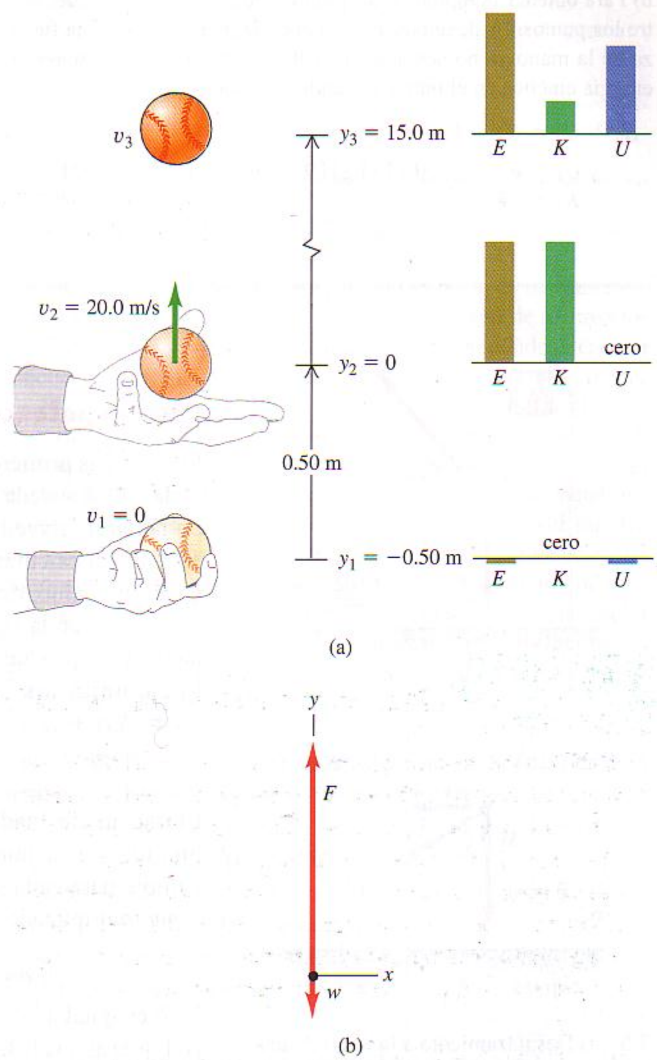
$$K_1 = 0$$

$$U_1 = mgy_1 = (0.145\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2)(-0.50\ \text{m}) = -0.71\ \text{J}$$

$$K_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}(0.145\ \text{kg})(20.0\ \text{m/s})^2 = 29.0\ \text{J}$$

$$U_2 = mgy_2 = (0.145\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2)(0) = 0$$

La energía potencial inicial U_1 es negativa porque la pelota estaba abajo del origen. Por la ecuación (7.7), $K_1 + U_1 + W_{otras} = K_2 + U_2$, así que



7.4 (a) Lanzamiento vertical de una pelota hacia arriba. (b) Diagrama de cuerpo libre de la pelota mientras la fuerza $\vec{F}$ aplicada por la mano efectúa el trabajo W_{otras} sobre la pelota. Entre y_1 y y_2 actúan $\vec{F}$ y la gravedad; de y_2 a y_3 sólo actúa la gravedad.

$$W_{\text{otras}} = (K_2 - K_1) + (U_2 - U_1)$$
$$= (29.0\text{ J} - 0) + (0 - (-0.71\text{ J})) = 29.7\text{ J}$$

La energía cinética de la pelota aumenta en $K_2 - K_1 = 29.0$ J, y la potencial, en $U_2 - U_1 = 0.71$ J; la suma es $E_2 - E_1$, el cambio en la energía mecánica total, que es igual a W_{otras}.

Suponiendo que la fuerza $\vec{F}$ hacia arriba aplicada por la mano es constante, el trabajo W_{otras} efectuado por esa fuerza es igual a la magnitud F de la fuerza multiplicada por el desplazamiento hacia arriba $y_2 - y_1$ en el que actúa:

$$W_{\text{otras}} = F(y_2 - y_1)$$
$$F = \frac{W_{\text{otras}}}{y_2 - y_1} = \frac{29.7\text{ J}}{0.50\text{ m}} = 59\text{ N}$$

Esto es unas 40 veces más que el peso de la pelota.

b) Para obtener la rapidez en el punto 3, tomamos nota de que, entre los puntos 2 y 3, se conserva la energía mecánica total; la fuerza de la mano ya no actúa, así que $W_{\text{otras}} = 0$. Podemos obtener la energía cinética en el punto 3 usando la ecuación (7.4):

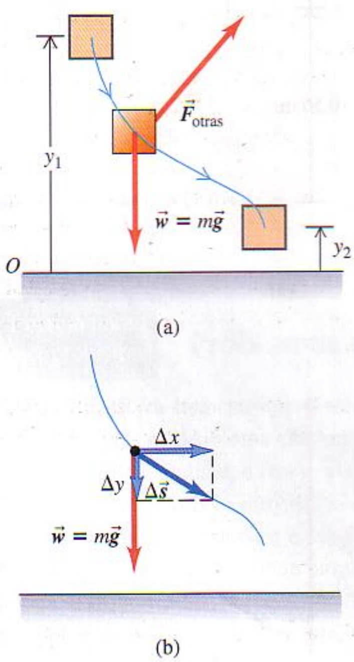
$$K_2 + U_2 = K_3 + U_3$$
$$U_3 = mgy_3 = (0.145\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2)(15.0\text{ m}) = 21.3\text{ J}$$
$$K_3 = (K_2 + U_2) - U_3 = (29.0\text{ J} + 0\text{ J}) - 21.3\text{ J} = 7.7\text{ J}$$

Dado que $K_3 = \frac{1}{2}mv_{3y}^2$, donde v_{3y} es la componente y de la velocidad de la pelota en el punto 3, tenemos

$$v_{3y} = \pm\sqrt{\frac{2K_3}{m}} = \pm\sqrt{\frac{2(7.7\text{ J})}{0.145\text{ kg}}} = \pm 10\text{ m/s}$$

El significado del signo más/menos es que la pelota pasa *dos veces* por el punto 3, una vez de subida y otra de bajada. La energía mecánica total E es constante e igual a 29.0 J mientras la pelota está en caída libre, y la energía potencial en el punto 3 es $U_3 = 21.3$ J, sea que la pelota esté subiendo o bajando. Así, en el punto 3 la energía cinética y la *rapidez* de la pelota no dependen de la dirección del movimiento. La velocidad v_{3y} es positiva (+10 m/s) cuando la pelota sube y negativa (−10 m/s) cuando baja; la rapidez v_3 es de 10 m/s en ambos casos.

EVALUAR: Para comprobar el resultado, recordemos que en el ejemplo 7.1, la pelota alcanza una altura máxima de $y = 20.4$ m. En ese punto, toda la energía cinética que la pelota tenía cuando abandonó la mano en $y = 0$ se ha convertido en energía potencial gravitacional. En $y = 15.0$, la pelota está a tres cuartas partes del camino hacia su altura máxima, así que unas tres cuartas partes de su energía mecánica deberán estar en forma de energía potencial. ¿Puede demostrar que es así, con base en los valores obtenidos para K_3 y U_3?



7.5 (a) Desplazamiento a lo largo de una trayectoria curva. (b) El trabajo realizado por la fuerza gravitacional $\vec{w} = m\vec{g}$ sólo depende de la componente vertical del desplazamiento Δy (en esta figura, Δy es negativo).

Energía potencial gravitacional para movimiento curvo

En nuestros primeros dos ejemplos, el cuerpo se movió en una trayectoria vertical recta. ¿Qué sucede si la trayectoria es inclinada o curva (Fig. 7.5a)? Sobre el cuerpo actúa la gravedad $\vec{w} = m\vec{g}$ y tal vez otras fuerzas cuya resultante llamamos $\vec{F}_{\text{otras}}$. Para calcular el trabajo efectuado por la fuerza gravitacional durante este desplazamiento, dividimos la trayectoria en segmentos pequeños $\Delta\vec{s}$; uno de ellos se muestra en la figura 7.5b. El trabajo realizado por la gravedad sobre este segmento es el producto escalar de la fuerza y el desplazamiento. En términos de vectores unitarios, la fuerza es $\vec{w} = m\vec{g} = -mg\hat{j}$ y el desplazamento es $\Delta\vec{s} = \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j}$, así que el trabajo efectuado por la fuerza gravitacional es

$$\vec{w}\cdot\Delta\vec{s} = -mg\hat{j}\cdot(\Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j}) = -mg\Delta y$$

El trabajo efectuado por la gravedad es el mismo que si el cuerpo se hubiera desplazado verticalmente una distancia Δy, sin desplazamiento horizontal. Esto se cumple para cada segmento, así que el trabajo *total* de la fuerza gravitacional es $-mg$ multiplicado por el desplazamiento vertical *total* $(y_2 - y_1)$:

$$W_{\text{grav}} = -mg(y_2 - y_1) = mgy_1 - mgy_2 = U_1 - U_2$$

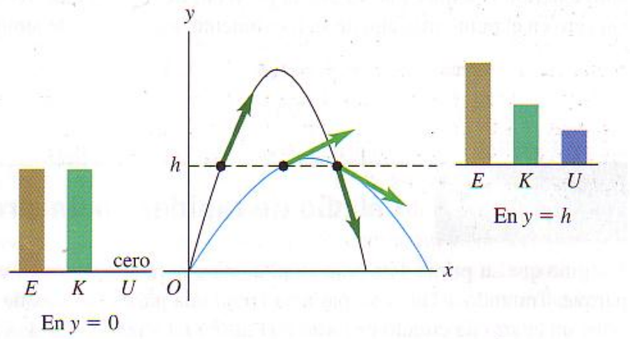
Esto es igual a la ecuación (7.1) o (7.3), donde se supuso una trayectoria vertical. Así que, aun si la trayectoria de un cuerpo entre dos puntos es curva, el trabajo total efectuado por la gravedad depende sólo de la diferencia de altura entre esos puntos. Este trabajo no se ve afectado por ningún movimiento horizontal que pueda darse. Por tanto, *podemos usar la misma expresión para la energía potencial gravitacional, sea la trayectoria del cuerpo recta o curva.*

Ejemplo conceptual 7.3 Energía en el movimiento de proyectiles

Se batean dos bolas idénticas con la misma rapidez inicial pero distintos ángulos iniciales. Demuestre que, a una altura dada h, ambas bolas tienen la misma rapidez si puede despreciarse la resistencia del aire.

SOLUCIÓN

Si no hay resistencia del aire, la única fuerza que actúa sobre cada bola después de ser bateada es su peso, así que la energía mecánica total de cada una es constante. La figura 7.6 muestra las trayectorias de dos bolas bateadas a la misma altura con la misma rapidez inicial y por tanto la misma energía mecánica total, pero con diferentes ángulos iniciales. En todos los puntos con la misma altura, la energía potencial es la misma, así que la energía cinética a esta altura debe ser igual para ambas bolas y su rapidez es idéntica.



7.6 Para la misma rapidez y altura inicial, la rapidez de un proyectil a una altura dada h siempre es la misma si se desprecia la resistencia del aire.

Ejemplo 7.4 Altura máxima de un proyectil, usando métodos de energía

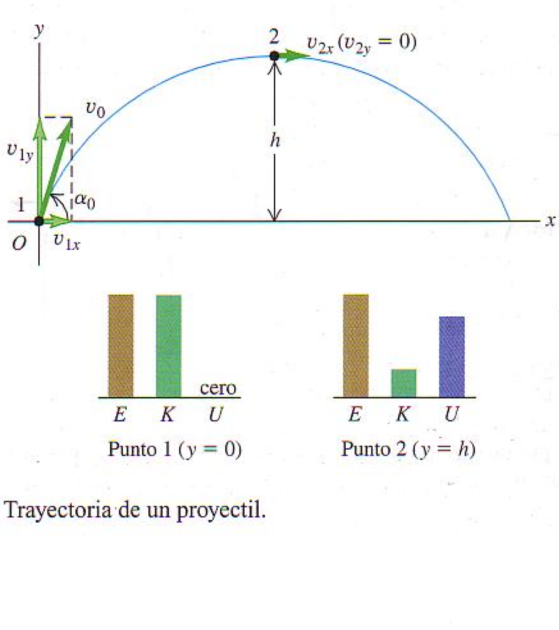
En el ejemplo 3.10 (sección 3.3), dedujimos una expresión para la altura máxima h de un proyectil lanzado con rapidez inicial v_0, a un ángulo α_0:

$$h = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \alpha_0}{2g}$$

Deduzca esta expresión empleando consideraciones de energía.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Hacemos caso omiso de la resistencia del aire, así que, igual que en el ejemplo conceptual 7.3, la energía mecánica total se conserva. Sea el punto 1 el punto de lanzamiento, donde la rapidez es $v_1 = v_0$, y sea el punto 2 el cenit de la trayectoria (Fig. 7.7). La incógnita es la altura máxima h, donde la energía cinética es mínima y la energía potencial gravitacional es máxima.



7.7 Trayectoria de un proyectil.

El problema parece fácil: la energía potencial en el punto 2 es $U_2 = mgh$, por lo que aparentemente sólo necesitamos es despejar U_2 de la ecuación de conservación de la energía, $K_1 + U_1 = K_2 + U_2$. Sin embargo, aunque conocemos las energías cinética y potencial iniciales $\left(K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 \text{ y } U_1 = 0\right)$, no conocemos la rapidez ni la energía cinética en el punto 2. Para superar esta deficiencia, usaremos dos resultados relacionados con el movimiento de proyectiles que obtuvimos en el capítulo 3: (1) la componente x de la aceleración es cero, así que la componente x de la velocidad es constante, y (2) la componente y de la velocidad es cero en el punto 2 (el cenit de la trayectoria).

EJECUTAR: Podemos expresar la energía cinética en cada punto en términos de las componentes de la velocidad, usando $v^2 = v_x^2 + v_y^2$:

$$K_1 = \frac{1}{2}m(v_{1x}^2 + v_{1y}^2)$$

$$K_2 = \frac{1}{2}m(v_{2x}^2 + v_{2y}^2)$$

La conservación de la energía da $K_1 + U_1 = K_2 + U_2$, así que

$$\frac{1}{2}m(v_{1x}^2 + v_{1y}^2) + 0 = \frac{1}{2}m(v_{2x}^2 + v_{2y}^2) + mgh$$

Para simplificar, multiplicamos todo por $2/m$, obteniendo

$$v_{1x}^2 + v_{1y}^2 = v_{2x}^2 + v_{2y}^2 + 2gh$$

Ahora usamos nuestros resultados para el movimiento de proyectiles. Puesto que la componente x de la velocidad no cambia, $v_{1x} = v_{2x}$, y podremos cancelar los términos v_x^2 de ambos miembros de la ecuación anterior. Además, puesto que el proyectil tiene velocidad vertical cero en el punto más alto de su movimiento, $v_{2y} = 0$. Así, tenemos

$$v_{1y}^2 = 2gh$$

Sin embargo, v_{1y} no es más que la componente y de la velocidad inicial, igual a v_0 sen α_0. Sustituyendo y despejando h obtenemos

$$h = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \alpha_0}{2g}$$

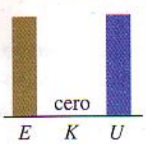
EVALUAR: Esto concuerda con el resultado del ejemplo 3.10, como debe ser.

Ejemplo 7.5 Cálculo de rapidez en un círculo vertical

Imagine que su primo Tito baja en patineta una rampa curva en un parque. Tratando a Tito y su patineta como una partícula, ésta describe un cuarto de círculo de radio R (Fig. 7.8). La masa total de Tito y su patineta es de 25.0 kg. Tito parte del reposo y no hay fricción. (a) Calcule su rapidez en la base de la rampa. (b) Calcule la fuerza normal que actúa sobre él en ese punto.

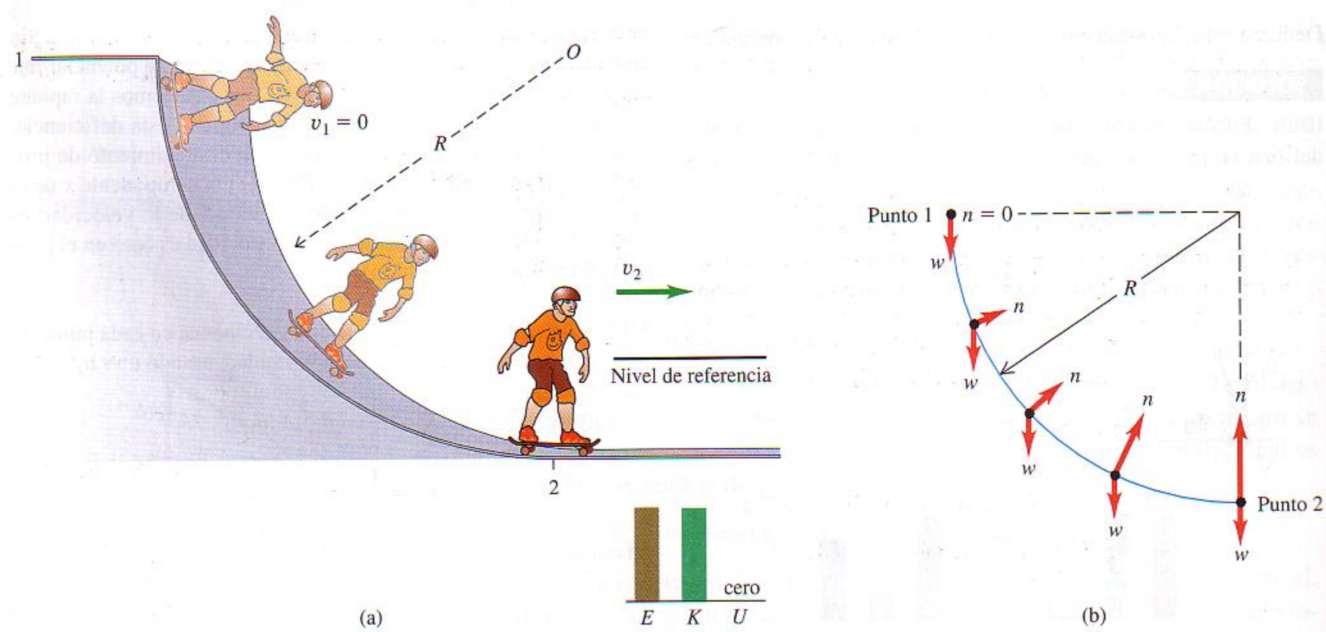
SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: No podemos usar las ecuaciones de movimiento con aceleración constante; la aceleración no es constante porque la pendiente disminuye a medida que Tito desciende. En vez de ello, usaremos el enfoque de energía. Dado que Tito se mueve en un arco circular, también usaremos lo que aprendimos acerca del movimiento circular en la sección 5.4.



PLANTEAR: Puesto que no hay fricción, la única fuerza además del peso de Tito es la fuerza normal $\vec{n}$ ejercida por la rampa (Fig. 7.8b). Aunque $\vec{n}$ actúa en toda la trayectoria, *no* efectúa trabajo porque siempre es perpendicular a la velocidad de Tito. Así, $W_{\text{otras}} = 0$ y se conserva la energía mecánica total.

Llamemos 1 al punto de partida y 2 a la base de la rampa, y sea $y = 0$ en la base (Fig. 7.8a). Entonces, $y_1 = R$ y $y_2 = 0$. (Estamos tratando a Tito como si toda su masa estuviera concentrada en su centro.) Tito parte del reposo en el tope, así que $v_1 = 0$. La incógnita en la parte (a) es su rapidez en la base, v_2. En la parte (b), nos interesa la magnitud n de la fuerza normal en el punto 2. Puesto que esta fuerza no efectúa trabajo, no aparece en la ecuación de energía, así que usaremos la segunda ley de Newton.



7.8 (a) Tito baja en patineta por una rampa circular sin fricción. La energía mecánica total es constante. (b) Diagramas de cuerpo libre de Tito y su patineta en varios puntos de la rampa.

EJECUTAR:
a) Las diferentes energías son

$$K_1 = 0 \qquad U_1 = mgR$$
$$K_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 \qquad U_2 = 0$$

Por la conservación de la energía,

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$
$$0 + mgR = \frac{1}{2}mv_2^2 + 0$$
$$v_2 = \sqrt{2gR}$$

La rapidez es la misma que si Tito hubiera caído verticalmente una altura R, y es independiente de su masa.

Como ejemplo numérico, sea $R = 3.00$ m. Entonces

$$v_2 = \sqrt{2(9.80\ \text{m/s}^2)(3.00\ \text{m})} = 7.67\ \text{m/s}$$

Cabe señalar que esta respuesta no depende de que la rampa sea circular; sea cual sea la forma de la rampa, Tito tendrá la misma rapidez $v_2 = \sqrt{2gR}$ en la base. Esto se cumpliría aunque las ruedas de su patineta perdieran contacto con la rampa durante la bajada, porque la fuerza gravitacional seguiría siendo la única que efectúa trabajo.
b) Para obtener n en el punto 2 empleando la segunda ley de Newton, necesitamos el diagrama de cuerpo libre en ese punto (Fig. 7.8b). En el punto 2, Tito se mueve con rapidez $v_2 = \sqrt{2gR}$ en un círculo de radio R; su aceleración es hacia el centro del círculo y tiene magnitud

$$a_{\text{rad}} = \frac{v_2^2}{R} = \frac{2gR}{R} = 2g$$

Si tomamos la dirección $+y$ hacia arriba, la componente y de la segunda ley de Newton es

$$\sum F_y = n + (-w) = ma_{\text{rad}} = 2mg$$
$$n = w + 2mg = 3mg$$

En el punto 2, la fuerza normal es el triple del peso de Tito. Este resultado es independiente del radio de la rampa. En los ejemplos 5.10 (sección 5.2) y 5.25 (sección 5.4) aprendimos que la magnitud de n es el *peso aparente*, así que Tito sentirá que tiene tres veces su peso real mg. Sin embargo, tan pronto como llegue a la parte horizontal de la rampa a la derecha del punto 2, la fuerza normal bajará a $w = mg$, y Tito se sentirá normal. ¿Entiende por qué?

