

Guía Básica

Prof. Wilson Herrera.

Recuerde ciertas nociones básicas:

$$1. \frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm b \cdot c}{b \cdot d}$$

$$2. \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

$$3. \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

$$4. \text{ Si } ax^2 + bx + c = 0, \text{ entonces } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \text{ con } a \neq 0$$

$$5. a^0 = 1, \text{ si } a \neq 0$$

$$6. \frac{0}{a} = 0, \text{ si } a \neq 0$$

$$7. (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$8. \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \text{ si } b \neq 0$$

$$9. a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$10. \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, \text{ si } a \neq 0$$

$$11. (a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

ALGUNOS PRODUCTOS NOTABLES

1. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
2. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
3. $(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$
4. $(a \pm b)^5 = a^5 \pm 5a^4b + 10a^3b^2 \pm 10a^2b^3 + 5ab^4 \pm b^5$
5. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
6. $(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$
7. $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + abc + 2ac$
8. $(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}) = x - y$
9. $(x^{\frac{1}{n}} - y^{\frac{1}{m}})(x^{\frac{k-1}{n}} + x^{\frac{k-2}{n}}y^{\frac{1}{m}} + x^{\frac{k-3}{n}}y^{\frac{2}{m}} + \dots + y^{\frac{k-1}{m}}) = x^{\frac{k}{n}} - y^{\frac{k}{m}}$

Realice la operaciones indicadas y simplifique

- | | |
|-------------------------------------|--|
| 1. $4 - 2(8 - 11) + 6$ | 11. $\frac{2}{3} - \frac{3}{5}$ |
| 2. $3[2 - 4(7 - 12)]$ | 12. $1 + \frac{5}{8} - \frac{1}{6}$ |
| 3. $-4[5(-3 + 12 - 4) + 2(13 - 7)]$ | 13. $\frac{2}{3}\left(6 - \frac{3}{2}\right)$ |
| 4. $\frac{5}{7} - \frac{1}{13}$ | 14. $0,25\left(\frac{8}{9} + \frac{1}{2}\right)$ |
| 5. $5[-1(7 + 12 - 16) + 4] + 2$ | 15. $\left(\frac{1}{4} + 3\right)\left(1 - \frac{4}{5}\right)$ |
| 6. $(-9 - 7)(-23 - 4)$ | 16. $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$ |
| 7. $(-7 - 2)[6 + (4 + 6)]$ | 17. $\frac{2}{3} - \frac{2}{2}$ |
| 8. $2[-2 + 2(-5 + 3)]$ | 18. $\frac{1}{\frac{1}{8} - \frac{1}{9}}$ |
| 9. $\frac{3}{10} + \frac{4}{15}$ | |
| 10. $\frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ | |

19. $\frac{2 - \frac{3}{4}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}$
20. $\frac{\frac{2}{5} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{10} + \frac{3}{15}}$
21. $\frac{\frac{1}{6} \cdot 36 - 10}{7 + \frac{1}{5} \cdot 25}$
22. $1 + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}$
23. $\frac{12 \cdot (-1) - (-6)(-3)}{\frac{2(-16)}{-4 - 4}}$
24. $\frac{3}{4 - 7} + \frac{3}{21} - \frac{1}{6}$
25. $\frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \right) - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right]$
26. $-\frac{1}{3} \left[\frac{2}{5} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) \right]$
27. $\frac{14}{21} \left(\frac{2}{5 - \frac{1}{3}} \right)^2$
28. $\left(\frac{2}{7} - 5 \right) \div \left(1 - \frac{1}{7} \right)$
29. $\frac{\frac{11}{7} - \frac{12}{21}}{\frac{11}{7} + \frac{12}{21}}$
30. $\frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{7}{8}}{\frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{7}{8}}$
31. $1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}$
32. $2 + \frac{3}{1 + \frac{5}{2}}$
33. $(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})$
34. $(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2$
35. $(3x + 5y)(3x - y)$
36. $(3x - 4)(x + 1)$
37. $(2x - 3)^2$
38. $(3x - 9)(2x + 1)$
39. $(4x - 11)(3x - 7)$
40. $(3t^2 - t + 1)^2$
41. $(2t + 3)^3$
42. $\frac{x^2 - 4}{x - 2}$
43. $\frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$
44. $\frac{t^2 - 4t - 21}{t + 3}$
45. $\frac{2x - 2x^2}{x^3 - 2x^2 + x}$
46. $\frac{12}{x^2 + 2x} \frac{4}{x} + \frac{2}{x + 2}$
47. $(3x - \frac{3}{5})(2x + \frac{1}{5})$
48. $(2x + y - z)^2$
49. $(4x - 7)(x - 6)$
50. $(8m + 3)^2$
51. $(\sqrt{8} + 5)(\sqrt{8} - 5)$
52. $(\sqrt{13} + \sqrt{10})(\sqrt{13} - \sqrt{10})$
53. $(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2$
54. $\frac{a^2 + 10a + 16}{a + 8}$
55. $\frac{24x - 8}{9x^3 - 3x^2}$