EVALUAR: Este ejemplo ilustra una regla general acerca del papel de las fuerzas en problemas en que usamos técnicas de energía: lo que importa no es sólo si actúa una fuerza, sino si efectúa trabajo. Si no es así, como en el caso de la fuerza normal $\vec{n}$ en este ejemplo, no aparece en la ecuación (7.7), $K_1 + U_1 + W_{\text{otras}} = K_2 + U_2$.

Observe que tuvimos que usar *tanto* el enfoque de energía *como* la segunda ley de Newton para resolver este problema; la conservación de energía nos dio la rapidez, y $\sum\vec{F} = m\vec{a}$ nos dio la fuerza normal. En cada parte del problema usamos la técnica que más fácilmente nos lleva a la respuesta.

Ejemplo 7.6 Círculo vertical con fricción

En el ejemplo 7.5, suponga que la rampa tiene fricción y la rapidez de Tito en la base es de sólo 6.00 m/s. ¿Qué trabajo efectuó la fuerza de fricción sobre él? Use $R = 3.00$ m.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Usamos el mismo sistema de coordenadas y los mismos puntos inicial y final que en el ejemplo 7.5 (Fig. 7.9). Una vez más, la fuerza normal no realiza trabajo, pero ahora hay una fuerza de fricción $\vec{f}$ que *sí* efectúa trabajo. Por tanto, el trabajo no gravitacional efectuado sobre Tito entre los puntos 1 y 2, W_{otras}, es igual al trabajo efectuado por la fricción, W_f. Ésta es la incógnita, que obtendremos con la ecuación (7.7).

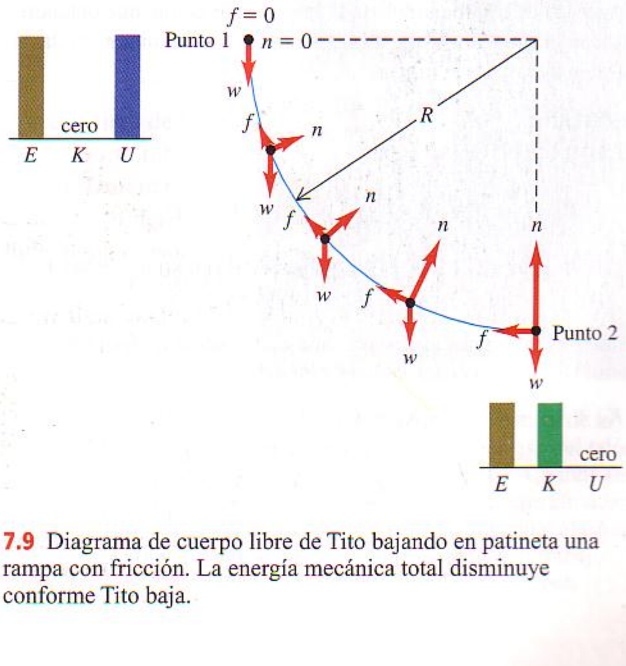
EJECUTAR: Las energías son

$$K_1 = 0$$
$$U_1 = mgR = (25.0\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2)(3.00\ \text{m}) = 735\ \text{J}$$
$$K_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}(25.0\ \text{kg})(6.00\ \text{m/s})^2 = 450\ \text{J}$$
$$U_2 = 0$$

Por la ecuación (7.7),

$$W_f = K_2 + U_2 - K_1 - U_1$$
$$= 450\ \text{J} + 0 - 0 - 735\ \text{J} = -285\ \text{J}$$

El trabajo efectuado por la fuerza de fricción es -285 J, y la energía mecánica total *disminuye* en 285 J. ¿Entiende por qué W_f debe ser negativo?



7.9 Diagrama de cuerpo libre de Tito bajando en patineta una rampa con fricción. La energía mecánica total disminuye conforme Tito baja.

EVALUAR: El movimiento de Tito está determinado por la segunda ley de Newton, $\sum \vec{F} = m\vec{a}$. Pero sería muy difícil aplicar esa ley directamente al problema porque las fuerzas normal y de fricción, así como la aceleración, están cambiando continuamente de magnitud y dirección conforme Tito baja. El enfoque de energía, en cambio, relaciona los movimientos en el tope y la base de la rampa sin implicar los pormenores de lo que sucede en medio. Muchos problemas son fáciles si usamos consideraciones de energía y muy complejos si tratamos de usar las leyes de Newton directamente.

Ejemplo 7.7 Plano inclinado con fricción

Queremos subir una caja de 12 kg a un camión deslizándola por una rampa de 2.5 m inclinada 30°. Un obrero, sin considerar la fricción, calcula que puede subir la caja dándole una rapidez inicial de 5.0 m/s con un empujón en la base. Sin embargo, la fricción *no* es despreciable; la caja sube 1.6 m por la rampa, se para, y regresa (Fig. 7.10). a) Suponiendo que la fuerza de fricción que actúa sobre la caja es constante, calcule su magnitud. b) Qué rapidez tiene la caja al volver a la base de la rampa?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La fuerza de fricción que efectúa trabajo sobre la caja mientras ésta se desliza. Igual que en el ejemplo 7.2, obtendremos la magnitud de la fuerza no gravitacional que efectúa trabajo (en este caso la fricción) con el enfoque de energía. Una vez que conozcamos la magnitud de esa fuerza, podremos calcular cuánto trabajo no gravitacional efectúa mientras la caja se desliza rampa abajo. Entonces podremos usar el enfoque de energía otra vez para obtener la rapidez de la caja en la base de la rampa.

PLANTEAR: La primera parte del movimiento es del punto 1, la base de la rampa, al punto 2, donde la caja se para instantáneamente (Fig. 7.10a). En la segunda parte del movimiento, la caja vuelve a la base de la rampa, que llamaremos punto 3 (Fig. 7.10b). Tomaremos $y = 0$ (y por tanto $U = 0$) en el piso, así que $y_1 = 0$, $y_2 = (1.6 \text{ m})$ sen 30° = 0.80 m y $y_3 = 0$. Nos dicen que $v_1 = 5.0$ m/s y $v_2 = 0$ (la caja está instantáneamente en reposo en el punto 2). La incógnita en la parte (a) es f, la magnitud de la fuerza de fricción, que obtendremos con la ecuación (7.7). En la parte (b), la incógnita es v_3, la rapidez en la base de la rampa.

EJECUTAR:

a) Las energías son

$$K_1 = \frac{1}{2}(12 \text{ kg})(5.0 \text{ m/s})^2 = 150 \text{ J} \qquad U_1 = 0$$

$$K_2 = 0 \qquad U_2 = (12 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)(0.80 \text{ m}) = 94 \text{ J}$$

$$W_{\text{otras}} = -fs$$

donde f es la magnitud desconocida de la fuerza de fricción y $s = 1.6$ m. Usando la ecuación (7.7), obtenemos

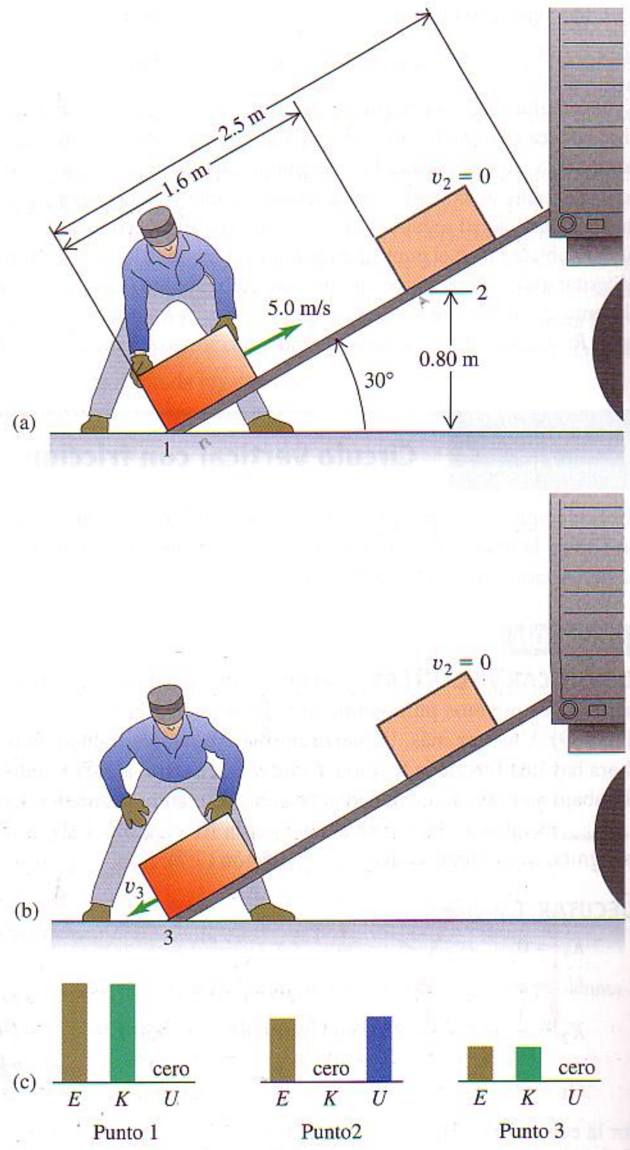
$$K_1 + U_1 + W_{\text{otras}} = K_2 + U_2$$

$$W_{\text{otras}} = -fs = (K_2 + U_2) - (K_1 + U_1)$$

$$f = -\frac{(K_2 + U_2) - (K_1 + U_1)}{s}$$

$$= -\frac{[(0 + 94 \text{ J}) - (150 \text{ J} + 0)]}{1.6 \text{ m}} = 35 \text{ N}$$

La fuerza de fricción de 35 N, actuando a lo largo de 1.6 m, reduce la energía mecánica de la caja de 150 a 94 J. (Fig. 7.10c). b) La caja vuelve al punto 3 en la base de la rampa; $y_3 = 0$ y $U_3 = 0$ (Fig. 7.10b).



7.10 (a) Una caja sube deslizándose por una rampa, se para y (b) baja. (c) Gráficas de barras de energía para los puntos 1, 2 y 3.

Al bajar, la fuerza de fricción y el desplazamiento invierten su dirección pero tienen las mismas magnitudes, así que el trabajo por fricción tiene el mismo valor negativo en cada mitad del viaje, y el total entre los puntos 1 y 3 es

$$W_{\text{otras}} = W_{\text{fric}} = -2fs = -2(35\text{ N})(1.6\text{ m}) = -112\text{ J}$$

Por la parte (a), $K_1 = 150$ J y $U_1 = 0$. La ecuación (7.7) da

$$K_1 + U_1 + W_{\text{otras}} = K_3 + U_3$$
$$K_3 = K_1 + U_1 - U_3 + W_{\text{otras}}$$
$$= 150\text{ J} + 0 - 0 + (-112\text{ J}) = 38\text{ J}$$

La caja vuelve a la base de la rampa con sólo 38 J de los 150 J originales de energía mecánica (Fig. 7.10c). Usando $K_3 = \frac{1}{2}mv_3^2$, obtenemos

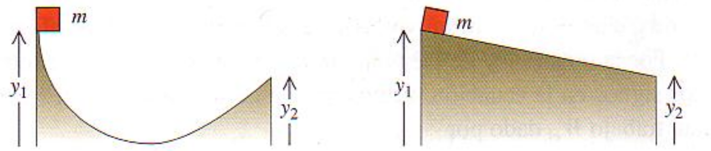
$$v_3 = \sqrt{\frac{2K_3}{m}} = \sqrt{\frac{2(38\text{ J})}{12\text{ kg}}} = 2.5\text{ m/s}$$

EVALUAR: Observe que la rapidez de la caja cuando regresa a la base de la rampa, $v_3 = 2.5$ m/s, es menor que la rapidez $v_1 = 5.0$ m/s con que salió de ese punto. Eso está bien: se perdió energía debido a la fricción.

En la parte (b) aplicamos la ecuación (7.7) a los puntos 1 y 3, considerando el viaje redondo en conjunto. También podríamos haber considerado sola la segunda parte del movimiento, aplicando la ecuación (7.7) a los puntos 2 y 3. Inténtelo y vea si obtiene el mismo valor de v_3.

Evalúe su comprensión

La figura 7.11 muestra dos rampas distintas sin fricción. Las alturas y_1 y y_2 son iguales en cada rampa. Si un bloque con masa m se suelta del reposo desde el extremo izquierdo de cada rampa, ¿cuál bloque tendrá mayor rapidez al llegar al extremo derecho?

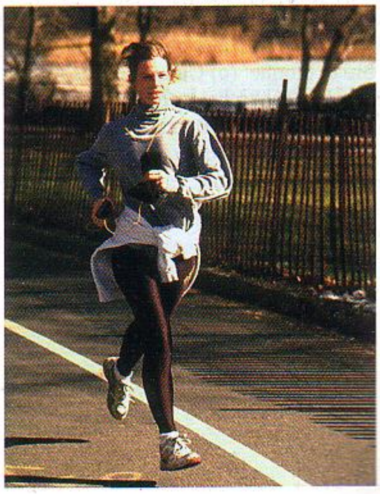


7.11 Dos rampas con las mismas y_1 y y_2.

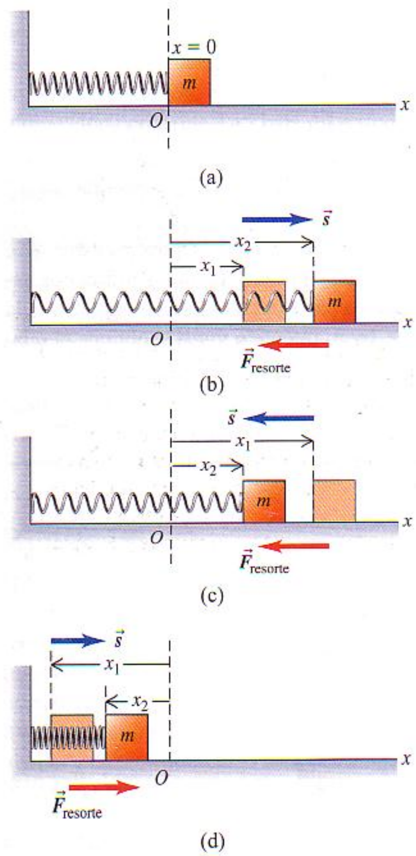
7.2 | Energía potencial elástica

Cuando un vagón de ferrocarril choca con un parachoques de resorte al final de la vía, el resorte se comprime y el vagón se para. Si no hay fricción, el resorte rebota y el vagón se aleja con su rapidez original en la dirección opuesta. Durante la interacción con el resorte, la energía cinética del vagón se "guardó" en la deformación elástica del resorte. Algo similar ocurre en una liga de hule de una resortera. La fuerza que estira la liga efectúa trabajo sobre ella, el cual se almacena en la liga hasta que se suelta. Entonces, la liga imparte energía cinética al proyectil.

Éste es el mismo patrón que vimos en el martinete de la sección 7.1: efectuar trabajo sobre el sistema para almacenar energía, que después se convierte en energía cinética. Describimos el proceso de guardar energía en un cuerpo deformable, como un resorte o una liga, en términos de *energía potencial elástica* (Fig. 7.12). Un cuerpo es *elástico* si recupera su forma y tamaño originales después de deformarse. Específicamente, consideraremos el almacenamiento de energía en un resorte ideal como los de la sección 6.3. Para mantener un resorte ideal estirado una distancia x, debemos ejercer una fuerza $F = kx$, donde k es la constante de fuerza del resorte. Ésta es una idealización útil porque muchos cuerpos elásticos exhiben



7.12 El tendón de Aquiles, que va de la parte de atrás del tobillo al hueso del talón, actúa como un resorte natural. Cuando se estira y luego se relaja, el tendón almacena y después libera energía potencial elástica. Esta acción de resorte reduce el trabajo que los músculos de la pierna deben efectuar al correr.



7.13 (a) Bloque conectado a un resorte en equilibrio ($x = 0$) en una superficie horizontal. (b) Cuando el resorte sufre un estiramiento, efectúa trabajo negativo sobre el bloque. (c) Cuando el resorte se relaja, efectúa trabajo positivo sobre el bloque. (d) Un resorte comprimido también realiza trabajo positivo sobre el bloque al relajarse.

tal proporcionalidad directa entre la fuerza F y el desplazamiento x, siempre que x no sea demasiado grande.

Procedemos igual que con la energía potencial gravitacional. Comenzamos con el trabajo realizado por la fuerza elástica (del resorte) y lo combinamos con el teorema de trabajo-energía. La diferencia es que la energía potencial gravitacional es una propiedad compartida de un cuerpo y la Tierra, pero la elástica sólo se almacena en el resorte (u otro cuerpo deformable).

La figura 7.13 muestra el resorte ideal de la figura 6.15, con su extremo izquierdo fijo y el derecho conectado a un bloque de masa m que puede moverse sobre el eje x. En la figura 7.13a, el cuerpo está en $x = 0$ con el resorte ni estirado ni comprimido. Movemos el bloque lateralmente, estirando o comprimiendo el resorte, y lo soltamos. Al moverse el bloque de una posición x_1 a otra posición x_2, ¿cuánto trabajo realiza la fuerza elástica sobre el bloque?

En la sección 6.3 vimos que el trabajo que debemos efectuar *sobre* el resorte para mover un extremo desde un alargamiento x_1 a otro distinto x_2 es

$$W = \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 \qquad \text{(trabajo efectuado } \textit{sobre} \text{ un resorte)}$$

donde k es la constante de fuerza del resorte. Si estiramos más el resorte, realizamos trabajo positivo sobre él; si lo dejamos relajarse sosteniendo un extremo, realizamos trabajo negativo sobre él. También vimos que esta expresión para el trabajo sigue siendo correcta si el resorte se comprime, en vez de estirarse, de modo que x_1 o x_2, o ambos, son negativos. Ahora nos interesa el trabajo efectuado *por* el resorte. Por la tercera ley de Newton, un trabajo es el negativo del otro. Cambiando los signos en la ecuación, vemos que, al desplazarse de x_1 a x_2, el resorte efectúa un trabajo W_{el} dado por

$$W_{el} = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 \qquad \text{(trabajo efectuado } \textit{por} \text{ un resorte)}$$

El subíndice "el" significa *elástico*. Si x_1 y x_2 son positivos y $x_2 > x_1$ (Fig. 7.13b), el resorte efectúa trabajo negativo sobre el bloque, que se mueve en la dirección $+x$ mientras el resorte tira de él en la dirección $-x$. El resorte se estira más y el bloque se frena. Si x_1 y x_2 son positivos y $x_2 < x_1$ (Fig. 7.13c), el trabajo del resorte es positivo al relajarse y el bloque se acelera. Si el resorte puede comprimirse, x_1 o x_2, o ambos, pueden ser negativos, pero la expresión para W_{el} sigue siendo válida. En la figura 7.13d, x_1 y x_2 son negativos, pero x_2 lo es menos; el resorte comprimido efectúa trabajo positivo al relajarse, acelerando al bloque.

Como hicimos con el trabajo gravitacional, podemos expresar el trabajo del resorte en términos de una cantidad dada al principio y al final del desplazamiento. Esta cantidad es $\frac{1}{2}kx^2$, que definimos como la **energía potencial elástica**:

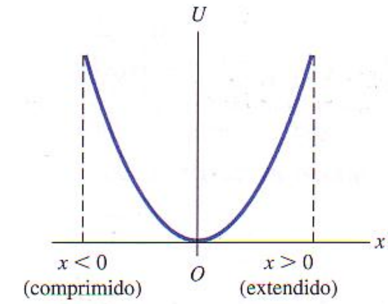
$$U = \frac{1}{2}kx^2 \qquad \text{(energía potencial elástica)} \qquad (7.9)$$

La figura 7.14 es una gráfica de la ecuación (7.9). La unidad de U es el joule (J), la misma de *todas* las cantidades de energía y trabajo; esto es evidente en la ecuación (7.9) si recordamos que las unidades de k son N/m y que 1 N · m = 1 J.

Podemos usar la ecuación (7.9) para expresar el trabajo W_{el} efectuado sobre el bloque por la fuerza elástica en términos del cambio en la energía potencial:

$$W_{el} = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 = U_1 - U_2 = -\Delta U \qquad (7.10)$$

Si un resorte estirado se estira más, como en la figura 7.13b, W_{el} es negativo y U *aumenta*; se almacena más energía potencial en el resorte. Si un resorte estirado se relaja (Fig. 7.13c), x disminuye, W_{el} es positivo y U *disminuye*; el resorte pierde energía potencial elástica. Los valores negativos de x corresponden a un resorte comprimido pero, como muestra la figura 7.14, U es positiva para x tanto positiva como negativa, y las ecuaciones (7.9) y (7.10) son válidas en ambos casos. Así, cuando un resorte comprimido se comprime más, $W_{el} < 0$ y U aumenta; si un resorte comprimido se relaja (Fig. 7.13d), $W_{el} > 0$ y U disminuye. Cuanto más se comprime *o* estira un resorte, mayor es su energía potencial elástica.



7.14 La gráfica de la energía potencial elástica para un resorte ideal es una parábola: $U = \frac{1}{2}kx^2$, donde x es la extensión o compresión del resorte. En el caso de una extensión (estiramiento), x es positiva. En una compresión (si es posible), x es negativa. La energía potencial elástica U nunca es negativa.

CUIDADO Una diferencia importante entre la energía potencial gravitacional $U = mgy$ y la elástica $U = \frac{1}{2}kx^2$ es que *no* podemos escoger $x = 0$ donde nos plazca. Para que sea congruente con la ecuación (7.9), $x = 0$ *debe* ser la posición en la que el resorte no está ni estirado ni comprimido. Ahí, su energía potencial elástica y la fuerza que ejerce son cero.