56. $\frac{x^2 + 6x + 8}{x^2 + 9x + 14}$

60. $\frac{10}{x^2 + 5} + \frac{7}{x} + \frac{2}{x + 5}$

57. $\frac{8x^2 - 77x + 45}{x - 9}$

61. $\frac{7x}{x + 1} + \frac{8}{x - 1} - \frac{14}{x^2 - 1}$

58. $\frac{3}{y^2 - 3y + 2} + \frac{5}{y^2 - 1}$

59. $\frac{x}{x^2 - 16} - \frac{4}{x^2 + 5x + 4}$

62. $\frac{2}{6y - 2} + \frac{y}{9y^2 - 1}$

Evalúe cada expresión

1. -3^2

12. $\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{-2}$

24. $\sqrt[4]{24}\sqrt[4]{54}$

2. $(-3)^2$

13. $\sqrt{16}$

25. $\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$

3. $(-3)^0$

14. $\sqrt[4]{16}$

26. $(-32)^{\frac{2}{5}}$

4. $5^2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3$

15. $\sqrt[4]{1/16}$

27. $-32^{\frac{2}{5}}$

5. $\frac{10^7}{10^4}$

16. $\sqrt{64}$

28. $1024^{-0,1}$

6. $\frac{3}{3^{-2}}$

17. $\sqrt[3]{-64}$

29. $\left(-\frac{27}{8}\right)^{2/3}$

7. $\frac{4^{-3}}{2^{-8}}$

18. $\sqrt[5]{-32}$

30. $\left(\frac{25}{64}\right)^{-3/2}$

8. $\frac{3^{-2}}{9}$

19. $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$

31. $\sqrt{32} + \sqrt{18}$

9. $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$

20. $\sqrt[3]{\frac{-1}{64}}$

32. $\sqrt{75} + \sqrt{48}$

10. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$

21. $\frac{\sqrt[5]{-3}}{\sqrt[5]{96}}$

33. $\sqrt[5]{96} + \sqrt[5]{3}$

11. $\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} \cdot \frac{9}{16}$

23. $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$

34. $\sqrt[4]{48} - \sqrt[4]{3}$

Use una calculadora para encontrar una aproximación decimal.

1. $(\sqrt{11} + 2)^4$
2. $\sqrt[4]{4,2} - \sqrt[3]{1,9}$
3. $(4,97)^{-1/2}$
4. $(\sqrt{3} + 1)^3$
5. $\sqrt[3]{7,1\pi^2 + 5} + 2\pi$
6. $\sqrt[4]{(6\pi^2 - 2)\pi}$

En cada problema exprese el conjunto solución de la desigualdad dada en notación de intervalos y bosqueje su gráfica.

1. $x - 7 < 2x - 5$
2. $3x - 5 < 4x - 6$
3. $7x - 2 \leq 9x + 3$
4. $5x - 3 > 6x - 4$
5. $-4 < 3x + 2 < 5$
6. $-3 < 4x - 9 < 11$
7. $-3 < 1 - 6x \leq 4$
8. $4 < 5 - 3x < 7$
9. $x^2 + 2x - 12 < 0$
10. $x^2 - 5x - 6 > 0$
11. $2x^2 + 5x - 3 > 0$
12. $4x^2 - 5x - 6 < 0$
13. $\frac{x + 4}{x - 3} \leq 0$
14. $\frac{3x - 2}{x - 1} \geq 0$
15. $\frac{2}{x} < 5$
16. $\frac{7}{4x} \leq 7$
17. $\frac{1}{3x - 2} \leq 4$
18. $\frac{3}{x + 5} > 2$
19. $(x + 2)(x - 1)(x - 3) > 0$
20. $(2x + 3)(3x - 1)(x - 2) < 0$
21. $(2x - 3)(x - 1)^2(x - 3) \geq 0$
22. $(2x - 3)(x - 1)^2(x - 3) > 0$
23. $x^3 - 5x^2 - 6x < 0$
24. $x^3 - x^2 - x + 1 > 0$

Indique si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa.

1. $-3 < -7$
2. $-1 > -17$
3. $-3 < -\frac{22}{7}$

Indique si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa.

1. $-5 > -\sqrt{26}$

2. $\frac{6}{7} < \frac{34}{39}$

3. $-\frac{5}{7} < -\frac{44}{59}$

Encuentre todos los valores de x que satisfagan, de manera simultánea, ambas desigualdades.

1. $3x + 7 > 1$ y $2x + 1 < 3$

2. $3x + 7 > 1$ y $2x + 1 > -4$

3. $3x + 7 > 1$ y $2x + 1 < -4$

Encuentre todos los valores de x que satisfacen al menos una de las dos desigualdades.

1. $2x - 7 > 1$ o bien $2x + 1 < 3$

2. $3x + 7 \leq 1$ o bien $2x + 1 < 3$

3. $3x + 7 \leq 1$ o bien $2x + 1 > 3$

Resuelva para x , exprese su respuesta en notación de intervalos.

1. $(x + 1)(x^2 + 2x - 7) \geq x^2 - 1$

2. $x^4 - 2x^2 \geq 8$

3. $(x^2 + 1)^2 - 7(x^2 + 1) + 10 < 0$

Resuelva cada desigualdad. Exprese su solución en notación de intervalos.

1. $1,99 < \frac{1}{x} < 2,01$

2. $2,99 < \frac{1}{x+2} < 3,01$

En los siguientes problemas determine los conjuntos solución de las desigualdades dadas.

- | | |
|---|--|
| 1. $ x - 2 \geq 5$ | 6. $\left \frac{x}{4} + 1\right < 1$ |
| 2. $ x + 2 < 1$ | 7. $ 5x - 6 > 1$ |
| 3. $ 4x + 5 \leq 10$ | 8. $ 2x - 7 > 3$ |
| 4. $ 2x - 1 > 2$ | 9. $\left \frac{1}{x} - 3\right > 6$ |
| 5. $\left \frac{2x}{7} - 5\right \geq 7$ | 10. $\left 2 + \frac{5}{x}\right > 1$ |

En los siguientes problemas muestre que la implicación indicada es verdadera.

- $|x - 3| < 0,5 \Rightarrow |5x - 15| < 2,5$
- $|x + 2| < 0,3 \Rightarrow |4x + 8| < 1,2$
- $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{6} \Rightarrow |6x - 12| < \varepsilon$
- $|x + 4| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |2x + 8| < \varepsilon$

En los siguientes problemas determine δ (dependiente de ε) de modo que la implicación dada sea verdadera.