El teorema de trabajo-energía dice que $W_{tot} = K_2 - K_1$, sin importar qué fuerzas actúen sobre el cuerpo. Si la fuerza elástica es la *única* que realiza trabajo sobre el cuerpo,

$$W_{tot} = W_{el} = U_1 - U_2$$

El teorema de trabajo-energía $W_{tot} = K_2 - K_1$ nos da entonces

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \qquad \text{(si sólo la fuerza elástica realiza trabajo)} \quad (7.11)$$

Aquí, U está dada por la ecuación (7.9), así que

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 \qquad (7.12)$$

$$\text{(si sólo la fuerza elástica realiza trabajo)}$$

En este caso, la energía mecánica total $E = K + U$ (la suma de las energías cinética y potencial elástica) se *conserva*. Un ejemplo es el movimiento del bloque de la figura 7.13, siempre que la superficie horizontal no tenga fricción y ninguna fuerza además de la ejercida por el resorte efectúe trabajo.

Para que la ecuación (7.12) sea estrictamente correcta, el resorte ideal *no debe tener masa*; si la tiene, también tendrá energía cinética al moverse las espiras del resorte. Podemos despreciar la energía cinética del resorte si su masa es mucho menor que la masa m del cuerpo conectado al resorte. Por ejemplo, un auto común tiene una masa de 1200 kg o más. Los resortes de su suspensión tienen masas de unos cuantos kilogramos, así que podemos despreciarlas si queremos estudiar cómo el auto rebota sobre su suspensión.

Si otras fuerzas además de la elástica efectúan trabajo sobre el cuerpo, llamamos a su trabajo W_{otras}, igual que antes. Entonces, el trabajo total es $W_{\text{tot}} = W_{\text{el}} + W_{\text{otras}}$, y el teorema de trabajo-energía da

$$W_{\text{el}} + W_{\text{otras}} = K_2 - K_1$$

El trabajo realizado por el resorte sigue siendo $W_{\text{el}} = U_1 - U_2$, así que, otra vez,

$$K_1 + U_1 + W_{\text{otras}} = K_2 + U_2 \qquad (7.13)$$
$$(\text{si otras fuerzas aparte de la elástica efectúan trabajo})$$

y

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 + W_{\text{otras}} = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 \qquad (7.14)$$
$$(\text{si otras fuerzas aparte de la elástica efectúan trabajo})$$

Esta ecuación muestra que *el trabajo realizado por todas las fuerzas* aparte de la elástica *es igual al cambio de energía mecánica total $E = K + U$ del sistema, donde U es la energía potencial elástica*. El "sistema" se compone del cuerpo de masa m y el resorte de constante k. Si W_{otras} es positivo, E aumenta; si W_{otras} es negativo, E disminuye. Compare la ecuación (7.14) con la (7.8), que describe situaciones en las que hay energía potencial gravitacional pero no elástica.

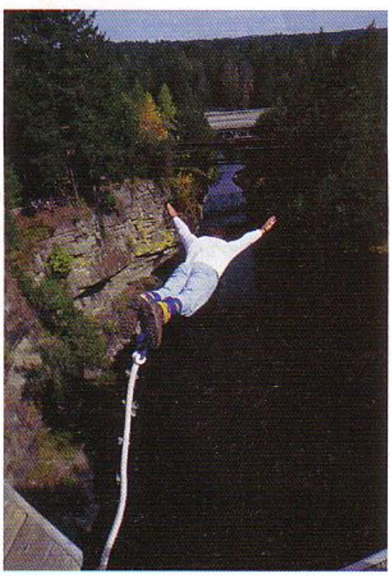
Situaciones con energía potencial tanto gravitacional como elástica

Las ecuaciones (7.11), (7.12), (7.13) y (7.14) son válidas si la única energía potencial del sistema es la elástica. ¿Qué sucede si tenemos fuerzas *tanto* gravitacionales *como* elásticas, digamos un bloque conectado al extremo inferior de un resorte que cuelga verticalmente? Aún podemos usar la ecuación (7.13), pero ahora U_1 y U_2 son los valores inicial y final de la energía potencial *total*, que incluye la gravitacional y la elástica ($U = U_{\text{grav}} + U_{\text{el}}$). Así, *la expresión más general* de la relación entre energía cinética, energía potencial y trabajo realizado por otras fuerzas es

$$K_1 + U_{\text{grav},1} + U_{\text{el},1} + W_{\text{otras}} = K_2 + U_{\text{grav},2} + U_{\text{el},2} \qquad (7.15)$$
$$(\text{válida en general})$$

Esto es, **el trabajo realizado por todas las fuerzas aparte de la gravitacional o la elástica es igual al cambio en la energía mecánica total $E = K + U$ del sistema, donde U es la suma de las energías potenciales gravitacional y elástica**. Si las fuerzas gravitacional y elástica son las *únicas* que efectúan trabajo sobre el cuerpo, $W_{\text{otras}} = 0$ y la energía mecánica total (que incluye energías potenciales gravitacional y elástica) se conserva.

El salto con bungee (Fig. 7.15) es un ejemplo de transformaciones entre energía cinética, energía potencial elástica y energía potencial gravitacional. Al caer la persona, la energía potencial gravitacional disminuye y se convierte en la energía cinética del saltador y la energía potencial elástica del bungee. Más allá de cierto punto de la caída, la rapidez de la persona disminuye, con lo que tanto la energía potencial gravitacional como la energía cinética se convierten en energía potencial elástica.



7.15 La caída de una persona atada a un bungee implica interacciones entre energía cinética, energía potencial gravitacional y energía potencial elástica. Sin embargo, la energía mecánica no se conserva porque tanto fuerzas de fricción dentro del bungee como la resistencia del aire también efectúan trabajo. Esto es bueno: si la energía mecánica se conservara, la persona seguiría rebotando eternamente.

La estrategia bosquejada en la sección 7.1 es igualmente útil para resolver problemas que implican fuerzas elásticas además de gravitacionales. Lo único nuevo es que ahora U incluye la energía potencial elástica $U_{el} = \frac{1}{2}kx^2$, donde x es el desplazamiento del resorte *respecto a su longitud no estirada*. La energía potencial da cuenta del trabajo realizado por las fuerzas gravitacional y elástica; el trabajo de las otras fuerzas, W_{otras}, debe incluirse por separado.

ActivPhysics ONLINE

5.4 Salto inverso con bungee

5.5 Bolos con impulso de resorte

Ejemplo 7.8 Movimiento con energía potencial elástica

En la figura 7.16a, un deslizador de masa $m = 0.200$ kg descansa en un riel de aire horizontal, sin fricción, conectado a un resorte con $k = 5.00$ N/m. Se tira del deslizador, estirando el resorte 0.100 m, y luego se suelta con velocidad inicial cero (Fig. 7.16b). El deslizador regresa a su posición de equilibrio ($x = 0$). ¿Qué velocidad tiene cuando $x = 0.080$ m?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Dado que la fuerza del resorte varía con la posición, este problema no puede resolverse con las ecuaciones para movimiento con aceleración constante; usaremos el método de energía para obtener una solución sencilla. En particular, utilizaremos la idea de que, al comenzar a moverse el deslizador, la energía potencial elástica se convierte en cinética. (El deslizador permanece a la misma altura durante todo el movimiento, así que la energía potencial gravitacional no es factor).

PLANTEAR: La fuerza del resorte es la única que efectúa trabajo sobre el deslizador, así que $W_{otras} = 0$ y podemos usar la ecuación (7.11). Sea el punto 1 donde se suelta el deslizador (Fig. 7.16b), y el 2, en $x = 0.080$ m (Fig. 7.16c). Conocemos la velocidad en el punto 1 ($v_{1x} = 0$); la incógnita es la velocidad x en el punto 2, v_{2x}.

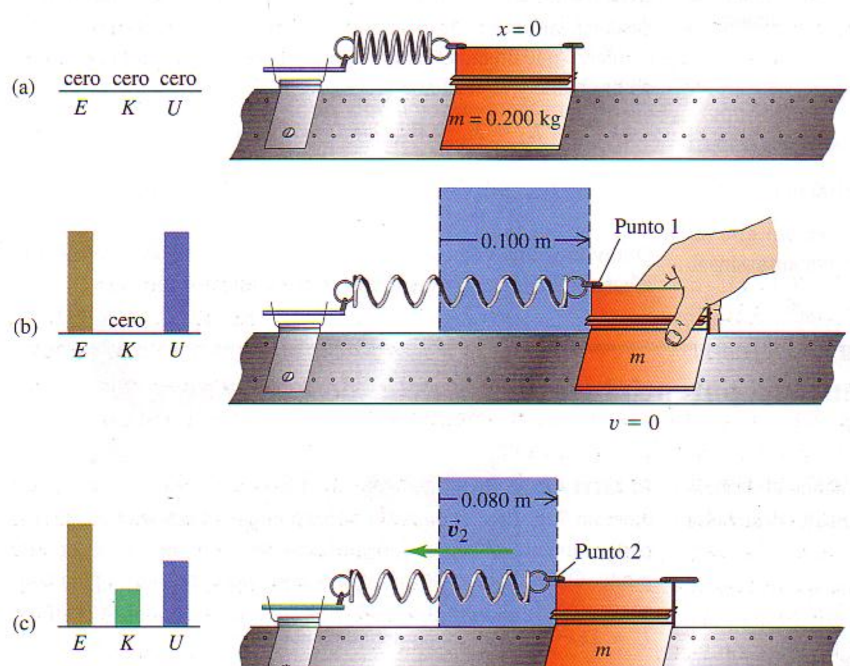
EJECUTAR: Las energías son

$$K_1 = \frac{1}{2}(0.200\ \text{kg})(0)^2 = 0$$

$$U_1 = \frac{1}{2}(5.00\ \text{n/m})(0.100\ \text{m})^2 = 0.0250\ \text{J}$$

$$K_2 = \frac{1}{2}mv_{2x}^{\ 2}$$

$$U_2 = \frac{1}{2}(5.00\ \text{N/m})(0.080\ \text{m})^2 = 0.0160\ \text{J}$$



7.16 (a) Deslizador de riel de aire conectado a un resorte. (b) Se agrega energía potencial elástica al sistema estirando el resorte. (c) La energía potencial elástica se transforma en energía cinética cuando el deslizador regresa hacia su posición de equilibrio.

Entonces, por la ecuación (7.11),

$$K_2 = K_1 + U_1 - U_2 = 0 + 0.0250\text{ J} - 0.0160\text{ J} = 0.0090\text{ J}$$

$$v_{2x} = \pm\sqrt{\frac{2K_2}{m}} = \pm\sqrt{\frac{2(0.0090\text{ J})}{0.200\text{ kg}}} = \pm 0.30\text{ m/s}$$

Escogemos la raíz negativa porque el deslizador se está moviendo en la dirección $-x$; la respuesta que queremos es $v_{2x} = -0.30$ m/s.

EVALUAR: ¿Qué significa la segunda solución, $v_{2x} = +0.30$ m/s? En algún momento, el resorte se comprimirá y empujará el deslizador hacia la derecha (la dirección $+x$) (véase la Fig. 7.13d). La segunda solución nos dice que, cuando el deslizador pase por $x = 0.080$ m moviéndose hacia la derecha, su rapidez será de 0.30 m/s: la misma que cuando pasó por este punto moviéndose hacia la izquierda.

Cuando el deslizador pase por el punto $x = 0$, el resorte estará relajado y toda la energía mecánica estará en forma de energía cinética. ¿Puede demostrar que la rapidez del deslizador en ese punto es de 0.50 m/s?

Ejemplo 7.9 Movimiento con energía potencial elástica y trabajo efectuado por otras fuerzas

Para el sistema del ejemplo 7.8, suponga que el deslizador está en reposo en $x = 0$, con el resorte sin estirar. Usted aplica al deslizador una fuerza constante $\vec{F}$ en la dirección $+x$ con magnitud de 0.610 N. ¿Qué velocidad tiene éste cuando $x = 0.100$ m?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Aunque la fuerza aplicada $\vec{F}$ es constante, la fuerza del resorte no lo es, así que la aceleración del deslizador no es constante. La energía mecánica total no se conserva a causa del trabajo efectuado por $\vec{F}$, pero aun así podemos usar la relación de energía de la ecuación (7.13).

PLANTEAR: Tomemos como punto 1 en $x = 0$, donde la rapidez es $v_{1x} = 0$, y como punto 2, $x = 0.100$ m (no son los mismos puntos rotulados en la figura 7.16). La incógnita es v_{2x}, la velocidad en el punto 2.

EJECUTAR: Las energías son

$$K_1 = 0 \qquad U_1 = 0$$

$$K_2 = \frac{1}{2}mv_{2x}^2 \qquad U_2 = \frac{1}{2}(5.00\text{ N/m})(0.100\text{ m})^2 = 0.0250\text{ J}$$

$$W_{\text{otras}} = (0.610\text{ N})(0.100\text{ m}) = 0.0610\text{ J}$$

(Para calcular W_{otras}, multiplicamos la magnitud de la fuerza por el desplazamiento, ya que ambas tienen la dirección $+x$.) Inicialmente, la energía mecánica total es cero; el trabajo realizado por $\vec{F}$ aumenta la energía mecánica total a 0.0610 J, de los que 0.0250 J corresponde a energía potencial elástica. El resto es energía cinética. Por la ecuación (7.13),

$$K_1 + U_1 + W_{\text{otras}} = K_2 + U_2$$

$$K_2 = K_1 + U_1 + W_{\text{otras}} - U_2 = 0 + 0 + 0.0610\text{ J} - 0.0250\text{ J} = 0.0360\text{ J}$$

$$v_{2x} = \sqrt{\frac{2K_2}{m}} = \sqrt{\frac{2(0.0360\text{ J})}{0.200\text{ kg}}} = 0.60\text{ m/s}$$

Escogemos la raíz cuadrada positiva porque el deslizador se mueve en la dirección $+x$.

EVALUAR: Para verificar la respuesta, piense en qué cambiaría si desconectáramos el deslizador del resorte. Entonces, $\vec{F}$ sería la única fuerza que efectúa trabajo, la energía potencial sería cero en todo momento y la ecuación (7.13) nos daría

$$K_2 = K_1 + W_{\text{otras}} = 0 + 0.0610\text{ J}$$

$$v_{2x} = \sqrt{\frac{2K_2}{m}} = \sqrt{\frac{2(0.0610\text{ J})}{0.200\text{ kg}}} = 0.78\text{ m/s}$$

Obtuvimos una velocidad menor que este valor porque el resorte efectúa trabajo negativo sobre el deslizador al estirarse.

Ejemplo 7.10 Movimiento con energía potencial elástica al dejar de actuar las demás fuerzas

En el ejemplo 7.9, suponga que $\vec{F}$ deja de actuar cuando el deslizador llega al punto $x = 0.100$ m. ¿Cuánto más avanza el deslizador antes de parar?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Al quitarse $\vec{F}$ la fuerza del resorte es la única que efectúa trabajo, así que en esta parte del movimiento la energía mecánica total $E = K + U$ se conserva.

PLANTEAR: Tomaremos el punto 2 en $x = 0.100$ m, como en el ejemplo 7.9, y sea el punto 3 el punto donde el deslizador está instantáneamente en reposo. La incógnita es la coordenada x_3 de este punto. Obtendremos su valor empleando las expresiones para conservación de la energía, ecuación (7.11), junto con la relación $U = \frac{1}{2}kx^2$ para la energía potencial elástica.

EJECUTAR: Vimos en el ejemplo 7.9 que las energías cinética y potencial en el punto 2 son $K_2 = 0.0360$ J y $U_2 = 0.0250$ J, respectivamente. Por tanto, la energía mecánica total en este punto y más adelante es $K_2 + U_2 = 0.0610$ J. Cuando el cuerpo se para en $x = x_3$, la energía cinética K_3 es cero y la energía potencial U_3 es igual a la energía mecánica total de 0.0610 J. Esto también se deduce de $K_2 + U_2 = K_3 + U_3$:

$$U_3 = K_2 + U_2 - K_3 = 0.0360\text{ J} + 0.0250\text{ J} - 0 = 0.0610\text{ J}$$

Pero $U_3 = \frac{1}{2}kx_3^2$, así que

$$x_3 = \sqrt{\frac{2U_3}{k}} = \sqrt{\frac{2(0.0610\text{ J})}{5.00\text{ N/m}}} = 0.156\text{ m}$$

El cuerpo se mueve 0.056 m más después de retirarse la fuerza en $x = 0.100$ m.

EVALUAR: La energía mecánica total para el movimiento del punto 2 al punto 3 es de 0.0610 J, igual al trabajo W_{otras} efectuado por la fuerza $\vec{F}$ en el ejemplo 7.8. ¿Es coincidencia? De ninguna manera; inicialmente (en el punto 1 del ejemplo 7.9), el sistema deslizador-resorte tenía energía mecánica cero, así que toda la energía mecánica que tiene proviene del trabajo efectuado por $\vec{F}$.

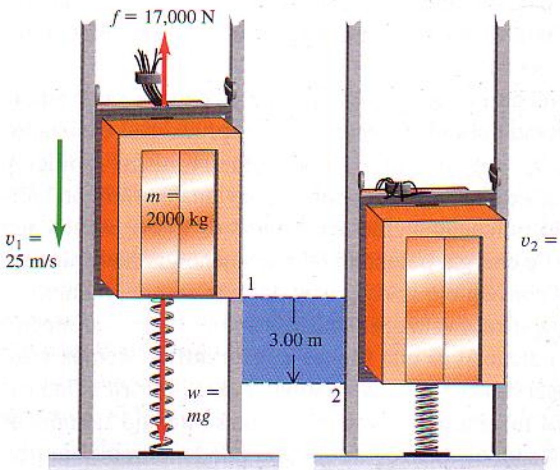
Ejemplo 7.11 Movimiento con fuerzas gravitacional, elástica y de fricción

En una situación de diseño "de peor caso", un elevador de 2000 kg con cables rotos cae a 25 m/s cuando hace contacto con un resorte amortiguador en el fondo del cubo. Se supone que el resorte debe detener al elevador, comprimiéndose 3.00 m al hacerlo (Fig. 7.17). Durante el movimiento, un freno de seguridad aplica una fuerza de fricción constante de 17,000 N al elevador. Imagine que es un consultor de diseño y le piden determinar qué constante de fuerza debe tener el resorte.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Usaremos el enfoque de energía para determinar la constante de fuerza que aparece en la expresión de energía potencial elástica. Observe que en este problema intervienen energías potenciales *tanto* gravitacional *como* elástica. Además, la energía mecánica total no se conserva porque la fricción realiza trabajo negativo W_{otras} sobre el elevador.

PLANTEAR: Puesto que la energía mecánica no se conserva e intervienen dos tipos de energía potencial, usaremos la forma más general de la relación de energía, la ecuación (7.15). Tomaremos como punto 1 la posición de la base del elevador cuando recién entra en contacto con el resorte, y como punto 2, su posición cuando queda en reposo. Escogemos el origen en el punto 1, así que $y_1 = 0$ y $y_2 = -3.00$ m. Entonces, la coordenada del extremo superior del resorte es la misma que la del elevador, y la energía potencial elástica en cualquier punto entre el 1 y el 2 es $U_{\text{el}} = \frac{1}{2}ky^2$. (La energía potencial gravitacional es $U_{\text{grav}} = mgy$, como siempre.) Conocemos la rapidez inicial y final del elevador y la magnitud de la fuerza de fricción, así que la única incógnita es la constante de fuerza k.



7.17 La caída de un elevador es detenida por un resorte y una fuerza de fricción constante.

EJECUTAR: La rapidez inicial del elevador es $v_1 = 25$ m/s, así que su energía cinética inicial es

$$K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}(2000\text{ kg})(25\text{ m/s})^2 = 625{,}000\text{ J}$$

El elevador se detiene en el punto 2, así que $K_2 = 0$. La energía potencial en el punto 1, U_1, es cero; $U_{\text{grav}} = 0$ porque $y_1 = 0$, y $U_{\text{el}} = 0$ porque el resorte aún no se ha comprimido. En el punto 2, hay energía potencial tanto gravitacional como elástica, así que

$$U_2 = mgy_2 + \frac{1}{2}ky_2^2$$

La energía potencial gravitacional en el punto 2 es

$$mgy_2 = (2000\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2)(-3.00\text{ m}) = -58{,}800\text{ J}$$

La otra fuerza es la de fricción (17,000 N), que actúa opuesta al desplazamiento de 3.00 m, así que

$$W_{\text{otras}} = -(17{,}000\text{ N})(3.00\text{ m}) = -51{,}000\text{ J}$$

Incluimos estos términos en $K_1 + U_1 + W_{\text{otras}} = K_2 + U_2$ y obtenemos

$$K_1 + 0 + W_{\text{otras}} = 0 + \left(mgy_2 + \frac{1}{2}ky_2^2\right)$$

así que la constante de fuerza del resorte es

$$k = \frac{2(K_1 + W_{\text{otras}} - mgy_2)}{y_2^2}$$
$$= \frac{2[625{,}000\text{ J} + (-51{,}000\text{ J}) - (-58{,}800\text{ J})]}{(-3.00\text{ m})^2}$$
$$= 1.41 \times 10^5\text{ N/m}$$

Ésta es comparable con la de la suspensión de un auto.

EVALUAR: Examinemos lo que podría parecer una paradoja aquí. La energía potencial elástica del resorte en el punto 2 es

$$\frac{1}{2}ky_2^2 = \frac{1}{2}(1.41 \times 10^5 \text{ N/m})(-3.00 \text{ m})^2 = 632{,}800 \text{ J}$$

Esto es *más* que la energía mecánica total en el punto 1,

$$E_1 = K_1 + U_1 = 625{,}000 \text{ J} + 0 = 625{,}000 \text{ J}$$

Sin embargo, la fuerza de fricción hizo que la energía mecánica del sistema *disminuyera* en 51,000 J entre el punto 1 y el punto 2. ¿Apareció energía de la nada? No se preocupe; no hay tal paradoja. En el punto 2 también hay energía potencial gravitacional *negativa* $mgy_2 = -58{,}800$ J porque el punto 2 está debajo del origen. La energía mecánica total aquí es

$$E_2 = K_2 + U_2 = 0 + \frac{1}{2}ky_2^2 + mgy_2$$

$$= 632{,}800 \text{ J} + (-58{,}800 \text{ J}) = 574{,}000 \text{ J}$$

Ésta no es sino la energía mecánica inicial de 625,000 J menos los 51 000 J perdidos por la fricción.

Ahora, como consultor de diseño, le corresponde advertir a su cliente que el elevador no se quedará en el fondo del cubo; rebotará. Ello se debe a que, en el punto 2, el resorte comprimido ejerce una fuerza hacia arriba de magnitud $F_{\text{resorte}} = (1.41 \times 10^5 \text{ N/m})(3.00 \text{ m}) = 422{,}000$ N. El peso del elevador es sólo $w = mg = (2000 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2) = 19{,}600$ N, así que la fuerza neta será hacia arriba. El elevador subirá a pesar de que el freno ahora ejerce una fuerza de fricción *hacia abajo* de magnitud $f = 17{,}000$ N; la fuerza del resorte es mayor que la suma de f y mg. El elevador rebotará una y otra vez hasta que la fricción haya eliminado suficiente energía mecánica para que se detenga.

¿Puede demostrar que la aceleración del elevador cuando golpea el resorte es inaceptablemente alta?

Evalúe su comprensión

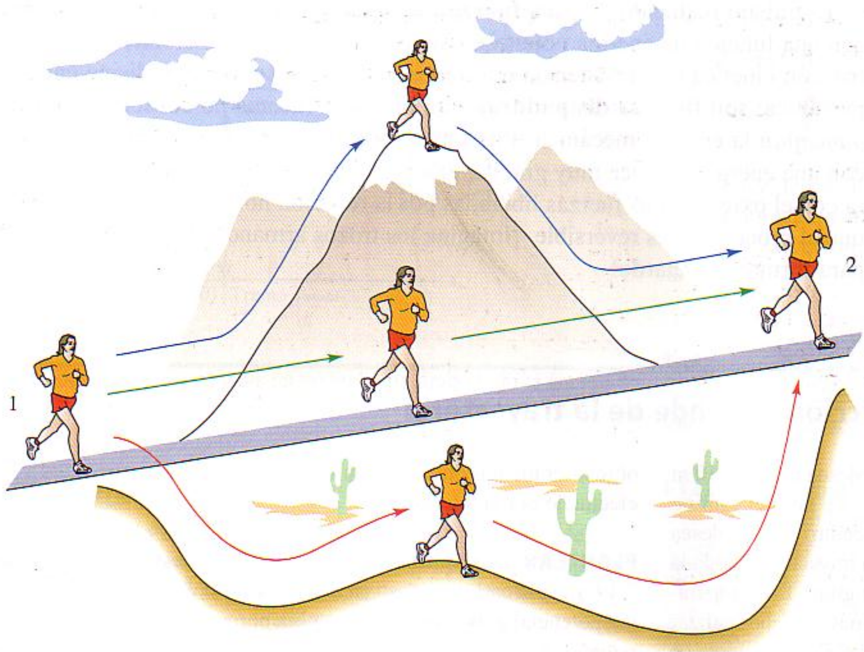
Obtenga el valor de y cuando el elevador del ejemplo 7.11 por fin se detiene, y también los valores de K, U_{grav}, U_{el} y E en ese punto. Suponga que el freno de seguridad ejerce una fuerza hacia arriba de 17,000 N. (*Sugerencia:* ¿Qué relación hay entre la compresión del resorte y la fuerza que ejerce sobre el elevador?) Compare la energía mecánica en este punto con su valor en el punto 1.

7.3 | Fuerzas conservativas y no conservativas

Al estudiar la energía potencial hemos hablado de "almacenar" energía cinética convirtiéndola en energía potencial, pensando siempre que podremos recuperarla después como energía cinética. Una pelota lanzada hacia arriba se frena al convertirse su energía cinética en potencial, pero al bajar la conversión se invierte y la bola se acelera al convertirse energía potencial otra vez en cinética. Si no hay resistencia del aire, la pelota se mueve con la misma rapidez cuando regresa al punto de lanzamiento que cuando se lanzó.

Si un deslizador sobre un riel de aire horizontal sin fricción choca con un amortiguador de resorte en el extremo del riel, el resorte se comprime y el deslizador se detiene, pero luego rebota y, como no hay fricción, tiene la misma rapidez y energía cinética que tenía antes de chocar. Aquí también, hay una conversión bidireccional de energía cinética a potencial a cinética. En ambos casos, vemos que podemos definir una función de energía potencial tal que la energía mecánica total, cinética más potencial, es constante o *se conserva* durante el movimiento.

Decimos que una fuerza que ofrece esta oportunidad de conversión bidireccional entre energías cinética y potencial es una **fuerza conservativa**. Hemos visto dos ejemplos de fuerzas conservativas: la gravitacional y la de resorte. Una característica fundamental de las fuerzas conservativas es que su trabajo siempre es *reversible*. Lo que depositamos en el "banco" de energía puede retirarse sin pérdida. Otro aspecto importante de las fuerzas conservativas es que un cuerpo puede moverse del punto 1 al 2 siguiendo varios caminos, pero el trabajo realizado



7.18 Para cualquier fuerza conservativa, el trabajo realizado por esa fuerza depende sólo de los extremos del movimiento, no del camino seguido. Así, la fuerza gravitacional, que es conservativa, realiza el mismo trabajo sobre el corredor sin importar qué camino siga para ir del punto 1 al punto 2.

por una fuerza conservativa es el mismo para todos (Fig. 7.18). Así, si un cuerpo se mantiene cerca de la superficie terrestre, la fuerza gravitacional $m\vec{g}$ es independiente de la altura, y el trabajo realizado por ella sólo depende del cambio de altura. Si el cuerpo describe una trayectoria cerrada, volviendo al punto de partida, el trabajo *total* de la fuerza gravitacional siempre es cero.

El trabajo realizado por una fuerza conservativa *siempre* tiene estas propiedades:

1. Siempre puede expresarse como la diferencia entre los valores inicial y final de una función de *energía potencial*.
2. Es reversible.
3. Es independiente de la trayectoria del cuerpo y depende sólo de los puntos inicial y final.
4. Si los puntos inicial y final son el mismo, el trabajo total es cero.

Si las únicas fuerzas que efectúan trabajo son conservativas, la energía mecánica total $E = K + U$ es constante.

No todas las fuerzas son conservativas. Considere la fuerza de fricción que actúa sobre la caja que se desliza en la rampa del ejemplo 7.7 (sección 7.1). El cuerpo sube y regresa al punto de partida, pero el trabajo total efectuado por la fricción sobre él *no* es cero. Al invertirse la dirección del movimiento, se invierte la fuerza de fricción, que realiza trabajo *negativo* en *ambas* direcciones. Si un auto con frenos bloqueados derrapa con rapidez (y energía cinética) decreciente, la energía cinética perdida no se puede recuperar invirtiendo el movimiento ni de ninguna otra manera, y la energía mecánica *no* se conserva. No hay función de energía potencial para la fuerza de fricción.

De manera análoga, la fuerza de resistencia de fluidos (sección 5.3) no es conservativa. Si lanzamos una pelota hacia arriba, la resistencia del aire efectúa trabajo negativo sobre ella al subir *y* al bajar. La bola regresa a la mano con menor rapidez y menos energía cinética que cuando salió, y no hay forma de recuperar la energía mecánica perdida.

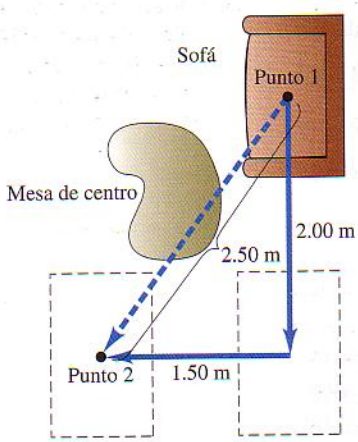
El trabajo realizado por una **fuerza no conservativa** *no* puede representarse con una función de energía potencial. Algunas fuerzas no conservativas, como la fricción cinética o la resistencia de fluidos, hacen que se pierda o disipe energía mecánica; son **fuerzas disipadoras**. También hay fuerzas no conservativas que *aumentan* la energía mecánica. Los fragmentos de un petardo salen despedidos con una energía cinética muy grande, gracias a una reacción química de la pólvora con el oxígeno. Las fuerzas liberadas por la reacción no son conservativas porque el proceso no es reversible. ¡Imagine los trozos armándose espontáneamente para formar un petardo!

Ejemplo 7.12 El trabajo de fricción depende de la trayectoria

Imagine que está reacomodando sus muebles y desea mover 2.50 m un sillón de 40.0 kg en una habitación (Fig. 7.19), pero el camino recto está bloqueado por una pesada mesa de centro que no desea mover. Por tanto, mueve el sillón siguiendo una trayectoria acodada cuyos miembros tienen 2.00 m y 1.50 m de longitud. En comparación con la trayectoria recta, ¿cuánto trabajo más se debe realizar para empujar el sillón por la trayectoria acodada? El coeficiente de fricción cinética es de 0.200.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Aquí efectúan trabajo tanto usted como la fuerza de fricción, así que deberemos usar la relación de energía que incluye fuerzas distintas de las elásticas y gravitacionales. Con esa relación, obtendremos un vínculo entre el trabajo efectuado por *usted* y el efectuado por la *fricción*.



7.19 Vista superior de los muebles. ¿Cuánto trabajo más se requiere para mover el sofá por la trayectoria acodada?

PLANTEAR: Los puntos inicial y final se muestran en la figura 7.19. El sofá está en reposo en ambos, así que $K_1 = K_2 = 0$. La energía potencial gravitacional no cambia porque el movimiento es horizontal: $U_1 = U_2 = 0$. De la ecuación (7.7), se sigue que $W_{\text{otras}} = 0$. El trabajo realizado sobre el sofá es la suma del trabajo positivo que Ud. realiza, $W_{\text{Ud.}}$ y el trabajo negativo W_{fric} de la fuerza de fricción cinética. Puesto que la suma es cero, tenemos

$$W_{\text{Ud.}} = -W_{\text{fric}}$$

Por tanto, para determinar $W_{\text{Ud.}}$, calcularemos el trabajo efectuado por la fricción.

EJECUTAR: El piso es horizontal, así que la fuerza normal sobre el sillón es igual a su peso mg, y la magnitud de la fuerza de fricción es $f_k = \mu_k n = \mu_k mg$. El trabajo que usted debe efectuar en cada trayectoria es entonces

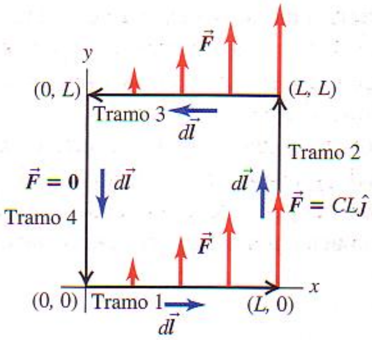
$$\begin{aligned} W_{\text{Ud.}} &= -W_{\text{fric}} = -(-f_k s) = +\mu_k mgs \\ &= (0.200)(40.0\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2)(2.50\text{ m}) \\ &= 196\text{ J} \qquad \text{(trayectoria recta)} \\ W_{\text{Ud.}} &= -W_{\text{fric}} \\ &= (0.200)(40.0\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2)(2.00\text{ m} + 1.50\text{ m}) \\ &= 274\text{ J} \qquad \text{(trayectoria acodada)} \end{aligned}$$

El trabajo extra es 274 J − 196 J = 78 J

EVALUAR: El trabajo efectuado por la fricción es $W_{\text{fric}} = -W_{\text{Ud.}} = -196$ J por el camino recto y -274 J por el acodado. El trabajo efectuado por la fricción depende del camino seguido, y esto demuestra que la fricción es una fuerza no conservativa.

Ejemplo 7.13 ¿Conservativa o no conservativa?

En cierta región del espacio, la fuerza que actúa sobre un electrón es $\vec{F} = Cx\hat{j}$, donde C es una constante positiva. El electrón se mueve en dirección antihoraria en un cuadrado sobre el plano xy con esquinas en $(x, y) = (0, 0)$, $(L, 0)$, (L, L) y $(0, L)$ (Fig. 7.20). Calcule el trabajo de $\vec{F}$ sobre el electrón durante una vuelta. ¿Esta fuerza es conservativa o no conservativa?



7.20 Electrón que se mueve en un ciclo cuadrado bajo la acción de la fuerza $\vec{F} = Cx\hat{\jmath}$.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: En el ejemplo 7.12, la fuerza de fricción tenía magnitud constante y siempre era opuesta al desplazamiento, así que era fácil calcular el trabajo efectuado. Aquí, en cambio, la fuerza $\vec{F}$ no es constante y en general no está en la dirección del desplazamiento, así que usaremos la expresión más general del trabajo (ecuación 6.14):

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

donde $d\vec{l}$ es un desplazamiento infinitesimal. Calculemos el trabajo de $\vec{F}$ en cada tramo y sumemos los resultados para obtener el trabajo efectuado en el viaje "redondo".

EJECUTAR: En el primer tramo, de (0, 0) a $(L, 0)$, la fuerza varía pero siempre es perpendicular al desplazamiento, así que $\vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$, y el trabajo es $W_1 = 0$. En el tramo de $(L, 0)$ a (L, L), la fuerza tiene siempre $\vec{F} = CL\hat{\jmath}$. El desplazamiento en este tramo es en la dirección $+y$, así que $d\vec{l} = dy\hat{\jmath}$ y

$$\vec{F} \cdot d\vec{l} = CL\hat{\jmath} \cdot dy\hat{\jmath} = CLdy$$

El trabajo efectuado en el segundo tramo es entonces

$$W_2 = \int_{(L,0)}^{(L,L)} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{y=0}^{y=L} CL\,dy = CL\int_0^L dy = CL^2$$

En el tercer tramo, de (L, L) a $(0, L)$, $\vec{F}$ es otra vez perpendicular al desplazamiento, y $W_3 = 0$. La fuerza es cero en el tramo final, de $(0, L)$ a (0, 0), así que $W_4 = 0$. El trabajo efectuado por $\vec{F}$ en el viaje "redondo" es

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 = 0 + CL^2 + 0 + 0 = CL^2$$

Los puntos inicial y final son el mismo, pero el trabajo total de $\vec{F}$ no es cero. Es una fuerza no conservativa; no puede representarse con una función de energía potencial.

EVALUAR: Dado que W es positivo, la energía mecánica del electrón *aumenta* en el recorrido. Esto no es una curiosidad matemática; es una descripción de lo que sucede en una planta generadora de electricidad. Un lazo de alambre se mueve en un campo magnético, el cual produce una fuerza no conservativa similar a la del ejemplo. Los electrones que se mueven en el alambre adquieren energía al dar vuelta al lazo, y esa energía se lleva mediante líneas de transmisión al consumidor. (Veremos esto con detalle en el capítulo 29.) ¡Toda la electricidad usada en hogares e industrias proviene de trabajo efectuado por fuerzas no conservativas!

¿Cómo cambiaría W si el electrón viajara en sentido horario? La fuerza $\vec{F}$ no cambiaría, pero la dirección de cada desplazamiento infinitesimal $d\vec{l}$ se invertiría. Por tanto, el trabajo tendría signo opuesto y, para el recorrido completo en sentido horario, sería $W = -CL^2$. Este comportamiento es distinto del de la fuerza de fricción. Cuando un cuerpo se desliza sobre una superficie estacionaria con fricción, el trabajo de la fricción siempre es negativo, sea cual sea la dirección del movimiento (véase el ejemplo 7.7 en la sección 7.1).

La ley de conservación de la energía

Las fuerzas no conservativas no pueden representarse en términos de energía potencial, pero podemos describir sus efectos en términos de energías distintas de la cinética y la potencial. Cuando un auto con frenos bloqueados derrapa hasta detenerse, las ruedas y el camino se calientan. La energía asociada a este cambio en el estado de los materiales se denomina **energía interna**. Cuando se eleva la temperatura de un cuerpo, su energía interna aumenta; si se reduce su temperatura, su energía interna disminuye.

Para captar el significado de la energía interna, consideremos un bloque que se desliza por una superficie áspera. La fricción realiza trabajo *negativo* sobre el bloque, y el cambio de energía interna del bloque y la superficie es *positivo* (ambos se calientan). Experimentos cuidadosos demuestran que el aumento en la energía interna es *exactamente* igual al valor absoluto del trabajo efectuado por la fricción. Dicho de otro modo,

$$\Delta U_{\text{int}} = -W_{\text{otras}}$$

7.21 Cuando se quema un litro de gasolina en el motor de un automóvil, libera 3.3×10^7 J de energía interna. Por tanto, $\Delta U_{int} = -3.3 \times 10^7$ J, donde el signo menos indica que la cantidad de energía almacenada en la gasolina ha disminuido. Esa energía se puede convertir en energía cinética (para hacer que aumente la rapidez del auto) o en energía potencial (para hacer que el auto suba una cuesta).

ActivPhysics ONLINE

5.7 Máquina de Atwood modificada

donde ΔU_{int} es el cambio de energía interna. Si sustituimos esto en la ecuación (7.7), (7.13) o (7.15), vemos que

$$K_1 + U_1 - \Delta U_{int} = K_2 + U_2$$

Si escribimos $\Delta K = K_2 - K_1$ y $\Delta U = U_2 - U_1$, podemos expresar esto como

$$\Delta K + \Delta U + \Delta U_{int} = 0 \qquad \text{(ley de conservación de la energía)} \quad (7.16)$$

Este notable enunciado es la forma general de la **ley de conservación de la energía**. En un proceso dado, las energías cinética, potencial e interna de un sistema pueden cambiar, pero la *suma* de todos los cambios siempre es cero. Una disminución en una forma de energía se compensa con un aumento en las otras (Fig. 7.21). Si ampliamos nuestra definición de energía para incluir la interna, la ecuación (7.16) dice que *la energía nunca se crea ni se destruye, sólo cambia de forma*. No se ha observado aún una excepción a esta regla.

Observe que el concepto de trabajo no aparece en la ecuación (7.16). Esta ecuación nos invita a pensar sólo en términos de conversión de energía de una forma a otra. Si lanzamos una pelota hacia arriba, convertimos parte de la energía interna de las moléculas de nuestro cuerpo en energía cinética de la pelota, que se convierte en energía potencial gravitacional conforme la pelota sube y otra vez en energía cinética al bajar. Si hay resistencia del aire, parte de la energía calienta el aire y la pelota, aumentando su energía interna. Si atrapamos la pelota al caer, la energía que no se perdió en el aire se convertirá otra vez en energía interna; la pelota y su mano ahora están más calientes que al principio.

En una estación generadora hidroeléctrica, el agua que cae impulsa las turbinas ("ruedas de agua") que a su vez impulsan generadores eléctricos. Básicamente, se libera energía potencial gravitacional al caer el agua, y la estación generadora la convierte en energía eléctrica. Aun si no conocemos los detalles de cómo se logra esto, podemos usar la ley de conservación de la energía (ecuación 7.16) para sacar una conclusión importante: la cantidad de energía eléctrica producida no puede ser mayor que la energía potencial gravitacional perdida. (A causa de la fricción, parte de la energía potencial se gasta en calentar el agua y el mecanismo.)

En capítulos posteriores estudiaremos la relación entre energía interna, cambios de temperatura, calor y trabajo. Éste es el corazón del campo de la física llamado *termodinámica*.

Ejemplo 7.14 Trabajo efectuado por la fricción

Examinemos otra vez el ejemplo 7.6 de la sección 7.1, donde Tito baja una rampa curva en patineta. Su energía cinética inicial es cero, y la potencial es 735 J. Abajo, su energía cinética es de 450 J y la potencial es cero. Por tanto, $\Delta K = +450$ J y $\Delta U = -735$ J. El trabajo $W_{otras} = W_{fric}$ efectuado por las fuerzas de fricción no conservadoras es -285 J, así que el cambio de energía interna es $\Delta U_{int} = -W_{otras} = +285$ J. Las ruedas, cojinetes y rampa se calientan un poco al bajar Tito. Según la ecuación (7.16), la suma de los cambios de energía es cero:

$$\Delta K + \Delta U + \Delta U_{int} = +450\ \text{J} + (-735\ \text{J}) + 285\ \text{J} = 0$$

La energía total del sistema (incluidas las formas de energía no mecánicas) se conserva.

Evalúe su comprensión

Para la situación del ejemplo 7.12, calcule el trabajo total que deberá efectuar para mover el sillón del punto 1 al punto 2 siguiendo los tramos de 2.00 m y 1.50 m de la trayectoria acodada y regresarlo después al punto 1 por el camino recto indicado con una línea punteada en la figura 7.19. (Suponga que primero se hizo a un lado la mesa de centro.) El sillón quedó en su posición original; entonces, ¿por qué el trabajo total efectuado sobre él no es cero?

7.4 | Fuerza y energía potencial

En los dos tipos de fuerzas conservativas (gravitacional y elástica) que estudiamos, comenzamos con una descripción del comportamiento de la fuerza y de él dedujimos una expresión para la energía potencial. Por ejemplo, para un cuerpo de masa m en un campo gravitacional uniforme, la fuerza gravitacional es $F_y = -mg$. Vimos que la energía potencial correspondiente es $U(y) = mgy$. Para estirar un resorte ideal una distancia x, ejercemos una fuerza igual a $+kx$. Por la tercera ley de Newton, la fuerza que un resorte ideal ejerce sobre un cuerpo es igual y opuesta, $F_x = -kx$. La función de energía potencial correspondiente es $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$.

No obstante, en su estudio de la física encontrará situaciones en las que tiene una expresión para la *energía potencial* en función de la posición y necesita determinar la *fuerza*. Veremos varios ejemplos de este tipo cuando estudiemos las fuerzas eléctricas más adelante. En general, es mucho más fácil calcular primero la energía potencial eléctrica y luego determinar la fuerza eléctrica correspondiente.