- $|x - 5| < \delta \Rightarrow |3x - 15| < \varepsilon$
- $|x - 2| < \delta \Rightarrow |4x - 8| < \varepsilon$
- $|x + 6| < \delta \Rightarrow |6x + 36| < \varepsilon$
- $|x + 5| < \delta \Rightarrow |5x + 25| < \varepsilon$

En los siguientes problemas resuelva las desigualdades.

- | | |
|----------------------------|---------------------------|
| 1. $ x - 1 < 2 x - 3 $ | 3. $2 2x - 3 < x + 10 $ |
| 2. $ 2x - 1 \geq x + 1 $ | 4. $ 3x - 1 < 2 x + 6 $ |

Escriba en notación científica la cantidad indicada en cada ejercicio.

1. a) Un año luz, la distancia que la luz recorre en un año, es de casi 9460800000000 km.
- b) El diametro de un electrón es de casi 0,0000000000004 cm.
- c) Una gota de agua contiene mas de 33 trillones de moléculas.
2. a) La distancia de la tierra al Sol es de casi 150 millones de kilómetros.
- b) La masa de una molécula de oxígeno es de casi 0,00000000000000000000053 g.
- c) La masa de la tierra es de casi 59700000000000000000000 kg.

Aplicaciones

1. **Distancia a la estrella más cercana.** Alfa Centauro, la estrella más cercana al Sistema Solar, está a 4,3 años luz. Expresé esta distancia en kilómetros.
2. **Velocidad de la luz.** La velocidad de la luz en el vacío es de casi 300000 km/s ¿Cuánto tarda un rayo de luz en llegar a la tierra desde el Sol?
3. **Volumen del mar.** El promedio de la profundidad del mar es de $3,7 \times 10^3$ m y la superficie del mar es de $3,6 \times 10^{14}$ m². ¿Cuál es el volumen total del mar en litros? (Un metro cúbico contiene 1000 litros.)
4. **Número de moléculas.** Un cuarto aislado de hospital mide 5 m de ancho, 10 m de largo y 3 m de alto; se llena de oxígeno puro. Un metro cúbico contiene 1000 litros y 22,4 litros de cualquier gas contiene $6,02 \times 10^{23}$ moléculas (número de Avogadro). ¿Cuántas moléculas de oxígeno hay en cuarto?
5. **¿Qué tan lejos puede ver?** Debido a la curvatura de la Tierra, la distancia máxima D que usted puede ver desde el último piso de un edificio cuya altura es h se estima mediante la fórmula $D = \sqrt{2rh + h^2}$, donde $r = 3960$ millas es el radio de la Tierra y D y h también se miden en millas. ¿Qué

tan lejos puede ver desde el mirador de la Torre CN de Toronto, 1135 pies por encima del suelo?

6. **Velocidad de un automóvil que frena.** La policía aplica la fórmula $s = \sqrt{30fd}$ para estimar la velocidad s (en millas por hora) a la cual un vehículo se desplaza si recorre d pies después de que aplica los frenos en forma repentina. El número f es el coeficiente de fricción de la carretera, el cual es una medida de la "deslizabilidad" de la carretera. La tabla da algunas estimaciones representativas de f .

	Alquitrán	Concreto	Grava
Seco	1,0	0,8	0,2
Humedo	0,5	0,4	0,1

- a) Si un automóvil se desliza 65 pies en concreto humedo, ¿qué tan rápido iba cuando se aplicaron los frenos?
- b) Si el vehículo se desplaza a 50 millas por hora, ¿qué tanto se desliza en alquitrán humedo?

7. **Distancia de la Tierra al Sol.** Se infiere de la *Tercera Ley de Kepler* del movimientos de los planetas que la distancia promedio de un planeta al Sol, en metros, es

$$d = \left(\frac{GM}{4\pi^2} \right)^{1/3} T^{2/3}$$

donde $M=1,99 \times 10^{30}$ kg, $G=6,67 \times 10^{-11}$ Nm²/kg² es la constante de gravitación y T es el período de la órbita del planeta, en segundos. Aplique el hecho de el período de la orbita de la Tierra es de casi 365,25 días para encontrar la distancia de la Tierra al Sol.