Veamos cómo calcular la fuerza que corresponde a una expresión de energía potencial dada. Primero, consideremos un movimiento rectilíneo sobre el eje x. Denotamos la componente x de la fuerza, que es función de x, con $F_x(x)$, y la energía potencial, con $U(x)$. Esta notación nos recuerda que F_x y U son *funciones* de x. Ahora recordamos que, en cualquier desplazamiento, el trabajo W efectuado por una fuerza conservativa es el negativo del cambio de energía potencial ΔU:

$$W = -\Delta U$$

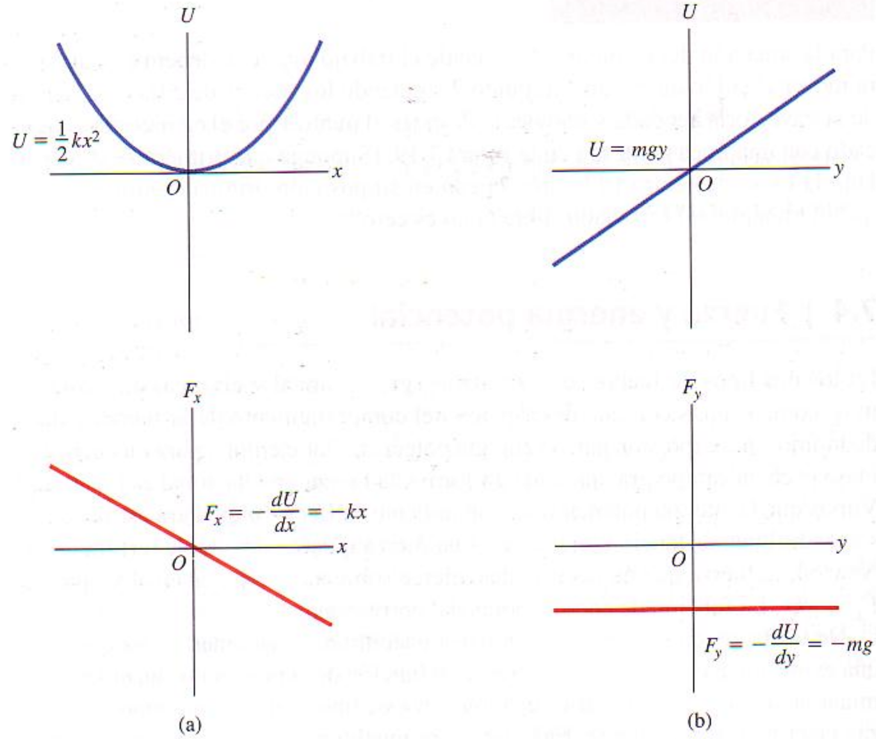
Apliquemos esto a un desplazamiento pequeño Δx. El trabajo efectuado por $F_x(x)$ durante este desplazamiento es aproximadamente igual a $F_x(x)\Delta x$. Decimos "aproximadamente" porque $F_x(x)$ podría variar un poco en el intervalo Δx, pero se cumple aproximadamente que

$$F_x(x)\Delta x = -\Delta U \quad \text{y} \quad F_x(x) = -\frac{\Delta U}{\Delta x}$$

Probablemente ya ve hacia dónde vamos. En el límite $\Delta x \to 0$; la variación de F_x se hace despreciable y tenemos la relación exacta

$$F_x(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \quad \text{(fuerza a partir de la energía potencial, en una dimensión)} \quad (7.17)$$

Este resultado es lógico; en las regiones donde $U(x)$ cambia más rápidamente con x (donde $dU(x)/dx$ es grande), se efectúa trabajo máximo durante un desplazamiento dado, y esto corresponde a una magnitud de fuerza grande. Además, si $F_x(x)$ está en la dirección $+x$, $U(x)$ *disminuye* al aumentar x. Queda claro que $F_x(x)$ y $dU(x)/dx$ deben tener signos opuestos. El significado físico de la ecuación (7.17)



7.22 Gráficas de energía potencial y fuerza contra posición para (a) la fuerza de resorte y (b) la fuerza gravitacional. En ambos casos, la fuerza es el negativo de la derivada de la energía potencial.

es que *una fuerza conservativa siempre trata de llevar el sistema a una energía potencial menor*.

Como verificación, consideremos la función de la energía potencial elástica, $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$. Si sustituimos esto en la ecuación (7.17), obtenemos

$$F_x(x) = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) = -kx$$

que es la expresión correcta para la fuerza ejercida por un resorte ideal (Fig. 7.22a). De manera análoga, tenemos $U(y) = mgy$ para la energía potencial gravitacional; después de cambiar x a y (el eje donde se efectúa el movimiento), tenemos $F_y = -dU/dy = -d(mgy)/dy = -mg$, que es la expresión correcta para la fuerza gravitacional (Fig. 7.22b).

Ejemplo 7.15 Fuerza eléctrica y su energía potencial

Una partícula con carga eléctrica se sostiene en reposo en $x = 0$, mientras otra con idéntica carga puede moverse libremente en el eje $+x$. La energía potencial del sistema es

$$U(x) = \frac{C}{x}$$

donde C es una constante positiva que depende de la magnitud de las cargas. Deduzca una expresión para la componente x de fuerza que actúa sobre la carga móvil, en función de su posición.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Tenemos la función de energía potencial $U(x)$, así que podemos usar la ecuación (7.17) para obtener lo que buscamos, la función $F_x(x)$.

EJECUTAR: La derivada con respecto a x de la función $1/x$ es $-1/x^2$, así que la fuerza sobre la carga móvil para $x > 0$ es

$$F_x(x) = -\frac{dU(x)}{dx} = -C\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{C}{x^2}$$

EVALUAR: La componente x de fuerza es positiva, y corresponde a una interacción de repulsión entre cargas eléctricas iguales. La energía potencial es muy grande si x es pequeña y se acerca a cero cuando x se hace grande; la fuerza empuja la carga móvil hacia valores positivos grandes de x, para los que la energía potencial es menor. La fuerza varía según $1/x^2$; es pequeña si las partículas están muy separadas (x grande) pero se hace grande si las partículas se acercan (x pequeña). Éste es un ejemplo de la ley de Coulomb para interacciones eléctricas, que estudiaremos más a fondo en el capítulo 21.

Fuerza y energía potencial en tres dimensiones

Podemos extender este análisis a tres dimensiones, donde la partícula puede moverse en las direcciones x, y, z, o todas a la vez, bajo la acción de una fuerza conservativa con componentes F_x, F_y y F_z. Cada componente de fuerza puede ser función de las coordenadas x, y y z. La función de energía potencial U también es función de las tres coordenadas espaciales. Ahora podemos usar la ecuación (7.17) para calcular cada componente de la fuerza. El cambio de energía potencial ΔU cuando la partícula se mueve una distancia pequeña Δx en la dirección x está dada por $-F_x\Delta x$; no depende de F_y y F_z, que representan las componentes de la fuerza perpendicular al desplazamiento que no efectúan trabajo. Tenemos otra vez la relación aproximada

$$F_x = -\frac{\Delta U}{\Delta x}$$

Las componentes de fuerza y y z se determinan exactamente de la misma forma:

$$F_y = -\frac{\Delta U}{\Delta y} \qquad F_z = -\frac{\Delta U}{\Delta z}$$

Si queremos que las relaciones sean exactas, deberemos tomar límites $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ y $\Delta z \to 0$ para que estos cocientes se conviertan en derivadas. Dado que U puede ser función de las tres coordenadas, debemos recordar que, al calcular las derivadas, sólo una coordenada cambia a la vez. Calculamos la derivada de U con respecto a x suponiendo que y y z son constantes y sólo x varía, etc. Éstas se llaman *derivadas parciales*. La notación usual es $\partial U/\partial x$, etc.; el símbolo ∂ es una d modificada para recordarnos la naturaleza de la operación. Escribimos

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \qquad (7.18)$$

(fuerza a partir de la energía potencial)

Podemos usar vectores unitarios para escribir una sola expresión vectorial compacta para la fuerza $\vec{F}$:

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}\right) \quad \text{(fuerza a partir de la energía potencial)} \qquad (7.19)$$

La expresión en paréntesis representa una operación específica sobre la función U, donde se obtiene la derivada parcial de U con respecto a cada coordenada, se multiplican por el vector unitario correspondiente y se suman vectorialmente. Esta operación se denomina **gradiente** de U y suele abreviarse $\vec{\nabla} U$. Por tanto, la fuerza es el negativo del gradiente de la función de energía potencial:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U \qquad (7.20)$$

Como verificación, sustituyamos en la ecuación (7.20) la función $U = mgy$ para la energía potencial gravitacional:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}(mgy) = -\left(\frac{\partial(mgy)}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial(mgy)}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial(mgy)}{\partial z}\hat{k}\right) = (-mg)\hat{\jmath}$$

Ésta es la expresión que ya conocemos para la fuerza gravitacional.

Ejemplo 7.16

Fuerza y energía potencial en dos dimensiones

Un disco de hockey se desliza sobre una mesa de hockey de aire, sin fricción; sus coordenadas son x y y, y sobre él actúa una fuerza conservativa descrita por la función de energía potencial

$$U(x, y) = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2)$$

Deduzca una expresión para la fuerza que actúa sobre el disco y obtenga una expresión para la magnitud de la fuerza en función de la posición.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Obtendremos las componentes de la fuerza a partir de la función $U(x, y)$ empleando la ecuación (7.18); luego determinaremos la magnitud de la fuerza empleando la fórmula para la magnitud de un vector: $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$.

EJECUTAR: Las componentes de la fuerza son

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -kx \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -ky$$

Por la ecuación (7.19), esto corresponde a la expresión vectorial

$$\vec{F} = -k(x\hat{\imath} + y\hat{\jmath})$$

$x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$ es el vector de posición $\vec{r}$ de la partícula, así que podemos reescribir la expresión como $\vec{F} = -k\vec{r}$. Esto representa una fuerza que siempre tiene dirección opuesta al vector de posición de la partícula, es decir, que siempre está dirigida al origen. La energía potencial es mínima en el origen, así que en este caso también la fuerza empuja en la dirección de energía potencial decreciente.

La *magnitud* de la fuerza en cualquier punto es

$$F = \sqrt{(-kx)^2 + (-ky)^2} = k\sqrt{x^2 + y^2} = kr$$

donde r es la distancia de la partícula al origen. Ésta es la fuerza ejercida por un resorte que obedece la ley de Hooke y tiene longitud despreciable (en comparación con las demás distancias del problema) cuando no esta deformado. Así, el movimiento del disco es el que tendría si estuviera unido a un extremo de un resorte ideal con longitud despreciable sin deformar; el otro extremo está unido a la mesa de hockey en el origen.

EVALUAR: Podemos comprobar nuestro resultado tomando nota de que la función de energía potencial también puede expresarse como $U = \frac{1}{2}kr^2$. Escrita de este modo, U es función de una sola coordenada r, así que podemos calcular la fuerza con la ecuación (7.17) después de sustitur x por r:

$$F_r = -\frac{dU}{dr} = -\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{2}kr^2\right) = -kr$$

Igual que en nuestro resultado anterior, la fuerza tiene magnitud kr; el signo menos indica que la fuerza está dirigida radialmente hacia adentro (hacia el origen).

Evalúe su comprensión

Una fuerza conservativa F_x actúa sobre una partícula que se mueve sobre el eje x. En cierto punto, la fuerza es cero. ¿Qué le dice esto acerca del valor de la función de energía potencial $U(x)$ en ese punto? ¿Y del valor de la derivada de $U(x)$ en ese punto?

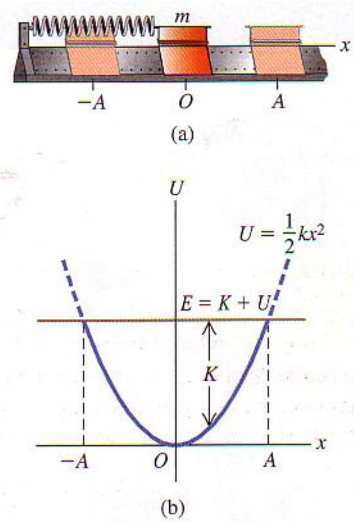
7.5 | Diagramas de energía

Cuando una partícula se mueve en línea recta bajo la acción de una fuerza conservativa, podemos entender mejor los posibles movimientos examinando la gráfica de la función de energía potencial $U(x)$. La figura 7.23a muestra un deslizador de masa m que se mueve en el eje x sobre un riel de aire. El resorte ejerce sobre él una fuerza de magnitud $F_x = -kx$. La figura 7.23b es la gráfica de la función de energía potencial correspondiente $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$. Si la fuerza elástica del resorte es la *única* fuerza horizontal que actúa sobre el deslizador, la energía mecánica total $E = K + U$ es constante, independiente de x. En ese caso, una gráfica de E en función de x es una recta horizontal.

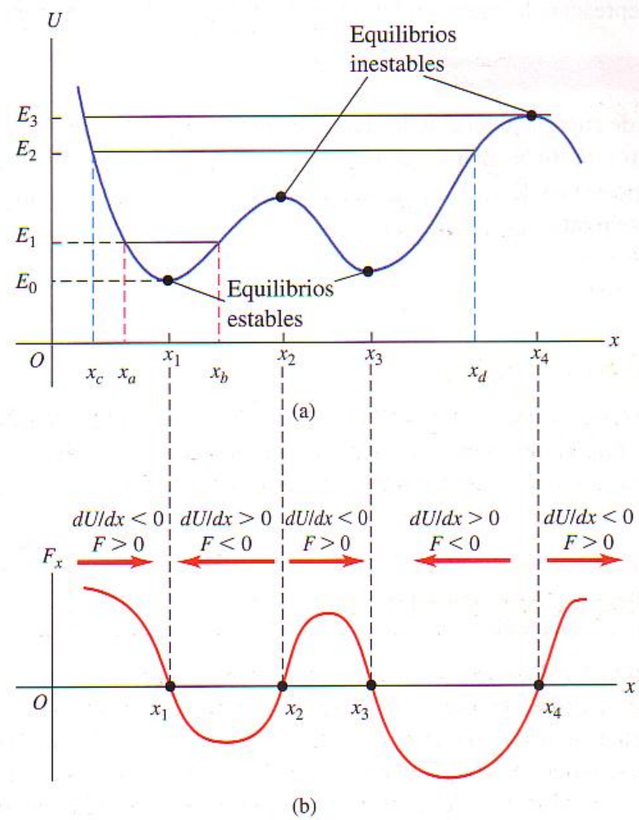
La distancia vertical entre las curvas de U y E en cada punto representa $E - U$ y es igual a la energía cinética K en ese punto. Vemos que K es máxima en $x = 0$ y cero en los valores de x donde se cruzan las curvas (A y $-A$ en el diagrama). Así, la rapidez v es máxima en $x = 0$ y cero en $x = \pm A$, los puntos del *máximo* desplazamiento posible desde $x = 0$ para un valor dado de la energía total E. La energía potencial U nunca puede ser mayor que la energía total E, pues entonces K tendría que ser negativa, lo que es imposible. El movimiento es una oscilación entre los puntos $x = A$ y $x = -A$.

En cada punto, la fuerza F_x sobre el deslizador es igual al negativo de la pendiente de la curva $U(x)$: $F_x = -dU/dx$. Cuando la partícula está en $x = 0$, la pendiente y la fuerza son cero, y tenemos una posición de *equilibrio*. Si x es positivo, la pendiente de la curva de $U(x)$ es positiva y F_x es negativa, dirigida hacia el origen. Si x es negativo, la pendiente es negativa y F_x es positiva, otra vez hacia el origen. Una fuerza así se denomina *fuerza restauradora;* si el deslizador se desplaza hacia cualquier lado de $x = 0$, la fuerza resultante tiende a "restaurarlo" a $x = 0$. Una situación análoga es una canica que rueda en una ensaladera de fondo redondo. Decimos que $x = 0$ es un punto de **equilibrio estable**. Más generalmente, *todo mínimo de una curva de energía potencial es una posición de equilibrio estable.*

La figura 7.24a muestra una función de energía potencial $U(x)$ hipotética pero más general. La figura 7.24b muestra la fuerza correspondiente $F_x = -dU/dx$.



7.23 (a) Deslizador en un riel de aire. El resorte ejerce una fuerza $F_x = -kx$. (b) Función de energía potencial. Los límites del movimiento son los puntos donde la curva de U interseca la línea horizontal que representa la energía mecánica total E.



7.24 (a) Función de energía potencial $U(x)$ hipotética. (b) La fuerza correspondiente $F_x = -dU/dx$. Los máximos y mínimos de $U(x)$ corresponden a los puntos en los que $F_x = 0$.

Donde x_1 y x_3 son puntos de equilibrio estable. En ellos, $F_x = 0$ porque la pendiente de la curva $U(x)$ es cero. Si la partícula se desplaza hacia cualquier lado, la fuerza la empuja hacia el punto de equilibrio. La pendiente de la curva $U(x)$ también es cero en x_2 y x_4, que también son puntos de equilibrio. Sin embargo, si la partícula se desplaza un poco a la derecha de cualquiera de ellos, la pendiente de la curva de $U(x)$ se hace negativa, lo que corresponde a una F_x positiva que tiende a alejar más la partícula. Si ésta se desplaza un poco a la izquierda, F_x es negativa y también tiende a alejar a la partícula del equilibrio. Esto es análogo a una canica sobre una bola de bolos. Los puntos x_2 y x_4 son puntos de **equilibrio inestable;** *todo máximo de una curva de energía potencial es una posición de equilibrio inestable.*

CUIDADO La dirección de la fuerza sobre un cuerpo *no* está determinada por el signo de la energía potencial U; lo que importa es el signo de $F_x = -dU/dx$ Como vimos en la sección 7.1, la cantidad físicamente significativa es la *diferencia* en el valor de U entre dos puntos, y esto es lo que mide la derivada $F_x = -dU/dx$ Esto implica que podemos agregar cualquier constante a la función de energía potencial sin alterar la física de la situación.

Si la energía total es E_1 y la partícula está inicialmente cerca de x_1, sólo puede moverse en la región entre x_a y x_b determinada por la intersección de las curvas de E_1 y U (Fig. 7.24a). U no puede ser mayor que E_1 porque K no puede ser negativa. Decimos que la partícula se mueve en un *pozo de potencial*, y x_a y x_b son los *puntos de retorno* de su movimiento (pues en ellos la partícula se detiene e invierte su dirección). Si aumentamos la energía total al nivel E_2, la partícula puede ampliar su movimiento, de x_c a x_d. Si la energía total es mayor que E_3, la partícula puede "escapar" y alcanzar valores indefinidamente grandes de x. En el otro extremo, E_0 representa la energía total mínima posible que el sistema puede tener.

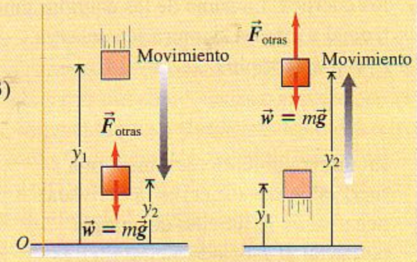
Evalúe su comprensión

La función de energía potencial de una partícula que se mueve en el eje $+x$ es $U(x) = (0.600\ \text{N})x + (2.40\ \text{N} \cdot \text{m}^2)/x$. ¿Dónde está el punto de equilibrio? (Considere sólo valores positivos de x.) Calcule la energía potencial en ese punto. Calcule la fuerza en ese punto.

RESUMEN

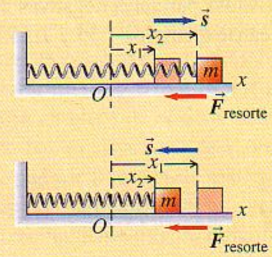
El trabajo efectuado sobre una partícula por una fuerza gravitacional constante puede representarse en términos de un cambio en la energía potencial $U = mgy$. Esta energía es una propiedad compartida de la partícula y la Tierra.

$$W_{\text{grav}} = mgy_1 - mgy_2$$
$$= U_1 - U_2 = -\Delta U \qquad (7.1), (7.3)$$



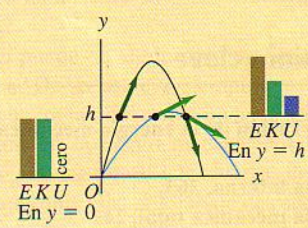
Un resorte ideal estirado o comprimido ejerce una fuerza elástica $F_x = -kx$ sobre una partícula, donde x es la distancia de estiramiento o compresión. El trabajo efectuado por esta fuerza puede representarse como un cambio en la energía potencial elástica del resorte, $U = \frac{1}{2}kx^2$.

$$W_{\text{el}} = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2$$
$$= U_1 - U_2 = -\Delta U \qquad (7.10)$$



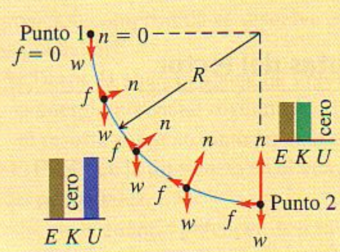
La energía potencial total es la suma de las energías potenciales gravitacional y elástica. Si sólo fuerzas gravitacional y elástica realizan trabajo sobre una partícula, la suma de las energías cinética y potencial se conserva. Esta suma, $E = K + U$, se denomina energía mecánica total. (Véanse ejemplos 7.1, 7.3, 7.4, 7.5, 7.8 y 7.10.)

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \qquad (7.11)$$

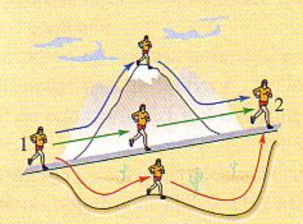


Si otras fuerzas además de la gravitacional y de las fuerzas elásticas realizan trabajo sobre una partícula, el trabajo W_{otras} efectuado por esas otras fuerzas es igual al cambio en la energía mecánica total (energía cinética más energía potencial total). (Véanse ejemplos 7.2, 7.6, 7.7, 7.9 y 7.11.)

$$K_1 + U_1 + W_{\text{otras}} = K_2 + U_2 \qquad (7.13)$$



Todas las fuerzas son conservativas o bien no conservativas. Una fuerza conservativa es aquella para la cual la relación trabajo-energía cinética es totalmente reversible. El trabajo de una fuerza conservativa siempre puede representarse mediante una función de energía potencial, no así el de una fuerza no conservativa.



El trabajo realizado por fuerzas no conservativas se manifiesta como cambios en la energía interna de los cuerpos. La suma de las energías cinética, potencial e interna siempre se conserva. (Véanse ejemplos 7.12 a 7.14.)

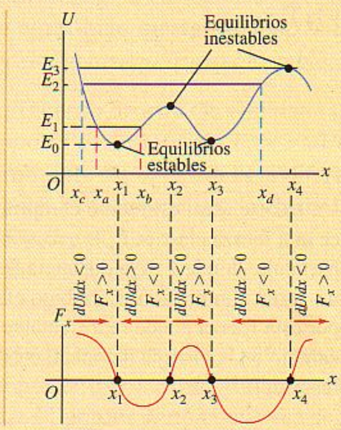
$$\Delta K + \Delta U + \Delta U_{\text{int}} = 0 \qquad (7.16)$$

En un movimiento rectilíneo, una fuerza conserva $F_x(x)$ es la derivada negativa de la función de energía potencial U asociada a ella. En tres dimensiones, las componentes de una fuerza conservativa son las derivadas parciales negativas de U. (Véanse ejemplos 7.15 y 7.16.)

$$F_x(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \qquad (7.17)$$

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial y} \qquad (7.18)$$

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}\right) \qquad (7.19)$$



Términos clave

conservación de la energía mecánica, 244
energía interna, 263
energía mecánica total, 244
energía potencial, 242
energía potencial elástica, 254
energía potencial gravitacional, 243
equilibrio estable, 269
equilibrio inestable, 270
fuerza conservativa, 260
fuerza disipadora, 262
fuerza no conservativa, 262
gradiente, 267
ley de conservación de la energía, 264

Notas del lector

Respuesta a la pregunta inicial del capítulo ?

El agua está efectuando trabajo negativo sobre el clavadista; ejerce una fuerza hacia arriba debido a la resistencia de fluido mientras el clavadista se mueve hacia abajo. La gravedad está efectuando trabajo positivo, pues esta fuerza tiene la misma dirección que el desplazamiento del clavadista.

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

Sección 7.1 La energía cinética inicial $K_1 = 0$, la energía potencial inicial $U_1 = mgy_1$ y la energía potencial final $U_2 = mgy_2$ son las mismas en ambas rampas. La energía mecánica se conserva en ambos casos, así que la energía cinética final $K = \frac{1}{2}mv_2^2$ también es la misma en ambas rampas. Por tanto, la rapidez en el extremo derecho es la *misma* en ambos casos.

Sección 7.2 Cuando el elevador por fin se detiene, la fuerza neta que actúa sobre él es cero. Su peso es (2000 kg)(9.8 m/s^2) = 19,600 N, y la fricción proporciona una fuerza hacia arriba de 17,000 N. Por tanto, el resorte deberá proporcionar otros 2600 N de fuerza hacia arriba. Utilizando la relación (fuerza) = (constante de fuerza)(compresión) para un resorte, vemos que el resorte se comprime (2600 N)/(1.41 $\times$ 10^5 N/m) = 0.018 m, o sea, 1.8 cm. Entonces, $y = -0.018$ m. En este punto, $K = 0$, $U_{grav} = mgy$ = (2000 kg)(9.8 m/s^2)(−0.018 m) = −360J. $U_{el} = \frac{1}{2}ky^2 = \frac{1}{2}$ (1.41 $\times$ 10^5 N/m) (−0.018 m)^2 = 23 J, y $E = K + U_{grav} + U_{el}$ = −337 J. La energía mecánica inicial de 625,000 J se perdió totalmente por la fricción, además de otros 337 J.

Sección 7.3 El trabajo total que *usted* efectuaría es 274 J + 196 J = 470 J. La fuerza de *fricción* efectuaría −470 J de trabajo, así que el trabajo total efectuado por *todas* las fuerzas es, de hecho, cero: 470 J − 470 J = 0. La moraleja es que es importante incluir *todo* el trabajo efectuado por fuerzas distintas de la gravedad o fuerzas de resorte.

Sección 7.4 Si $F_x = 0$ en un punto, la derivada de $U(x)$ en ese punto es cero. Sin embargo, esto no nos dice absolutamente nada acerca del *valor* de $U(x)$ en ese punto.

Sección 7.5 Hay equilibrio donde $F_x = 0$. La fuerza es

$$F_x = -dU/dx = -0.600\text{ N} + (2.40\text{ N}\cdot\text{m}^2)/x^2$$

Si despejamos x donde $F_x = 0$ (la posición de equilibrio), obtenemos x^2 = (2.40 N · m^2)/(0.600 N) = 4.00 m^2, o sea x = 2.00 m. En este punto U = (0.600 N) (2.00 m) + (2.40 N · m^2)/(2.00 m) = 2.40 N · m = 2.40 J; la fuerza es cero.

Preguntas para análisis

P7.1 Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba con rapidez inicial v_1, como en el ejemplo 7.1 (sección 7.1). Si *no* se desprecia de la resistencia del aire, cuando la bola vuelva a su altura inicial su rapidez será menor que v_1. Explique esto usando conceptos de energía.

P7.2 En la figura 7.6, el proyectil tiene la misma energía cinética inicial en todos los casos. ¿Por qué no alcanza la misma altura máxima en todos los casos?

P7.3 En el ejemplo 7.5 (sección 7.1), ¿la rapidez de Tito en la base depende de la forma de la rampa o sólo de la diferencia de altura entre los puntos 1 y 2? Explique. ¿Y si la rampa tiene fricción, como en el ejemplo 7.6 (sección 7.1)?

P7.4 Se deja caer un huevo a partir del reposo desde la azotea al suelo. Un estudiante en la azotea, que usa coordenadas con origen en la azotea, y otro en el suelo, que usa coordenadas con origen en el suelo, observa la caída. ¿Asignan ambos valores iguales o diferentes a las energías potenciales gravitacionales inicial y final, al cambio de energía potencial gravitacional y a la energía cinética del huevo justo antes de golpear el suelo? Explique.

P7.5 Un profesor de física tenía una bola de boliche colgada de una cuerda muy larga sujeta al techo de un aula muy grande. A fin de ilustrar su fe en la conservación de la energía, gustaba de retroceder a un costado del estrado, tirando de la bola hasta que la tensa cuerda la dejaba llegar justo a la punta de su nariz, y luego la soltaba. La pesada bola describía un gran arco sobre el estrado y regresaba, parándose momentáneamente justo frente a la nariz del inmóvil e impávido profesor. Un día, después de la demostración, alzó la vista justo a tiempo para ver que un estudiante en el otro lado del estrado *empujaba* la bola después de tirar de ella hasta tenerla frente a su nariz, tratando de duplicar la demostración. Termine de contar la historia y explique el posiblemente trágico desenlace.

P7.6 Cuando un transbordador espacial que regresa toca tierra, ha perdido casi toda la energía cinética que tenía en órbita. La energía potencial gravitacional también ha disminuido considerablemente. ¿A donde fue toda esa energía?

P7.7 ¿Una fuerza de fricción puede en algún caso *aumentar* la energía mecánica de un sistema? De ser así, cite ejemplos.

P7.8 Una clavadista rebota en un trampolín, yendo un poco más alto cada vez. Explique cómo aumenta la energía mecánica total.

P7.9 Una caja baja resbalando por una rampa y las fuerzas de gravedad y fricción efectúan trabajo sobre ella. ¿El trabajo de cada una de estas fuerzas puede expresarse en términos del cambio en una función de energía potencial? Para cada fuerza, explique por qué sí o por qué no.

P7.10 Un resorte atado en su posición comprimida se disuelve en ácido. ¿Qué pasa con su energía potencial?

P7.11 Si un objeto se aleja de la Tierra, la energía potencial gravitacional aumenta; si se acerca, la energía potencial disminuye. En cambio, la energía potencial de un resorte aumenta tanto cuando se estira como cuando se comprime. Explique la diferencia en el comportamiento de estas dos energías potenciales.

P7.12 Dado que sólo los cambios en la energía potencial son importantes en cualquier problema, un estudiante decide tomar la energía potencial elástica de un resorte como cero cuando el resorte está estirado una distancia x_1 respecto al equilibrio, de modo que $U = \frac{1}{2}k(x - x_1)^2$. ¿Es correcto esto? Explique.

P7.13 La figura 7.22a muestra la función de energía potencial para la fuerza $F_x = -kx$. Dibuje esa función para la fuerza $F_x = +kx$. Para esta fuerza, ¿es $x = 0$ un punto de equilibrio? ¿Es el equilibrio estable o inestable? Explique.

P7.14 La figura 7.22b muestra la función de energía potencial asociada a la fuerza gravitacional entre un objeto y la Tierra. Use esta curva para explicar por qué los objetos siempre caen hacia la Tierra al soltarse.

P7.15 En un sistema de dos partículas, solemos considerar que la energía potencial para la fuerza entre las partículas se acerca a cero cuando la separación entre ellas se acerca a infinito. En tal caso, explique por qué la energía potencial con una separación no infinita es positiva si las partículas se repelen y negativa si se atraen.

P7.16 Explique por qué los puntos $x = A$ y $x = -A$ de la figura 7.23b se llaman *puntos de retorno*. ¿Qué relación hay entre los valores de E y U en un punto de retorno?

P7.17 Una partícula está en *equilibrio neutral* si la fuerza neta que actúa sobre ella es cero y sigue siendo cero si la partícula se desplaza un poco en cualquier dirección. Dibuje la función de energía potencial cerca de un punto de equilibrio neutral para el caso de movimiento unidimensional. Dé un ejemplo de un objeto en equilibrio neutral.

P7.18 La fuerza neta sobre una partícula de masa m tiene la función de energía potencial graficada en la figura 7.24a. Si la energía total es E_1, dibuje la curva de la rapidez v de la partícula contra su posición x. ¿En qué valor de x es v máxima? Dibuje la curva si la energía total es E_2.

P7.19 Una pelota se mueve del punto 1 al punto 2. La energía potencial gravitacional en el punto 2 es *mayor* que en el punto 1. Durante el movimiento, ¿la gravedad efectúa trabajo positivo o negativo?

P7.20 La función de energía potencial de una fuerza $\vec{F}$ es $U = \alpha x^3$, donde α es una constante positiva. ¿Qué dirección tiene $\vec{F}$?

Ejercicios

Energía potencial gravitacional

7.1 ¿Qué energía potencial tiene un elevador de 800 kg en la parte superior de la Torre Sears de Chicago, 440 m sobre el nivel de la calle? Suponga que la energía potencial en la calle es cero.

7.2 Un saco de 5.00 kg de harina se levanta 15.0 m verticalmente con rapidez constante de 3.50 m/s. a) ¿Qué fuerza se requiere? b) ¿Cuánto trabajo realiza esa fuerza sobre el saco? ¿Qué pasa con dicho trabajo?

7.3 Repita la parte (a) del ejemplo 6.5 (sección 6.2) usando la ecuación (7.7).

7.4 Un saco de correo de 120 kg cuelga de una cuerda vertical de 6.0 m de longitud. a) ¿Qué fuerza horizontal se necesita para mantener el saco desplazado 3.0 m lateralmente respecto a su posición inicial? b) ¿Cuánto trabajo se efectúa para llevar el saco a esa posición?

7.5 Se lanza una pelota desde la azotea de un edificio de 22.0 m con velocidad inicial de magnitud 12.0 m/s y con un ángulo de 53.1° sobre la horizontal. a) ¿Qué rapidez tiene la pelota justo antes de tocar el suelo? Use métodos de energía y desprecie la resistencia del aire. b) Repita pero con la velocidad inicial a 53.1° *abajo* de la horizontal. c) Si se incluye el efecto de la resistencia del aire, ¿en qué parte, (a) o (b), se obtiene una rapidez mayor?

7.6 a) En el ejemplo 7.7 (sección 7.1), calcule la rapidez mínima inicial que debe imprimirse a la caja para que llegue al tope de la rampa. b) Si la rapidez inicial es 11.0 m/s, ¿qué rapidez tiene la caja en el tope de la rampa?

7.7 Resuelva la parte (b) del ejemplo 7.7 (sección 7.1) aplicando la ecuación (7.7) a los puntos 2 y 3, en lugar de a los puntos 1 y 3 como se hizo en el ejemplo.

7.8 Una caja vacía baja deslizándose por una rampa con rapidez inicial v_0, llegando al fondo con rapidez v y energía cinética K. Se colocan unos libros en la caja, de modo que la masa total se cuadruplica. El coeficiente de fricción cinética es constante y la resistencia del aire insignificante. Con la misma v_0 en el tope de la rampa ¿qué rapidez y energía cinética tendría ahora la caja al llegar abajo? Explique su razonamiento.

7.9 Un guijarro de 0.20 kg se libera del reposo en el punto A, en el borde de un tazón hemisférico de radio $R = 0.50$ m (Fig. 7.25). Suponga que la piedra es pequeña en comparación con R, así que puede tratarse como partícula suponga que la piedra se desliza en lugar de rodar. El trabajo efectuado por la fricción sobre el guijarro al bajar de A al punto B en el fondo del tazón es -0.22 J. ¿Qué rapidez tiene la piedra al llegar a B?

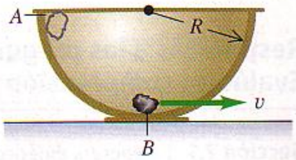


Figura 7.25 Ejercicio 7.9.

7.10 Pulga saltarina. Una película de alta velocidad (3500 cuadros/segundo) del salto de una pulga de 210 μg produjo los datos que permitieron trazar la gráfica de la figura 7.26. (Véase "The Flying Leap of the Flea", por M. Rothschild, Y. Schlein, K. Parker C. Neville y S. Sternberg en el *Scientific American* de nov. de 1973.) La pulga tenía unos 2 mm de longitud y saltó con un ángulo de despegue casi vertical. a) Determina la altura máxima que la pulga alcanzó sobre el suelo. (¿Puede hacerse caso omiso de la distancia recorrida por la pulga antes de que su rapidez se vuelva constante? Explique.) b) ¿Cuánto trabajo efectuó la pulga al proyectarse hacia arriba?

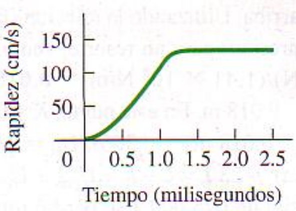


Figura 7.26 Ejercicio 7.10.

7.11 Imagine que está probando una nueva montaña rusa con un carrito vacío de 120 kg. Una parte de la vía es un rizo vertical con radio de 12.0 m. En el nadir del rizo (punto A), el carrito tiene rapidez de 25.0 m/s, y en el cenit (punto B), de 8.0 m/s. ¿Cuánto trabajo efectúa la fricción cuando el carrito rueda del punto A al B?

7.12 Tarzán y Jane. Tarzán, en un árbol, ve a Jane en otro. Él toma el extremo de una liana de 20 m que forma un ángulo de 45° con la vertical, se deja caer de su rama y describe un arco hacia abajo para llegar a los brazos de Jane. En este punto, su liana forma un ángulo de 30° con la vertical. Calcule la rapidez de Tarzán justo antes de llegar a donde está Jane para determinar si la abrazará tiernamente o la tirará de la rama. Puede hacer caso omiso de la resistencia del aire y la masa de la liana.

7.13 Un horno de microondas de 10.0 kg se empuja para subirlo 8.0 m por la superficie de una rampa inclinada 36.9° sobre la horizontal, aplicando una fuerza constante $\vec{F}$ de magnitud 110 N, que actúa paralela a la rampa. El coeficiente de fricción cinética entre el horno y la rampa es de 0.250. a) ¿Qué trabajo realiza $\vec{F}$? b) ¿Y la fuerza de fricción? c) Calcule el aumento en la energía potencial del horno. d) Use sus respuestas de las partes (a), (b) y (c) para calcular el aumento en la energía cinética del horno. e) Use $\sum\vec{F} = m\vec{a}$ para calcular la aceleración del horno. Suponiendo que el horno parte del reposo, use la aceleración para calcular la rapidez del horno después de recorrer 8.0 m. Calcule con esto el aumento en la energía cinética del horno y compare su respuesta con la de la parte (d).

7.14 Péndulo Una piedrita de 0.12 kg está atada a un hilo sin masa de 0.80 m de longitud, formando un péndulo que oscila con un ángulo máximo de 45° con la vertical. La resistencia del aire es despreciable. a) ¿Qué rapidez tiene la piedra cuando el hilo pasa por la posición vertical? b) ¿Qué tensión hay en el hilo cuando forma un ángulo de 45° con la vertical? c) ¿Y cuando pasa por la vertical?

Sección 7.2 Energía potencial elástica

7.15 Una fuerza de 800 N estira cierto resorte una distancia de 0.200 m. a) ¿Qué energía potencial tiene entonces el resorte? b) ¿Y cuando se le comprime 5.00 cm?

7.16 Una fuerza de 720 N estira cierto resorte 0.150 m. ¿Qué energía potencial tiene el resorte cuando una masa de 60.0 kg cuelga verticalmente de él?

7.17 Un resorte de masa despreciable tiene constante de fuerza k = 1600 N/m. a) ¿Qué tanto debe comprimirse para almacenar en él 3.20 J de energía potencial? b) El resorte se coloca verticalmente con un extremo en el piso y se deja caer sobre él un libro de 1.20 kg desde una altura de 0.80 m. Determine la distancia máxima que se comprimirá el resorte.

7.18 Una resortera dispara un guijarro de 10 g una distancia de 22.0 m hacia arriba. a) ¿Cuánta energía potencial se almacenó en la liga de la resortera? b) Con la misma energía potencial almacenada en la liga, ¿a qué altura puede dispararse un guijarro de 25 g? c) ¿De qué efectos físicos hizo caso omiso al resolver este problema?

7.19 Un queso de 1.20 kg se coloca en un resorte vertical con masa despreciable y constante de fuerza k = 1800 N/m que está comprimido 15.0 cm. Cuando se suelta el resorte, ¿qué altura alcanza el queso sobre su posición original? (El queso y el resorte *no* están unidos.)

7.20 Considere el deslizador del ejemplo 7.8 (sección 7.2) y la figura 7.16. Igual que en el ejemplo, el deslizador se suelta del reposo con el resorte estirado 0.100 m. ¿Qué desplazamiento x tiene el deslizador respecto a su posición de equilibrio cuando su rapidez es de 0.20 m/s? (Deberá obtener más de una respuesta. Explique por qué.)

7.21 Considere el deslizador del ejemplo 7.8 (sección 7.2) y la figura 7.16. a) Igual que en el ejemplo, el deslizador se suelta del reposo con el resorte estirado 0.100 m. ¿Qué rapidez tiene el deslizador cuando regresa a $x = 0$? b) ¿Qué desplazamiento inicial debe tener el deslizador para que su rapidez máxima en el movimiento subsecuente sea de 2.50 m/s?

7.22 Considere el deslizador del ejemplo 7.8 (sección 7.2) y la figura 7.16. Igual que en el ejemplo, el deslizador se suelta del reposo con el resorte estirado 0.100 m, pero ahora el riel se desactiva, de modo que una fuerza de fricción cinética actúa sobre el deslizador. a) Si el coeficiente de fricción cinética entre el riel y el deslizador es $\mu_k = 0.050$, ¿qué rapidez tiene el deslizador después de recorrer 0.020 m (x = 0.080 m)? b) Si $\mu_k = 0.050$, ¿qué rapidez tiene el deslizador cuando ha recorrido 0.100 m ($x = 0$)? c) ¿Qué valor deberá tener μ_k para que el deslizador llegue a la posición $x = 0$ con rapidez cero?

7.23 a) ¿Qué rapidez tiene el elevador del ejemplo 7.11 (sección 7.2) después de haber bajado 1.00 m desde el punto 1 de la figura 7.17? b) ¿Qué aceleración tiene el elevador cuando está 1.00 m abajo del punto 1 de la figura 7.17?

7.24 Imagine que le piden diseñar un resorte que confiera a un satélite de 1160 kg una rapidez de 2.50 m/s relativa a un transbordador espacial en órbita. El resorte debe imprimir al satélite una aceleración máxima de 5.00g. La masa del resorte, la energía cinética de retroceso del transbordador y los cambios en la energía potencial gravitacional serán despreciables. a) ¿Qué constante de fuerza debe tener el resorte? b) ¿Qué distancia debe comprimirse el resorte?

Sección 7.3 Fuerzas conservativas y no conservativas

7.25 Un libro de 0.75 kg sube verticalmente una distancia de 16 m y luego baja verticalmente 16 m, volviendo a su posición inicial. a) ¿Cuánto trabajo realizó la gravedad durante el movimiento ascendente? b) ¿Y durante el movimiento descendente? c) ¿Y durante todo el movimiento? d) Con base en su respuesta a la parte (c), ¿diría Ud. que la fuerza gravitacional es conservativa o no conservativa? Explique.

7.26 Una roca de 0.050 kg se mueve del origen al punto (3.0 m, 5.0 m) en un sistema de coordenadas en el que la dirección $+y$ es hacia arriba. a) La roca se mueve primero horizontalmente desde el origen hasta el punto (3.0 m, 0) y luego se mueve verticalmente a (3.0 m, 5.0 m). Dibuje la trayectoria de la roca en el plano xy. ¿Cuánto trabajo realiza la gravedad sobre la roca durante el desplazamiento? b) Ahora suponga que la roca primero se movió verticalmente del origen hasta (0, 5.0 m), y luego horizontalmente a (3.0 m, 5.0 m). Dibuje la trayectoria de la roca en el plano xy. ¿Cuánto trabajo realiza la gravedad sobre la roca durante el desplazamiento? c) Compare las respuestas a las partes (a) y (b). Con base en sus resultados, ¿diría que la fuerza gravitacional es conservativa o no conservativa? Explique.

7.27 En un experimento, una de las fuerzas ejercidas sobre un protón es $\vec{F} = -\alpha x^2\hat{\imath}$, donde $\alpha = 12\ \text{N/m}^2$. a) ¿Cuánto trabajo efectúa $\vec{F}$ cuando el protón se desplaza sobre la recta del punto (0.10 m, 0) al punto (0.10 m, 0.40 m)? b) ¿Y sobre la recta de (0.10 m, 0) a (0.30 m, 0)? c) ¿Y sobre la recta de (0.30 m, 0) a (0.10 m 0)? d) Es $\vec{F}$ una fuerza conservativa? Explique. Si $\vec{F}$ es conservativa, ¿cuál es su función de energía potencial? Sea $U = 0$ cuando $x = 0$.