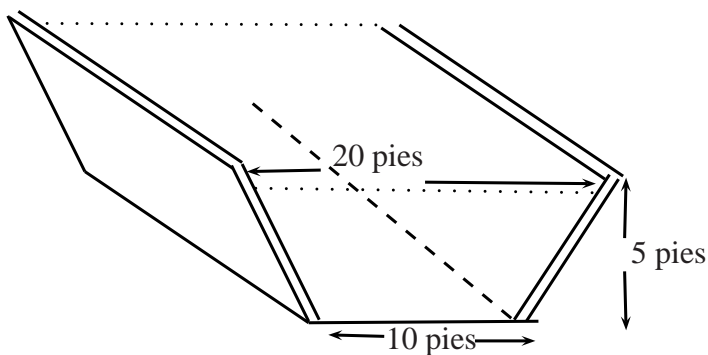
8. **Velocidad de flujo de un canal.** La velocidad de agua que fluye por un canal o por el lecho de un río se rige por la *ecuación de Manning*

$$V = 1,486 \frac{A^{2/3} S^{1/2}}{p^{2/3} n}$$

donde V es la velocidad del flujo en pies/s; A es área de la sección transversal del canal, en pies cuadrados; S es la pendiente descendente del canal; p es el

perímetro mojado en pies (la distancia desde la parte superior de una orilla, bajando por lado del canal, atravesando el fondo y subiendo hasta la parte superior de la otra orilla), y n es el coeficiente de rugosidad (una medida de la rugosidad del fondo del canal). Esta ecuación se usa para predecir la capacidad de los canales de inundación para regular el escurrimiento de las fuertes deprecipitaciones pluviales. En el caso del canal mostrado en la figura, $A=75$ pies cuadrados, $S= 0,050$, $p=24,1$ pies y $n=0,040$.

- a) Determinar la velocidad que lleva el agua por este canal.
- b) ¿Cuántos pies cúbicos de agua puede descargar el canal por cada segundo?



- c) **El faro de la colina de Gibb, Southampton, Bermudas**, en operación desde 1946, se levanta 117 pies sobre una colina que mide 245 pies de altura, de modo el rayo de luz está a 362 pies sobre el nivel del mar. En un folleto se afirma que la luz puede verse en el horizonte a cerca de 26 millas de distancia. Verifique la veracidad de esta afirmación. En el folleto se afirma también que barcos a una distancia de 40 millas de la costa pueden ver la luz y aviones volando a 10000 pies pueden verlo a 120 millas de distancia. Verifique la veracidad de estos enunciados. ¿Cuál es la suposición que se hace en el folleto acerca de la altura del barco?
- d) Usted tiene 1000 pies de borde flexible para piscina y desea con-

struir una. Experimente con proyectos de piscinas rectangulares cuyo perímetro sea de 1000 pies. ¿Cómo varían sus áreas? ¿Cuál es la forma rectangular con mayor área? Luego calcule el área encerrada por una piscina circular con perímetro (circunferencia) de 1000 pies. ¿Cuál sería su elección acerca de la forma de la piscina? Si es rectangular, ¿cuál es su preferencia acerca de sus dimensiones? Justifique su selección. Si su única consideración es tener una piscina que encierre la mayor área, ¿qué forma debe usar?

- e) De cada esquina de una hoja metálica cuadrada se corta un cuadrado de 9 cm por lado. Se doblan los lados para construir una caja sin tapa. Si la caja debe contener 144 centímetros cúbicos, ¿cuáles deben las dimensiones de la hoja metálica?
- f) Una pieza de alambre de 8 pies de longitud será cortada en dos partes y cada parte se doblará para formar un cuadrado. ¿En dónde debe cortarse el alambre si la suma de las áreas de los cuadrados debe ser de 2 pies cuadrados?