7.28 Considere el electrón y la fuerza $\vec{F}$ del ejemplo 7.13 (sección 7.3). a) El electrón viaja del punto (0, 0) a (L, L) por la recta de (0, 0) a (0, L) y luego por la recta de (0, L) a (L, L). ¿Qué trabajo efectúa $\vec{F}$ durante este desplazamiento? b) El electrón viaja de (0, 0) a (L, L) por la recta de (0, 0) a (L, 0) y luego por la recta de (L, 0) a (L, L). ¿Qué trabajo realiza $\vec{F}$ durante este desplazamiento? c) El electrón viaja de (0, 0) a (L, L) siguiendo la línea recta entre esos dos puntos. ¿Qué trabajo realiza $\vec{F}$ durante este desplazamiento? d) Compare las respuestas a las partes (a), (b) y (c) y explique los resultados de la comparación.

7.29 Un libro de 0.60 kg se desliza sobre una mesa horizontal. La fuerza de fricción cinética que actúa sobre el libro tiene una magnitud de 1.2 N. a) ¿Cuánto trabajo realiza la fricción sobre el libro durante un desplazamiento de 3.0 m a la izquierda? b) Ahora el libro se desliza 3.0 m a la derecha, volviendo al punto inicial. Durante este segundo desplazamiento, ¿qué trabajo efectúa la fricción sobre el libro? c) ¿Qué trabajo total efectúa la fricción sobre el libro durante el viaje redondo? d) Con base en su respuesta a la parte (c), ¿diría que la fuerza de fricción es conservativa o no conservativa? Explique.

7.30 Una caja de 30.0 kg en una bodega es empujada hacia una plataforma de carga por un obrero que aplica una fuerza horizontal. Entre la caja y el piso, el coeficiente de fricción cinética es de 0.20. La plataforma está 15.0 m al suroeste de la posición inicial de la caja. a) Si la caja se empuja 10.6 m al sur y luego 10.6 m al oeste, ¿qué trabajo total efectúa sobre ella la fricción? b) ¿Y si la caja se empuja en línea recta hasta la plataforma, de modo que recorre 15.0 m al suroeste? c) Dibuje las trayectorias de la caja en las partes (a) y (b). Con base en sus respuestas a ambas partes, ¿diría Ud. que la fuerza de fricción es conservativa o no conservativa? Explique.

7.31 Usted y tres amigos están parados en las esquinas de un cuadrado de 8.0 m de lado en el piso de un gimnasio (Fig. 7.27). Toman su libro de física y lo empujan de una persona a otra. La masa del libro es de 1.5 kg y el coeficiente de fricción cinética entre el libro y el piso es $\mu_k = 0.25$. a) El libro se desliza de usted a Beti y luego de Beti a Carlos a lo largo de las líneas que conectan a estas personas. ¿Qué trabajo realiza la fricción durante este desplazamiento? b) Ud. desliza el libro hacia Carlos a lo largo de la diagonal del cuadrado. ¿Qué trabajo realiza la fricción durante este desplazamiento? c) Ud. desliza el libro a Cati, quien se lo devuelve. ¿Qué trabajo total realiza la fricción durante este movimiento del libro? d) ¿Es conservativa o no la fuerza de fricción sobre el libro? Explique.

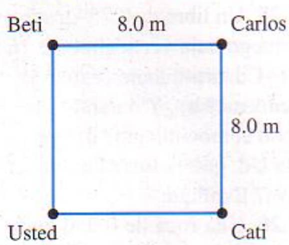


Figura 7.27 Ejercicio 7.31.

7.32 Un bloque con masa m está unido a un resorte ideal con constante de fuerza k. a) El bloque se mueve de x_1 a x_2 ($x_2 > x_1$) ¿Cuánto trabajo realiza la fuerza del resorte durante este desplazamiento? b)El bloque se mueve de x_1 a x_2 y luego de x_2 a x_1. ¿Cuánto trabajo realiza la fuerza del resorte durante el desplazamiento de x_2 a x_1? ¿Cuál es el trabajo realizado por el resorte durante todo el desplazamiento $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_1$? Explique su respuesta. c) El bloque se mueve de x_1 a x_3 ($x_3 > x_2$). ¿Cuánto trabajo realiza la fuerza del resorte durante este desplazamiento? Entonces, el bloque se mueve de x_3 a x_2. ¿ Cuál es el trabajo realizado por el resorte durante este desplazamiento? ¿Cuál es el trabajo total realizado por el resporte durante el desplazamiento de $x_1 \rightarrow x_3 \rightarrow x_2$? Compare su respuesta con la de la parte (a), donde los puntos inicial y final son los mismos pero la trayectoria es distinta.

Sección 7.4 Fuerza y energía potencial

7.33 La energía potencial de un par de átomos de hidrógeno separados una distancia grande x está dada por $U(x) = -C_6/x^6$, donde C_6 es una constante positiva. ¿Qué fuerza ejerce un átomo sobre otro? ¿Es la fuerza de atracción o repulsión?

7.34 Una fuerza paralela al eje x actúa sobre una partícula que se mueve sobre el eje x. La fuerza produce una energía potencial $U(x)$ dada por $U(x) = \alpha x^4$, donde $\alpha = 1.20 \text{ J/m}^4$. ¿Qué magnitud y dirección tiene la fuerza cuando la partícula está en $x = -0.800$ m?

7.35 Sobre un dispositivo experimental que se mueve en el plano xy actúa una fuerza conservativa descrita por la función de energía potencial $U(x, y) = k(x^2 + y^2) + k'xy$, donde k y k' son constantes positivas. Deduzca una expresión para la fuerza expresada en términos de los vectores unitarios $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$.

7.36 Sobre un objeto que se mueve en el plano xy actúa una fuerza conservativa descrita por la función de energía potencial $U(x, y) = \alpha(1/x^2 + 1/y^2)$, donde α es una constante positiva. Deduzca una expresión para la fuerza expresada en términos de los vectores unitarios $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$.

Sección 7.5 Diagramas de energía

7.37 La energía potencial de dos átomos en una molécula diatómica se aproxima con $U(r) = a/r^{12} - b/r^6$, donde r es la distancia entre los átomos y a y b son constantes positivas. a) Determine la fuerza $F(r)$ que actúa sobre un átomo, como función de r. Haga dos gráficas, una de $U(r)$ contra r y una de $F(r)$ contra r. b) Encuentre la distancia de equilibrio entre los átomos. ¿Es estable el equilibrio? c) Suponga que los átomos están a la distancia de equilibrio obtenida en (b). ¿Qué energía mínima debe agregarse a la molécula para *disociarla*, o sea, para separar los dos átomos una distancia infinita? Ésta es la *energía de disociación* de la molécula. d) Para la molécula CO, la distancia de equilibrio entre los átomos de carbono y oxígeno es de 1.13×10^{-10} m y la energía de disociación es de 1.54×10^{-18} J por molécula. Calcule los valores de las constantes a y b.

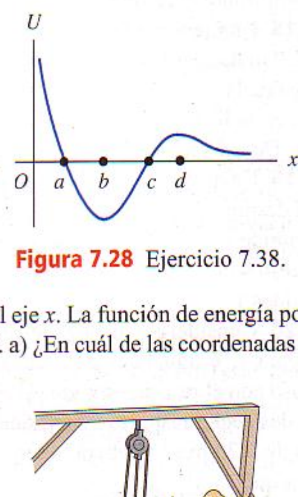


Figura 7.28 Ejercicio 7.38.

7.38 Una canica se mueve sobre el eje x. La función de energía potencial se muestra en la figura 7.28. a) ¿En cuál de las coordenadas x marcadas es cero la fuerza sobre la canica? b) ¿Cuál de esas coordenadas es una posición de equilibrio estable? c) ¿Y de equilibrio inestable?

Problemas

7.39 Un hombre de 70.0 kg está sentado en una plataforma suspendida de una polea móvil (Fig. 7.29) y se sube a sí mismo mediante una cuerda que pasa por una polea fija. La plataforma y las poleas tienen masa despreciable. Suponga que no hay pér-

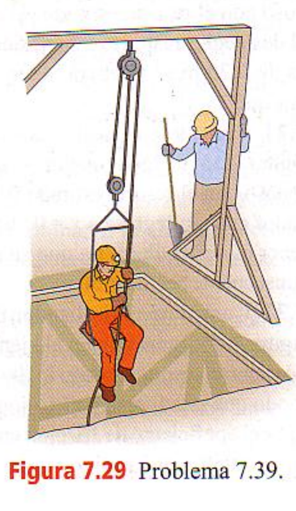


Figura 7.29 Problema 7.39.

didas por fricción. a) ¿Qué fuerza debe ejercer él? b) Calcule el aumento en la energía del sistema cuando él se sube 1.20 m. (Responda calculando el aumento en la energía potencial y también el producto de la fuerza aplicada a la cuerda y la longitud de cuerda que pasa por sus manos.)

7.40 Dos bloques con diferente masa están unidos uno a cada extremo de una cuerda ligera que pasa por una polea ligera sin fricción que está suspendida del techo. Los bloques se sueltan desde el reposo y el más pesado comienza a descender. Una vez que este bloque ha descendido 1.20 m, su rapidez es de 3.00 m/s. Si la masa total de los dos bloques es de 15.0 kg, ¿qué masa tiene cada bloque?

7.41 Física legal. En un accidente de tránsito, un auto golpeó a un peatón y luego el conductor pisó el freno para detener el auto. Durante el juicio subsecuente, el abogado del conductor alegó que éste había respetado el límite de velocidad de 35 mph que indicaban los letreros, pero que esa rapidez permitida era demasiado alta para que el conductor pudiera ver y reaccionar a tiempo ante el peatón. Imagine que el fiscal le llama como testigo experto. Su investigación del accidente produce las mediciones siguientes: las marcas de derrape producidas durante el tiempo en que los frenos estaban aplicados tenían una longitud de 280 ft, y el dibujo de los neumáticos produce un coeficiente de fricción cinética de 0.30 con el pavimiento. a) En su testimonio en el juzgado, ¿dirá que el conductor conducía respetando el límite de velocidad? Deberá poder respaldar su conclusión con un razonamiento claro, porque es seguro que uno de los abogados lo someterá a un interrogatorio. b) Si la multa por exceso de velocidad fuera de $10 por cada mph más allá del límite de velocidad, ¿tendría que pagar multa y, en tal caso, a cuánto ascendería?

7.42 Un bloque de 2.00 kg se empuja contra un resorte con masa despreciable y constante de fuerza $k = 400$ N/m, comprimiéndolo 0.220 m. Al soltarse el bloque, se mueve por una superficie sin fricción que primero es horizontal y luego sube a 37.0° (Fig. 7.30). a) ¿Qué rapidez tiene el bloque al deslizarse sobre la superficie horizontal después de separarse del resorte? b) ¿Qué altura alcanza el bloque antes de pararse y regresar?

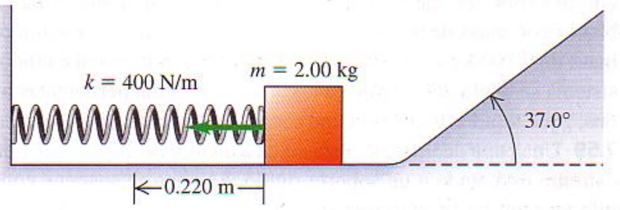


Figura 7.30 Problema 7.42.

7.43 Un bloque de 0.50 kg se empuja contra un resorte horizontal de masa despreciable, comprimiéndolo 0.20 m (Fig. 7.31). Al soltarse, el bloque se mueve 1.00 m sobre una mesa horizontal antes de detenerse. La constante del resorte es $k = 100$ N/m. Calcule el coeficiente de fricción cinética μ_k entre el bloque y la mesa.

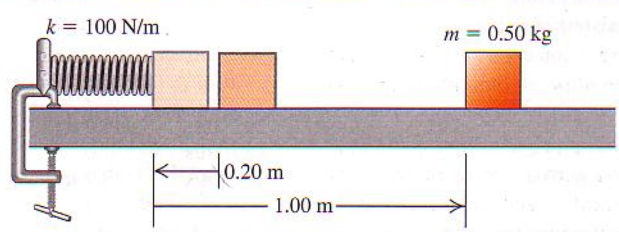


Figura 7.31 Problema 7.43.

7.44 En una superficie horizontal, una caja de 50.0 kg se coloca contra un resorte que almacena 360 J de energía. El resorte se suelta y la caja se desliza 5.60 m antes de detenerse. ¿Qué rapidez tiene la caja cuando está a 2.00 m de su posición inicial?

7.45 Rebote de pelota. Una pelota de caucho de 650 g se deja caer desde una altura de 2.50 m y en cada rebote alcanza el 75% de la altura que alcanzó en el rebote anterior. a) Calcule la energía mecánica inicial de la pelota, inmediatamente después de soltarse desde la altura original. b) ¿Cuánta energía mecánica pierde la pelota en su primer rebote? ¿Qué sucede con esa energía? c) ¿Cuánta energía mecánica se pierde durante el segundo rebote?

7.46 Rizo vertical. Un carrito de un juego de un parque de diversiones rueda sin fricción por la vía de la figura 7.32, partiendo del reposo en A a una altura h sobre la base del rizo. Trate el carrito como partícula. a) ¿Qué valor mínimo debe tener h (en términos de R) para que el carrito no caiga en el punto B? b) Si $h = 3.50R$ y $R = 20.0$ m, calcule la rapidez, aceleración radial y aceleración tangencial de los pasajeros cuando el carrito está en el punto C, en el extremo de un diámetro horizontal. Haga un diagrama a escala aproximada de las componentes de aceleración.

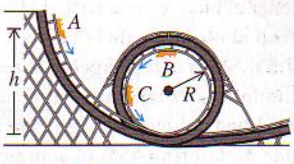


Figura 7.32 Problema 7.46.

7.47 Un trozo de madera de 2.0 kg resbala por la superficie que se muestra en la figura 7.33. Los lados curvos son perfectamente lisos, pero el fondo horizontal tiene una longitud de 30 m y es áspero, con coeficiente de fricción cinética de 0.20 con la madera. El trozo de madera parte del reposo 4.0 m arriba del fondo áspero. a) ¿Dónde se detendrá finalmente este objeto? b) Para el movimiento desde que se suelta la madera hasta que se detiene, ¿cuál es el trabajo total que realiza la fricción?

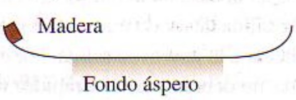


Figura 7.33 Problema 7.47.

7.48 Subir y bajar la loma. Una roca de 28 kg se acerca al pie de una loma con rapidez de 15 m/s. La ladera de la loma tiene un ángulo constante de 40.0° sobre la horizontal. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre la loma y la roca son 0.75 y 0.20, respectivamente. a) Use la conservación de la energía para obtener la altura máxima sobre el pie de la loma a la que subirá la roca. b) ¿La roca permanecerá en reposo en ese punto más alto o se deslizará cuesta abajo? c) Si la roca resbala hacia abajo, calcule su rapidez cuando vuelva al pie de la loma.

7.49 Una piedra de 15.0 kg baja deslizándose una colina nevada (Fig. 7.34), partiendo del punto A con una rapidez de 10.0 m/s. No hay fricción en la colina entre los puntos A y B, pero sí en el terreno plano en la base, entre B

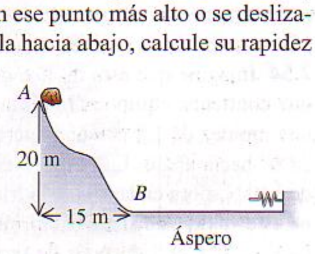


Figura 7.34 Problema 7.49.

y la pared. Después de entrar en la región áspera, la piedra recorre 100 m y choca con un resorte muy largo y ligero cuya constante de fuerza es de 2.00 N/m. Los coeficientes de fricción cinética y estática entre la piedra y el suelo horizontal son de 0.20 y 0.80, respectivamente. a) ¿Qué rapidez tiene la piedra al llegar al punto B? b) ¿Qué distancia comprimirá la piedra el resorte? c) ¿La piedra se moverá otra vez después de haber sido detenida por el resorte?

7.50 Un bloque de 2.8 kg que se desliza remonta la colina lisa, cubierta de hielo, de la figura 7.35. La cima de la colina es horizontal y está 70 m más arriba que su base. ¿Qué rapidez mínima debe tener el bloque en la base de la colina para no quedar atrapada en el foso al otro lado de la colina?

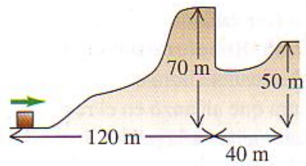


Figura 7.35 Problema 7.50.

7.51 Salto con bungee. Un bungee tiene 30.0 m de longitud y, estirado una distancia x, ejerce una fuerza restauradora de magnitud kx. Imagine que su suegro, cuya masa es de 95.0 kg, está parado en una plataforma 45.0 m sobre el suelo, con un extremo del bungee atado firmemente a su tobillo (y el otro extremo atado a la plataforma). Usted le ha prometido que, cuando se deje caer de la plataforma, caerá una distancia máxima de sólo 41.0 m antes de que el bungee lo detenga. Usted tenía varios bungees para escoger y los probó atándolos a un árbol y estirándolos tirando del otro extremo con una fuerza de 380.0 N. Durante esas pruebas, ¿qué distancia se estiró el bungee que debe escoger?

7.52 Rampa de salto en esquí. Imagine que está diseñando una rampa de salto en esquí para los siguientes Juegos Olímpicos Invernales. Necesita calcular la altura vertical h desde la puerta de salida hasta la base de la rampa. Los esquiadores se empujan con fuerza en la salida de modo que, por lo regular, tienen una rapidez de 2.0 m/s al llegar a la puerta de salida. Por cuestiones de seguridad, los esquiadores no deben tener una rapidez mayor que 30.0 m/s al llegar a la base de la rampa. Usted determina que, para un esquiador de 85.0 kg bien entrenado, la fricción y la resistencia del aire efectuarán en total −4000 J de trabajo sobre él durante su descenso. Determine la altura máxima h con la que no se excederá la máxima rapidez segura.

7.53 El Gran Sandini es un cirquero de 60 kg que es disparado por un cañón de resorte. No son comunes los hombres de su calibre, así que usted le ayudará a diseñar un nuevo cañón, el cual tendrá un resorte muy grande de masa muy pequeña y constante de fuerza de 1100 N/m. El resorte se comprimirá con una fuerza de 4400 N. El interior del cañón está recubierto con teflón, por lo que la fuerza de fricción media es de sólo 40 N durante los 4.0 m que el cirquero se mueve dentro de él. ¿Con qué rapidez sale el cirquero del cañón, 2.5 m arriba de su posición inicial en reposo?

7.54 Imagine que está diseñando una rampa de entrega para cajas que contienen equipo para gimnasio. Las cajas de 1470 N tendrán una rapidez de 1.8 m/s en la parte más alta de una rampa inclinada 22.0° hacia abajo. La rampa ejerce una fuerza de fricción cinética de 550 N sobre cada caja, y la fricción estática máxima también tiene este valor. Cada caja comprimirá un resorte en la base de la rampa y se detendrá después de recorrer una distancia total de 8.0 m sobre la rampa. Las cajas no deben rebotar en el resorte. Calcule la constante de fuerza que debe tener el resorte para satisfacer los criterios de diseño.

7.55 Un sistema que consta de dos cubetas de pintura conectadas por una cuerda ligera se suelta del reposo con la cubeta de pintura de 12.0 kg 2.00 m sobre el piso (Fig. 7.36). Use el principio de conservación de la energía para calcular la rapidez con que esta cubeta golpea el piso. Haga caso omiso de la fricción y la inercia de la polea.

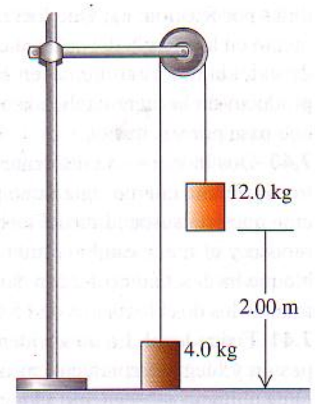


Figura 7.36 Problema 7.55.

7.56 a) Para el elevador del ejemplo 7.11 (sección 7.2), ¿cuánta energía potencial se almacena en el resorte cuando el elevador está en el punto 2 de la figura 7.17? b) ¿Qué distancia máxima sube el elevador desde el punto 2 antes de bajar otra vez? c) Al bajar otra vez el elevador, ¿qué rapidez tiene antes de tocar el resorte? d) Cuando el elevador comprime el resorte por segunda vez, qué energía máxima se almacena en el resorte y qué fuerza ejerce éste sobre el elevador?

7.57 Rediseñe el sistema de seguridad del elevador del ejemplo 7.11 (sección 7.2) de modo que el elevador no rebote sino que permanezca en reposo la primera vez que su rapidez llegue a cero. La masa del elevador es de 2000 kg y su rapidez al tocar inicialmente el resorte es de 25 m/s. Hay una fuerza de fricción cinética de 17,000 N y la fuerza máxima de fricción estática sobre el elevador también es de 17,000 N. Puede despreciarse la masa del resorte. a) ¿Qué k debe tener el resorte, y qué distancia se comprime éste cuando se para el elevador? ¿Cree que este diseño sea práctico? Explique. b) ¿Qué magnitud máxima tiene la aceleración del elevador?

7.58 Una tira de madera con masa despreciable y longitud de 80.0 cm gira sobre un eje horizontal que pasa por su centro. Una rata blanca con masa de 0.500 kg se aferra a un extremo y un ratón con masa de 0.200 kg se aferra al otro. La tira está horizontal cuando el sistema se libera del reposo. Si los animales logran permanecer asidos, ¿qué rapidez tiene cada uno cuando la tira pasa por la vertical?

7.59 Una papa de 0.100 kg está atada a un hilo de 2.50 m cuyo otro extremo está atado a un soporte rígido. La papa se sostiene con el hilo tensado horizontalmente y se suelta. a) ¿Qué rapidez tiene la papa en el punto más bajo de su movimiento? b) ¿Qué tensión hay en el hilo en ese punto?

7.60 Los siguientes datos son de una simulación en computadora de una pelota de béisbol de 0.145 kg al ser bateada, considerando la resistencia del aire:

t	x	y	v_x	v_y
0	0	0	30.0 m/s	40.0 m/s
3.05 s	70.2 m	53.6 m	18.6 m/s	0
6.59 s	124.4 m	0	11.9 m/s	−28.7 m/s

a) ¿Cuánto trabajo realizó el aire sobre la bola al viajar ésta de su posición inicial a su máxima altura? b) ¿Y al bajar de la altura máxima a la altura inicial? c) Explique por qué la magnitud del trabajo calculado en (b) es menor que la del calculado en (a).

7.61 Bajar el poste. Un bombero de masa m parte del reposo y baja una distancia d deslizándose por un poste. Al final, él se mueve con tanta rapidez como si se hubiera dejado caer desde una plataforma de altura $h \leqslant d$ con resistencia del aire despreciable. a) ¿Qué fuerza de fricción media ejerció el bombero sobre el poste? ¿Es lógica su respuesta en los casos especiales de $h = d$ y $h = 0$? Calcule la fuerza de fricción media que ejerce un bombero de 75.0 kg si d = 2.5 m y h = 1.0 m. c) En términos de g, h y d, ¿qué rapidez tiene el bombero cuando está una distancia y arriba de la base del poste?

7.62 Una esquiadora de 60.0 kg parte del reposo en la cima de una ladera de 65.0 m de altura. a) Si las fuerzas de fricción efectúan −10.5 kJ de trabajo sobre ella al descender, ¿qué rapidez tiene al pie de la ladera? b) Ahora la esquiadora se mueve horizontalmente y cruza un terreno de nieve revuelta, donde $\mu_k = 0.20$. Si el terreno tiene 82.0 m de anchura y la fuerza media de la resistencia del aire que actúa sobre la esquiadora es de 160 N, qué rapidez tiene ella después de cruzar esa parte? c) Ahora la esquiadora choca con un montón de nieve, penetrando 2.5 m antes de parar. ¿Qué fuerza media ejerce la nieve sobre ella al detenerla?

7.63 Una esquiadora parte del tope de una enorme bola de nieve sin fricción, con rapidez inicial muy pequeña, y baja esquiando por el costado (Fig. 7.37). ¿En qué punto pierde ella contacto con la bola de nieve y sigue una trayectoria tangencial? Es decir, en el instante en que ella pierde contacto con la nieve, ¿qué ángulo α forma con la vertical una línea radial que va del centro de la bola a la esquiadora?

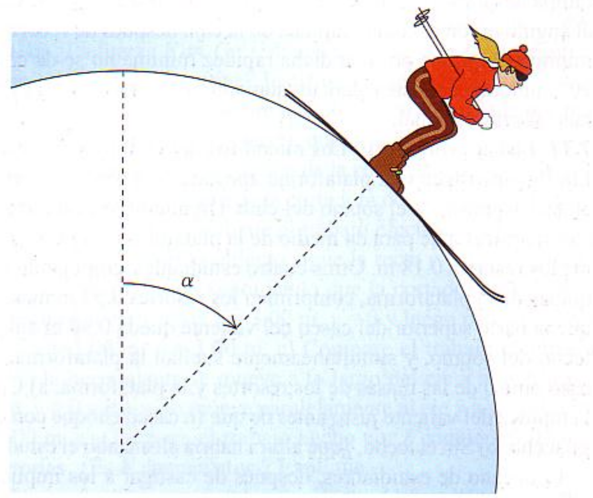


Figura 7.37 Problema 7.63.

7.64 Una roca está atada a un cordón cuyo otro extremo está fijo. Se imparte a la roca una velocidad tangencial inicial que la hace girar en un círculo vertical. Demuestre que la tensión en el cordón en el punto más bajo es mayor que la tensión en el punto más alto por un factor de 6 veces el peso de la roca.

7.65 En un puesto de carga de camiones de una oficina de correos, un paquete de 0.200 kg se suelta del reposo en el punto A de una vía que forma un cuarto de círculo con radio de 1.60 m (Fig. 7.38). El paquete es tan pequeño relativo a dicho radio que puede tratarse como partícula. El paquete se desliza por la vía y llega al punto B con

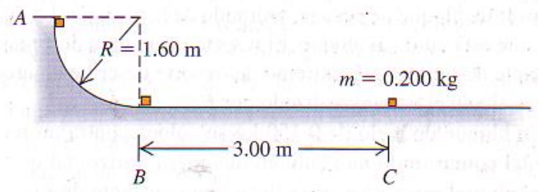


Figura 7.38 Problema 7.65.

rapidez de 4.80 m/s. A partir de ahí, el paquete se desliza 3.00 m sobre una superficie horizontal hasta el punto C, donde se detiene. a) ¿Qué coeficiente de fricción cinética tiene la superficie horizontal? b) ¿Cuánto trabajo realiza la fricción sobre el paquete al deslizarse éste por el arco circular entre A y B?

7.66 Los frenos de un camión de masa m fallan al bajar por una carretera helada con un ángulo de inclinación α constante hacia abajo. (Fig. 7.39). Inicialmente, el camión baja con rapidez v_0. Después de bajar una distancia L con fricción despreciable, el conductor guía el camión desbocado hacia una rampa de seguridad con ángulo β constante hacia arriba. La rampa tiene una superficie arenosa blanda en la que el coeficiente de fricción de rodamiento es μ_r. ¿Qué distancia sube el camión por la rampa antes de parar? Use métodos de energía.

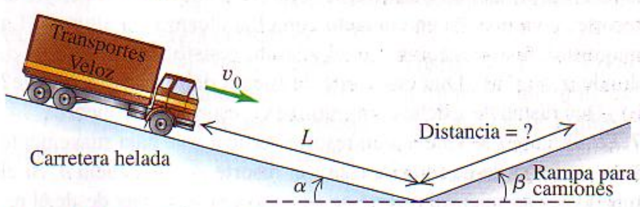


Figura 7.39 Problema 7.66.

7.67 Cierto resorte de masa despreciable *no* obedece la ley de Hooke; ejerce una fuerza de restauración $F_x(x) = -\alpha x - \beta x^2$ si se estira o comprime, donde α = 60.0 N/m y β = 18.0 N/m². a) Calcule la función de energía potencial $U(x)$ del resorte. Sea U = 0 cuando x = 0. b) Un objeto de 0.900 kg en una superficie horizontal sin fricción se une a este resorte, se tira de él hasta desplazarlo 1.00 m a la derecha (dirección +x) para estirar el resorte, y se suelta. ¿Qué rapidez tiene el objeto cuando está 0.50 m a la derecha de la posición de equilibrio x = 0?

7.68 Una fuerza variable $\vec{F}$ se mantiene tangente a una superficie semicircular sin fricción (Fig. 7.40). Se varía lentamente la fuerza

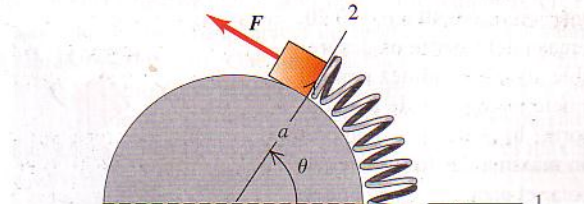


Figura 7.40 Problema 7.68.

para mover un bloque de peso w, estirando de la posición 1 a la 2 un resorte que está unido al bloque. El resorte tiene masa despreciable y constante de fuerza k. El extremo del resorte describe un arco de radio a. Calcule el trabajo realizado por $\vec{F}$.

7.69 Un bloque de hielo de 0.150 kg se coloca contra un resorte horizontal comprimido montado en una mesa horizontal que está 1.20 m sobre el piso. El resorte tiene una constante de fuerza de 1900 N/m y masa despreciable, y está comprimido inicialmente 0.045 m. El resorte se suelta y el bloque se desliza sobre la mesa, cae por el borde y se sigue deslizando por el piso. Si la fricción entre el hielo y la mesa es despreciable, ¿qué rapidez tiene el bloque al tocar el piso?

7.70 Un hombre de 80.0 kg salta desde una altura de 2.50 m a una plataforma montada en resortes. Al comprimirse los resortes, la plataforma baja una distancia máxima de 0.240 m respecto a su posición inicial y luego rebota. La plataforma y los resortes tienen masa despreciable. a) ¿Qué rapidez tiene el hombre cuando la plataforma ha bajado 0.120 m? b) Si el hombre se hubiera subido suavemente a la plataforma, ¿cuánto habría bajado ésta?

7.71 Un aparato experimental de masa m se coloca sobre un resorte vertical de masa despreciable y se empuja hasta comprimirlo una distancia x. El aparato se suelta y alcanza su altura máxima una distancia h sobre el punto en que se soltó. El aparato no está unido al resorte, y ya no está en contacto con él al alcanzar la altura h. La magnitud de aceleración que el aparato resiste sin dañarse es a, donde $a > g$. a) ¿Qué constante de fuerza debe tener el resorte? b) ¿Qué distancia x debe comprimirse el resorte inicialmente?

7.72 Si un pez se sujeta a un resorte vertical y se baja suavemente a su posición de equilibrio, estira el resorte una distancia d. Si el mismo pez se sujeta al resorte no estirado y se deja caer desde el reposo, ¿cuánto llega a estirar el resorte? (*Sugerencia:* Calcule la constante de fuerza del resorte en términos de d y la masa m del pez.)

7.73 Un bloque de madera de 2.00 kg se coloca contra un resorte comprimido en la base de una pendiente de 30.0° (punto A). Al soltarse el resorte, el bloque sube por la pendiente. En el punto B, 6.00 m pendiente arriba de A, el bloque tiene una velocidad de magnitud 7.00 m/s dirigida pendiente arriba y ya no está en contacto con el resorte. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la pendiente es $\mu_k = 0.50$. La masa del resorte es despreciable. Calcule la energía potencial almacenada inicialmente en el resorte.

7.74 Un paquete de 2.00 kg se suelta en una pendiente de 53.1°, a 4.00 m de un resorte largo de masa despreciable cuya constante de fuerza es de 120 N/m y que está sujeto a la base de la pendiente (Fig. 7.41). Los coeficientes de fricción entre el paquete y la pendiente son $\mu_s = 0.40$ y $\mu_k = 0.20$. La masa del resorte es despreciable. a) ¿Qué rapidez tiene el paquete justo antes de llegar al resorte? b) ¿Cuál es la compresión máxima del resorte? c) Al rebotar el paquete, ¿qué tanto se acerca a su posición inicial?

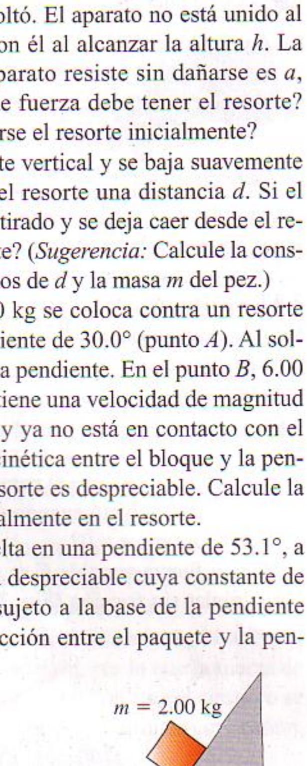


Figura 7.41 Problema 7.74.

7.75 Un bloque de 0.500 kg unido a un resorte de 0.60 m con constante de fuerza $k = 40.0$ N/m y masa despreciable está en reposo con su cara trasera en el punto A de una mesa horizontal sin fricción (Fig. 7.42). Se tira del bloque a la derecha con una fuerza horizontal constante $F = 20.0$ N. a) ¿Qué rapidez tiene el bloque cuando su cara trasera llega al punto B, que está 0.25 m a la derecha de A? b) En ese punto, se suelta el bloque. En el movimiento subsecuente, ¿qué tanto se acerca el bloque a la pared a la que está sujeto el extremo izquierdo del resorte?

7.76 Una caja de masa m se empuja contra un resorte de masa despreciable cuya constante de fuerza es k, comprimiéndolo una distancia x. La caja se suelta y sube por una rampa que tiene un ángulo α sobre la horizontal. El coeficiente de fricción cinética entre la caja y la rampa es μ_k, donde $\mu_x < 1$. La caja aún está subiendo por la rampa después de recorrer sobre ella una distancia $s > |x|$. Calcule el ángulo α con el cual la rapidez de la caja después de recorrer s es mínima. Explique por qué dicha rapidez mínima no se da con $\alpha = 90°$, aunque para este α hay un aumento máximo en la energía potencial gravitacional.

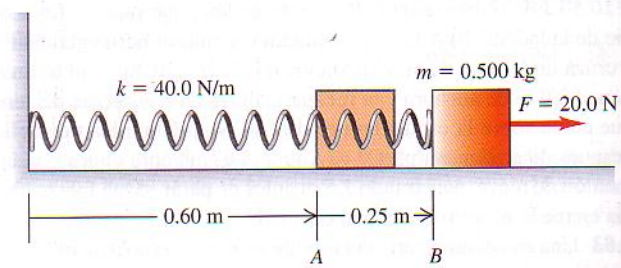


Figura 7.42 Problema 7.75.

7.77 Física estudiantil. Los miembros del club universitario Iota Eta Pi construyen una plataforma apoyada en 4 resortes verticales en las esquinas, en el sótano del club. Un miembro valiente con un casco protector se para en medio de la plataforma; su peso comprime los resortes 0.18 m. Otros cuatro estudiantes, empujando las esquinas de la plataforma, comprimen los resortes 0.53 m más, hasta que la parte superior del casco del valiente queda 0.90 m abajo del techo del sótano, y simultáneamente sueltan la plataforma. Haga caso omiso de las masas de los resortes y la plataforma. a) Calcule la rapidez del valiente justo antes de que su casco choque con el frágil techo. b) Sin el techo, ¿qué altura habría alcanzado el estudiante? c) El decano de estudiantes, después de castigar a los implicados, les sugiere que la próxima vez lo intenten en exteriores y en otro planeta. ¿Cambiaría su respuesta a la parte (b) si la travesura se hubiera efectuado en otro planeta con un valor distinto de g? Suponga que los estudiantes empujan la plataforma 0.53 m igual que antes. Explique su razonamiento.

7.78 Una fuerza conservativa actúa sobre una partícula de masa m que se mueve en una trayectoria dada por $x = x_0 \cos \omega_0 t$ y $y = y_0$ sen $\omega_0 t$, donde x_0, y_0 y ω_0 son constantes. a) Determine las componentes de la fuerza que actúa sobre la partícula. b) Determine la energía potencial de la partícula en función de x y y. Tome $U = 0$ cuando $x = 0$ y $y = 0$. c) Calcule la energía total de la partícula cuando: (i) $x = x_0$, $y = 0$; (ii) $x = 0$, $y = y_0$.

7.79 Al quemarse, un galón de gasolina produce 1.3×10^8 J de energía. Un automóvil de 1500 kg acelera desde el reposo hasta 37 m/s en 10 s. Su motor tiene una eficiencia de sólo el 15% (lo cual es representativo), o sea que sólo el 15% de la energía obtenida de la combustión de la gasolina se usa para acelerar el vehículo. El resto se convierte en energía cinética interna de las piezas del motor y se invierte en calentar los gases de escape y el motor. a) ¿Cuántos galones de gasolina gasta este automóvil durante la aceleración? b) ¿Cuántas de esas aceleraciones se requerirán para quemar un galón de gasolina?

7.80 Una presa hidroeléctrica tiene tras de sí un lago con área de 3.0×10^6 m^2 y costados verticales abajo del nivel del agua, el cual está 150 m arriba de la base de la presa. Cuando el agua pasa por turbinas en la base de la presa, su energía mecánica se convierte en energía eléctrica con eficiencia del 90%. a) Si la energía potencial gravitacional se toma como cero en la base de la presa, ¿cuánta energía hay almacenada en el metro superior del agua del lago? La densidad del agua es de 1000 kg/m^3. ¿Qué volumen de agua deberá pasar por la presa para producir 1000 kilowatts-hora de energía eléctrica? b) ¿Qué distancia baja el nivel de agua del lago cuando esa cantidad de agua pasa por la presa?

7.81 ¿Cuánta energía total está almacenada en el lago del problema 7.80? Igual que en ese problema, sea cero la energía potencial gravitacional en la base de la presa. Exprese su respuesta en joules y en kilowatts-hora. (*Sugerencia:* Divida el lago en capas horizontales infinitesimales con espesor dy e integre para obtener la energía potencial total.)

7.82 a) ¿La fuerza $\vec{F} = Cy^2\hat{\jmath}$, donde C es una constante negativa dada en N/m^2, es conservativa o no conservativa? Justifique su respuesta. b) ¿La fuerza $\vec{F} = Cy^2\hat{\imath}$, donde C es una constante negativa dada en N/m^2, es conservativa? Justifique su respuesta.

7.83 Varias fuerzas actúan sobre una cortadora controlada por microprocesador. Una es $\vec{F} = -\alpha xy^2\hat{\jmath}$, que tiene la dirección $-y$ y cuya magnitud depende de la posición de la cortadora. $\alpha = 2.50$ N/m^3. Considere el desplazamiento de la cortadora desde el origen hasta $x = 3.00$ m, $y = 3.00$ m. a) Calcule el trabajo efectuado sobre la cortadora por $\vec{F}$ si el desplazamiento sigue la recta $y = x$ que conecta los dos puntos. b) Repita suponiendo que la cortadora primero se mueve sobre el eje x hasta $x = 3.00$ m, $y = 0$ y luego paralela al eje y hasta $x = 3.00$ m, $y = 3.00$ m. c) Compare el trabajo efectuado por $\vec{F}$ si la herramienta se mueve a lo largo del eje x al punto $x = 3.00$ m, $y = 0$ y luego se mueve paralelamente al eje y a $x = 3.00$ m, $y = 3.00$ m. c) Compare el trabajo hecho por $\vec{F}$ siguiendo las dos trayectorias. ¿Es $\vec{F}$ conservativa? Explique.

7.84 Varias fuerzas actúan sobre un objeto. Una es $\vec{F} = \alpha xy\hat{\imath}$, que tiene la dirección x y cuya magnitud depende de la posición del objeto. (Véase el problema 6.96). La constante es $\alpha = 2.00$ N/m^2. El objeto sigue esta trayectoria: (1) parte del origen se mueve por el eje y hasta $x = 0$, $y = 1.50$ m; (2) se mueve paralelo al eje x hasta $x = 1.50$ m, $y = 1.50$ m; (3) se mueve paralelo al eje y hasta $x = 1.50$ m, $y = 0$; (4) se mueve paralelo al eje x volviendo al origen. a) Dibuje la trayectoria en el plano xy. b) Calcule el trabajo realizado por $\vec{F}$ sobre el objeto en cada tramo y en el viaje redondo. c) ¿Es conservativa o no conservativa la fuerza? Explique.

7.85 Una fuerza de ley de Hooke $-kx$ y una fuerza conservativa constante F en la dirección $+x$ actúan sobre un ion atómico. a) Demuestre que una posible función de energía potencial para esta combinación de fuerzas es $U(x) = \frac{1}{2}kx^2 - Fx - F^2/2k$. ¿Es ésta la *única* función posible? Explique. b) Encuentre la posición de equilibrio estable. c) Grafique $U(x)$ (en unidades de F^2/k) contra x (en unidades de F/k) para valores de x entre $-5F/k$ y $5F/k$. d) ¿Hay posiciones de equilibrio inestable? e) Si la energía total es $E = F^2/k$, qué valores máximos y mínimos de x alcanza el ion en su movimiento? f) Si el ion tiene masa m, calcule su rapidez máxima si $E = F^2/k$. ¿En qué valor de x es máxima la rapidez?

7.86 Una partícula se mueve en el eje x y sobre ella actúa una sola fuerza conservativa paralela al eje x que corresponde a la función de energía potencial graficada en la figura 7.43. La partícula se suelta del reposo en el punto A. a) ¿Qué dirección tiene la fuerza sobre la partícula en A? b) ¿En B? c) ¿En qué valor de x es máxima la energía cinética de la partícula? d) ¿Qué fuerza actúa sobre la partícula en C? e) ¿Qué valor máximo de x alcanza la partícula durante su movimiento? f) ¿Qué valor o valores de x corresponden a puntos de equilibrio estable? g) ¿De equilibrio inestable?

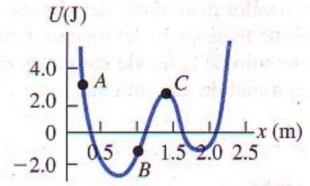


Figura 7.43 Problema 7.86.

Problema de desafío

7.87 Un protón de masa m se mueve en una dimensión. La función de energía potencial es $U(x) = \alpha/x^2 - \beta/x$, donde α y β son constantes positivas. El protón se libera del reposo en $x_0 = \alpha/\beta$. a) Demuestre que $U(x)$ puede escribirse como

$$U(x) = \frac{\alpha}{x_0^2}\left[\left(\frac{x_0}{x}\right)^2 - \frac{x_0}{x}\right]$$

Grafique $U(x)$. Calcule $U(x_0)$, ubicando así el punto x_0 en la gráfica. b) Calcule $v(x)$, la rapidez del protón en función de la posición. Grafique $v(x)$ y describa cualitativamente el movimiento. c) ¿Para qué valor de x es máxima la rapidez del protón? ¿Cuál es el valor de esa rapidez máxima? d) ¿Qué fuerza actúa sobre el protón en ese punto? e) Si el protón se libera en $x_1 = 3\alpha/\beta$, ubique x_1 en la gráfica $U(x)$. Calcule $v(x)$ y describa cualitativamente el movimiento. f) En cada caso (protón liberado en x_0 y en x_1), ¿qué valores máximos y mínimos de x se alcanzan durante el movimiento?